kafemath.free.fr



PAR NEUSIS, CONSTRUISONS UN ENNÉAGONE RÉGULIER

Hervé Stève

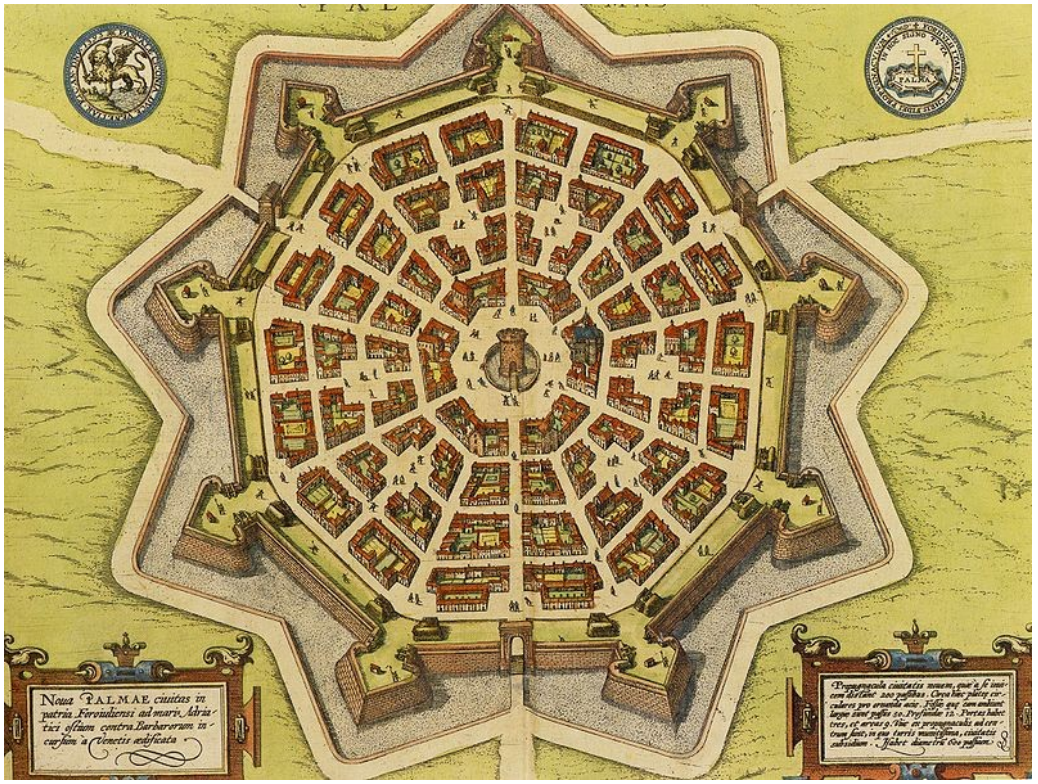
Docteur en mathématiques, ingénieur dans l'aéronautique, membre fondateur du Kafemath

herve.steve@hotmail.fr

G4G à la Commune d'Aligre du 21/10/2026

Palmanova, Udine, Italie

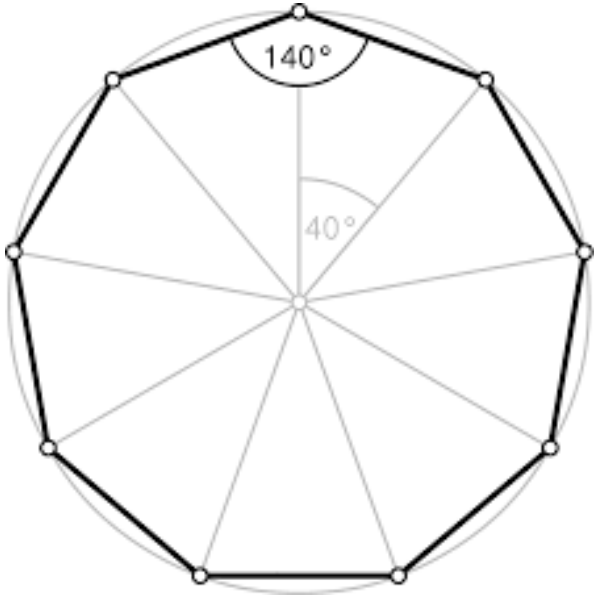




@ wikipédia

Forteresse ennéagonale (1593)

L’ennéagone régulier



- Polyèdre régulier à **9** *ἐννέα* **sommets** donc **9 côtés** et 27 diagonales. Il se découpe en 9 triangles isocèles semblables ayant en commun le centre du cercle qui passe par les 9 sommets du **nonagone**.

- L’angle des triangles au centre du cercle est donc de 360° / 9 = 40° ; les deux angles font alors (180°-40°) / 2 = 70°. Ainsi l’angle interne entre 2 côtés de l’ennéagone est de 140°

- D’après la condition **du théorème de Gauss-Wantzel (1837)**, l’ennéagone régulier n’est pas **constructible** à la règle (non graduée) et au compas mais cela peut se faire avec une règle graduée

- Un polygone à *n* côtés est **constructible** si et seulement si *n* est le produit d'une puissance de 2 (éventuellement $2^0 = 1$) et d'un nombre (éventuellement nul) de **nombres premiers de Fermat** distincts.

Nombres premiers de Fermat



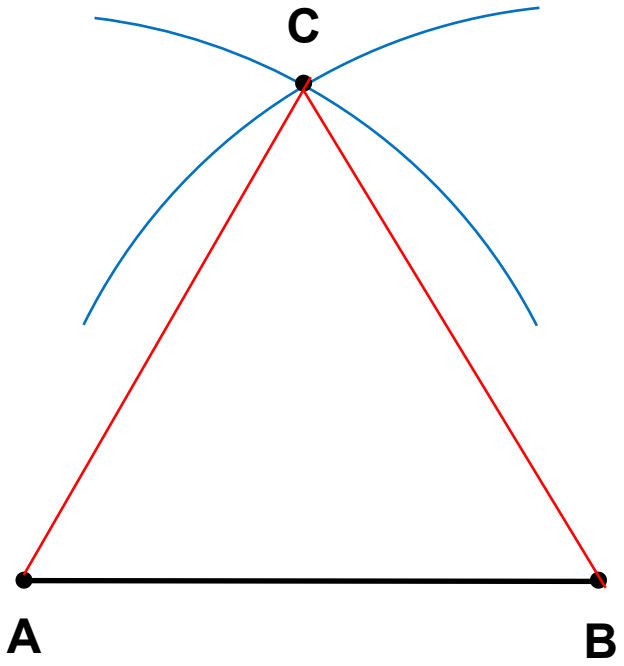
Un nombre premier est dit de Fermat s'il est de la forme $2^{2^{\wedge}k}+1$ pour un certain entier *k*. (avec 2^k = 2^k)

- Pour k=0, le nombre premier de Fermat vaut $2^{2^{\wedge}0}+1 = 3$, c'est-à-dire **le triangle équilatéral**
- Pour k=1, on obtient le **pentagone régulier (S=5)**
- Pour k=2 un polygone régulier à S=17 sommets ; k=3 **S=257** ; k=4 **S=65 537** ; …
- Pour S<10 : les polygones réguliers non constructibles sont l'**heptagone** (S=7) et l'**ennéagone** (S=9) mails ils peuvent se construire ***par neusis*** c'est-à-dire **avec une règle graduée**

Construction du triangle régulier

- **S=3 : constructible à la règle non graduée et au compas :**

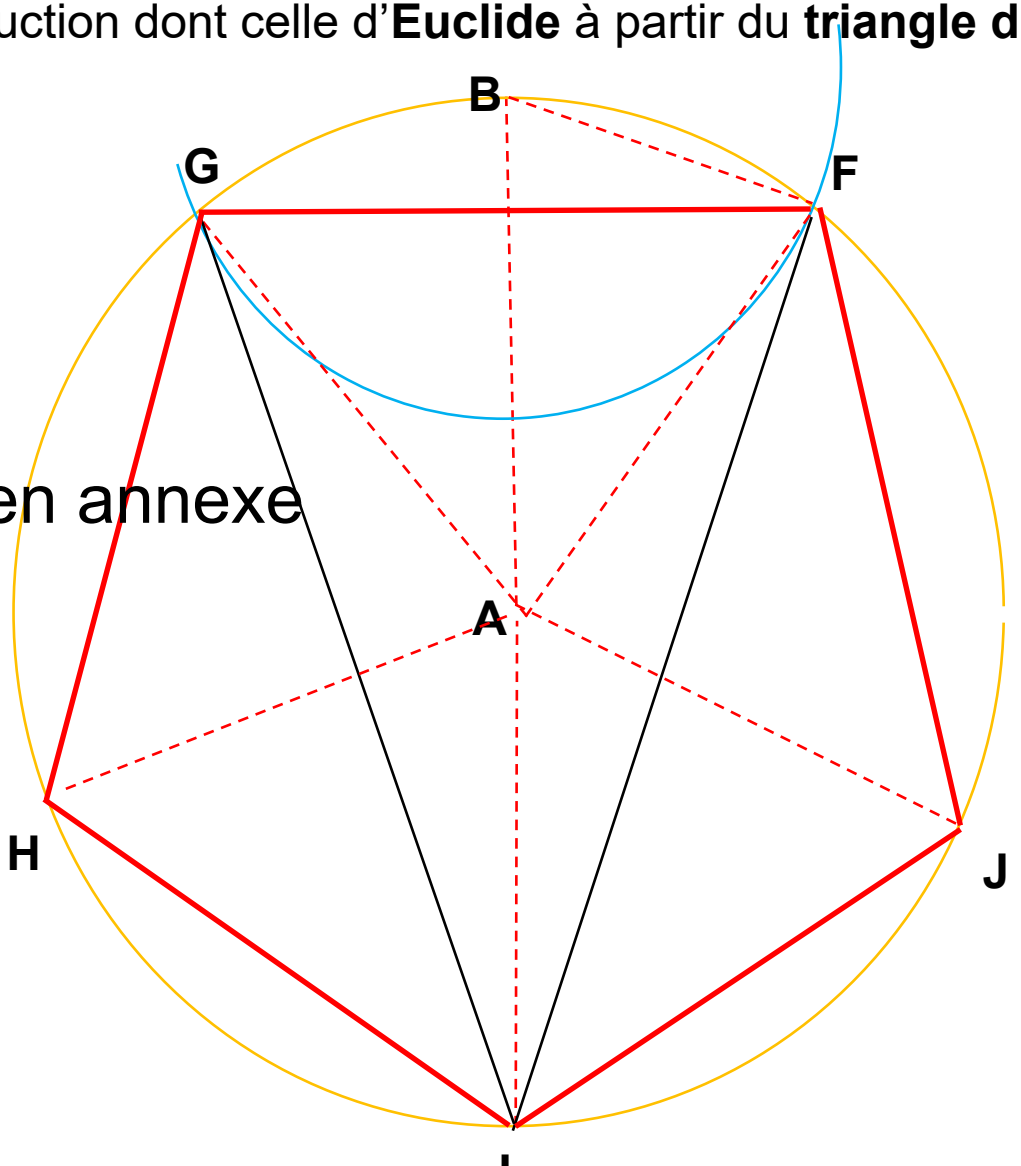
  - avec une règle, tracer un segment AB
  - avec un compas tracer 2 cercle de rayon AB et de centres A puis B
  - L'intersection des 2 cercles est le point C tel que AC = CB = AB
  - Alors ABC est bien un **triangle équilatéral**



Le pentagone régulier



- **S=5 : constructible à la règle non graduée et au compas :** plusieurs construction dont celle d'**Euclide** à partir du **triangle d'or**

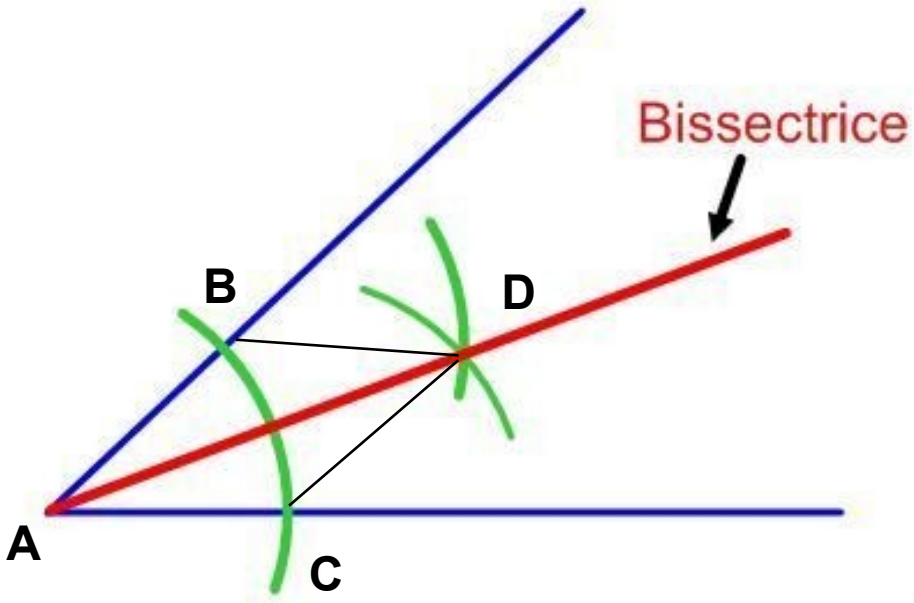


Preuve en annexe

Bissectrice d'un angle

Constructible à la règle non graduée et au compas :

- On trace 2 droites bleues qui s'intersecte en A
- Puis le cercle vert de centre A qui intersecte les 2 droites bleues en B et C
- Puis 2 nouveaux cercles verts de même rayons et de centres B et C, qui s'intersectent en D.
- Alors la **droite AD est la bissectrice** des 2 droites bleues : en effet par construction on obtient un losange ABDC et les diagonales sont des bissectrices.



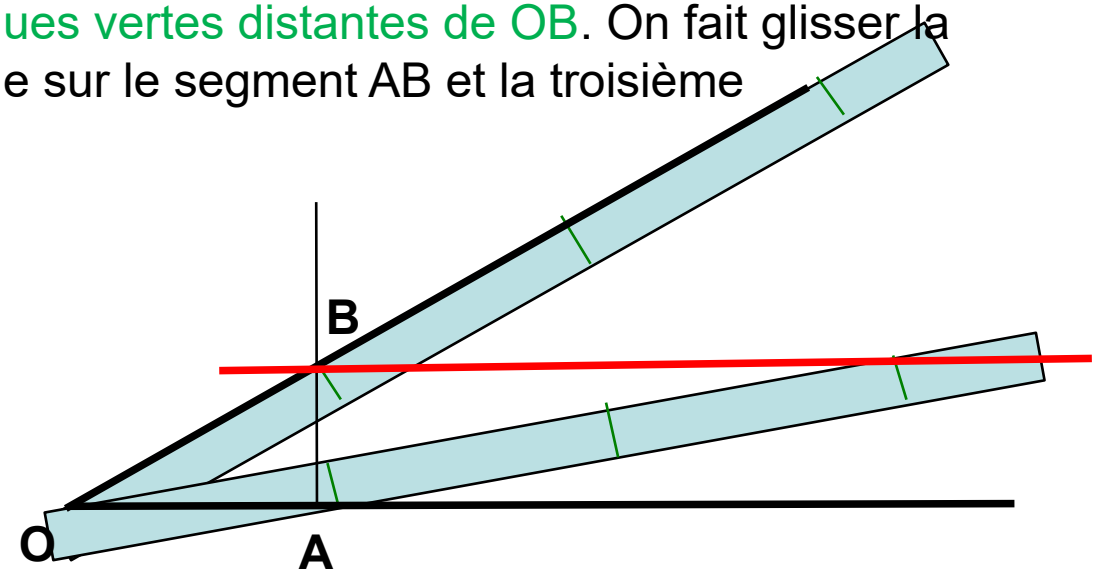
Trisection d'un angle

- Avec la **duplication du cube** et la **quadrature du cercle**, fait partie des 3 grands problèmes de l'antiquité : il n'y a pas de solutions de construction à la règle non graduée et au compas ce qui fut démontré par **Pierre-Laurent Wantzel** en 1837.

- On peut en faire une construction avec une règle graduée : cf. **Archimède**

  - Soit 2 droites qui se coupent en O, soient la droite passant par AB et perpendiculaire à OA et la droite rouge passant B parallèle à OA.
  - Soit la règle avec trois marques vertes distantes de OB. On fait glisser la règle avec la première marque sur le segment AB et la troisième marque sur la droite rouge.



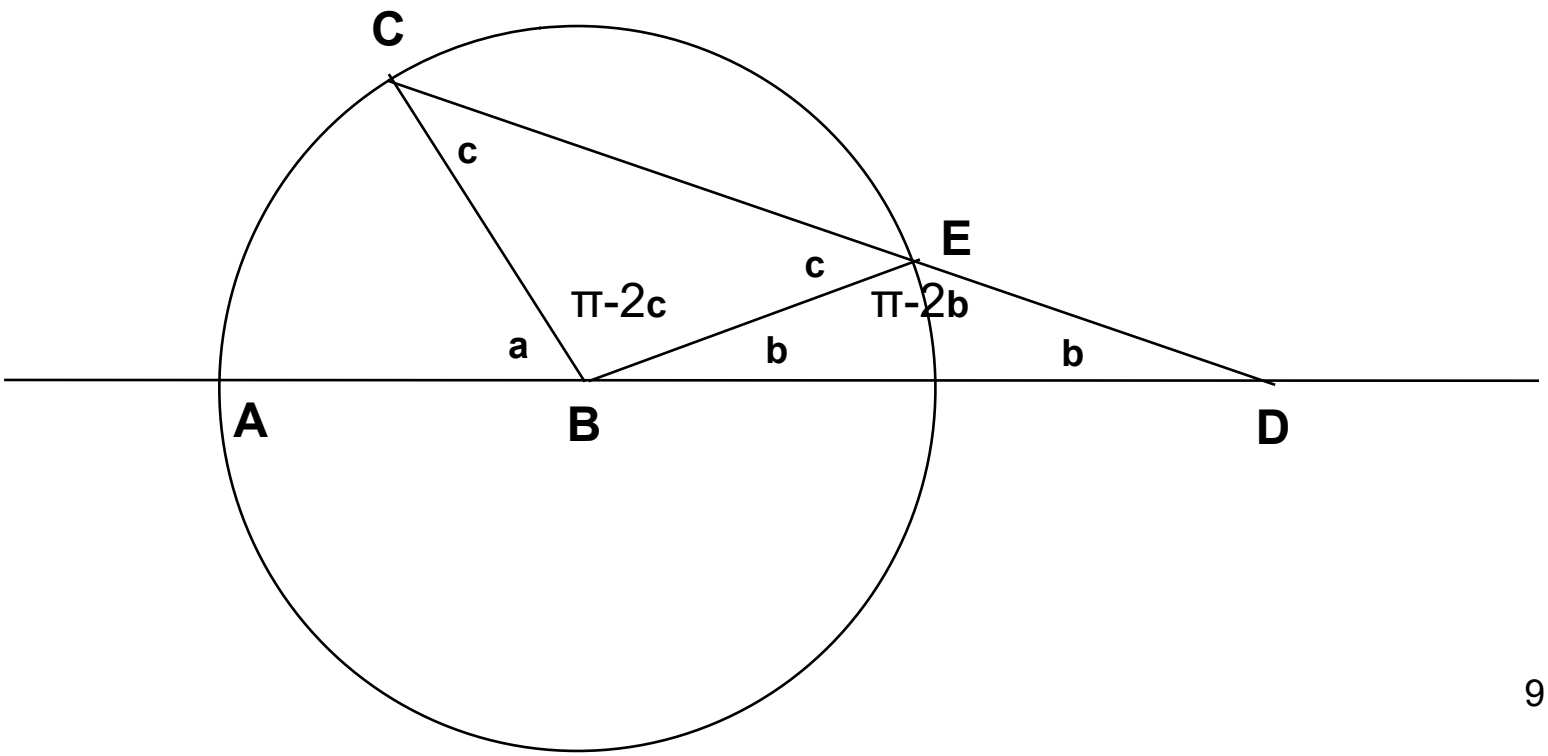


Méthode neusis = incliner

Méthode de l'angle triple

Cependant on peut construire assez facilement l'angle triple :

- On peut montrer sur la figure ci-dessous que l'angle **a = 3 b** :
  - on construit un triangle BED isocèle en E avec l'angle b en D ou B
  - on prolonge la droite DE qui coupe le cercle en C alors l'angle c = 2b
  - le triangle CBE est isocèle en B donc π = a + (π – 2c) + b => a = 2c – b = 3b



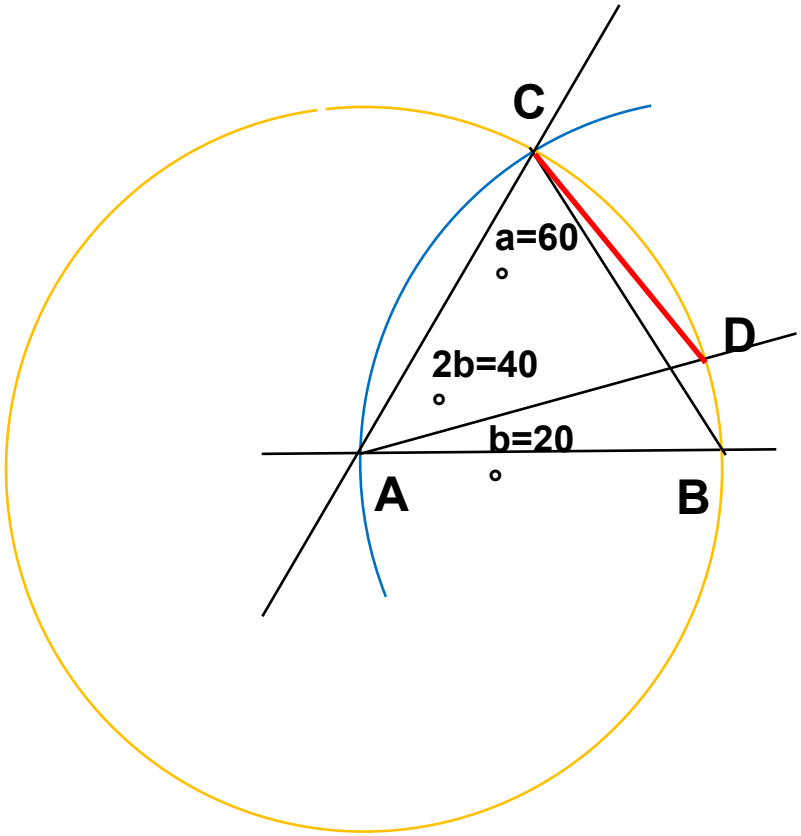
Construction ennéagone (1)

S=9 : application de la trisection en prenant a=60° d'où b=20°
puis on obtient l'angle 2b = 40° = 2 pi / 9 :

- On part d'un triangle équilatéral ABC avec A centre du cercle orange de rayon AB et B centre du cercle bleu de rayon AB. Alors C l'intersection des 2 cercles

- On obtient le point D par neusis par la méthode de la trisection tq l'angle DAB soit 20° et l'angle CAD vaut 40°

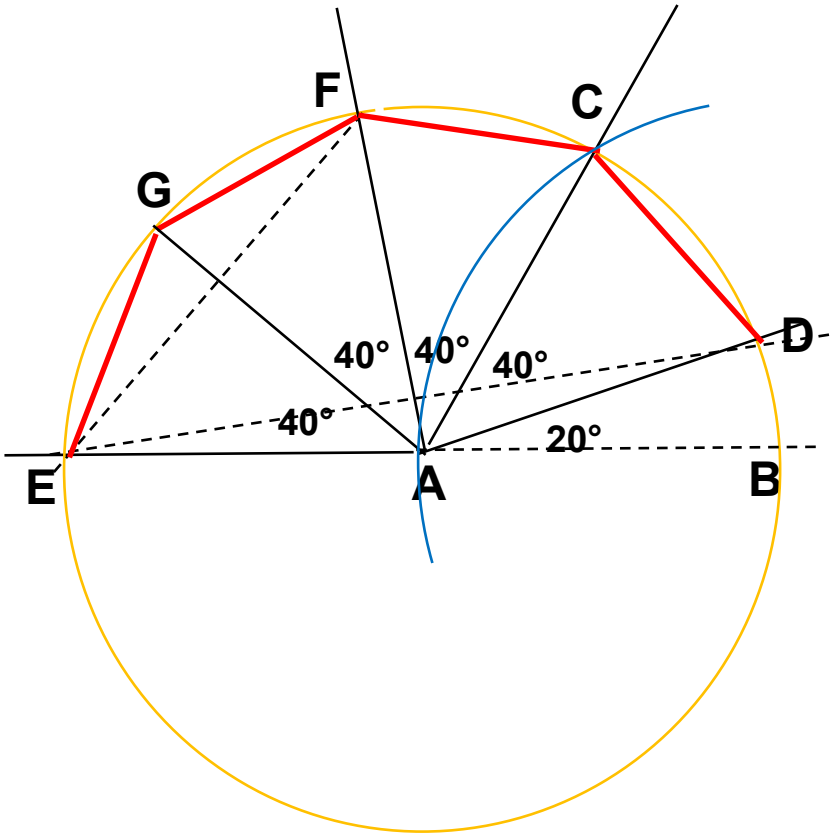
- Soit CD un côté du futur ennéagone de centre A inscrit dans le cercle orange



Construction ennéagone (2)

- On prolonge AB en E qui coupe le cercle orange. On construit la bissectrice de AED qui coupe le cercle en F avec FC=CD un nouveau côté de l'ennéagone.

- Puis le point G qui coupe le cercle orange avec la bissectrice de EAF : soit FG=GE 2 nouveaux côtés ennéagonaux.



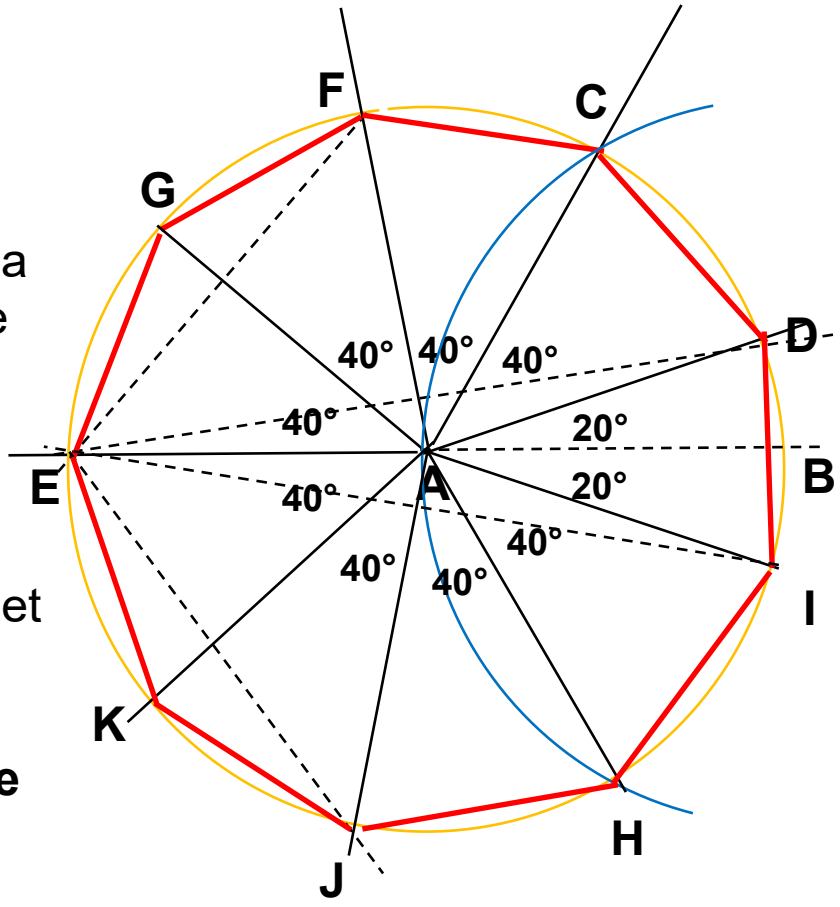
Construction ennéagone (3)

- On construit le point H l'autre intersection du cercle bleu avec le cercle orange, puis I par la méthode de trisection de l'angle BAH. D'où un côté DI de l'ennéagone.

- J est l'intersection le cercle orange avec la bissectrice EAI, puis K avec la bissectrice EAJ. On obtient les 3 autres côtés JH=EK=KJ de l'ennéagone.

- Les 9 triangles internes sont semblables car ils partagent le même angle 40° en A et aussi 2 côtés rayons du cercle orange

=> **la figure EGFCDIHJKE est l'ennéagone régulier recherché**



Annexe

- Construction à la règle non graduée et au compas du pentagone (S=5)

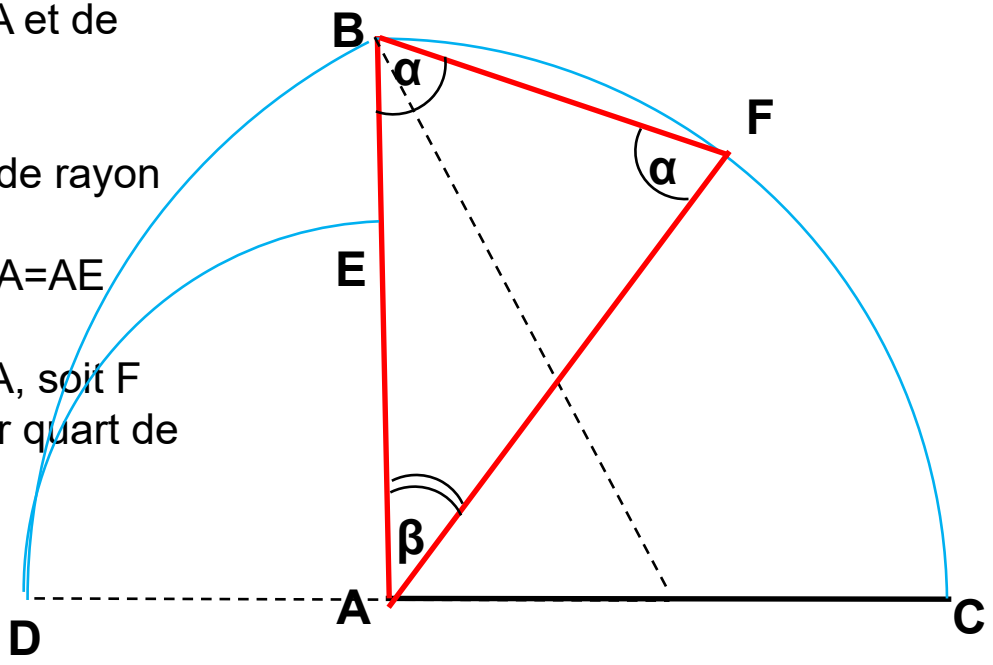
- Construction par neusis de l'heptagone (S=7)

Le pentagone régulier



- **S=5 : constructible à la règle non graduée et au compas :** plusieurs construction dont celle d'**Euclide** à partir du **triangle d'or**

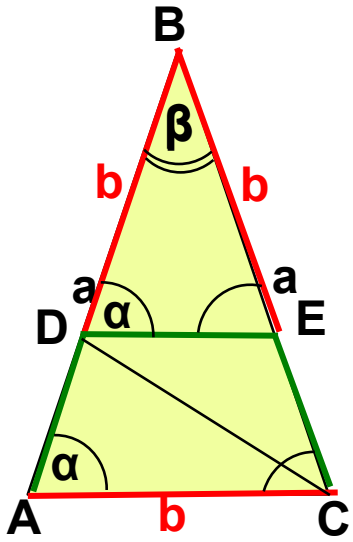
- Tracer un quart de cercle BC de centre A et de rayon AC=AB
- Soit I le milieu de AC
- Tracer un cercle d'arc DB de centre I et de rayon BI avec D sur la droite AC
- Tracer un quart de cercle DE de rayon DA=AE avec E sur la droite AB
- Tracer un cercle de centre B et rayon DA, soit F l'intersection de ce cercle avec le premier quart de cercle tracé.
- Alors ABF est un triangle d'or



En effet, la relation de Pythagore : $BI^2 = AB^2 + AI^2$; soit AC=AB=1 alors $BI = \sqrt{5}$
Alors AD=AE=BF=$\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ avec φ le nombre d'or
Les dimensions du triangle isocèle ABF sont 1,1, φ ; il est donc un triangle d'or

Angles du triangle d'or

triangle d'or ABC isocèle en B de base b et de côtés double a avec a/b = φ



- Si β angle en B et α angle en A et C alors :

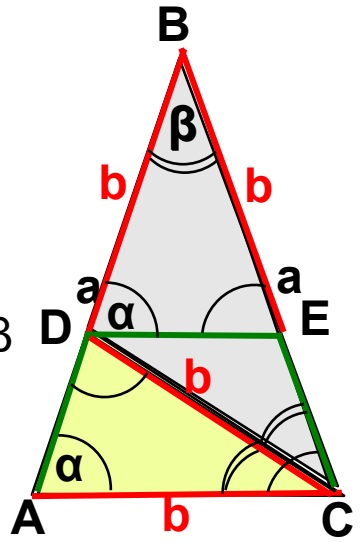
  2 α + β = 180°

- Soit D sur BA tq BD = b et E sur BC tq BE = b

  alors BDE triangle d'or car isocèle semblable à ABC (partage les mêmes angles) dans un rapport a/b = φ

d'où DE = b/φ = DA = EC

Le triangle CDA est d'or car est semblable au triangle d'or BDE car partage 2 côtés et un angle : donc DC = AC = b



- Le triangle BDC est isocèle en D : **triangle d'argent** avec a/b = φ

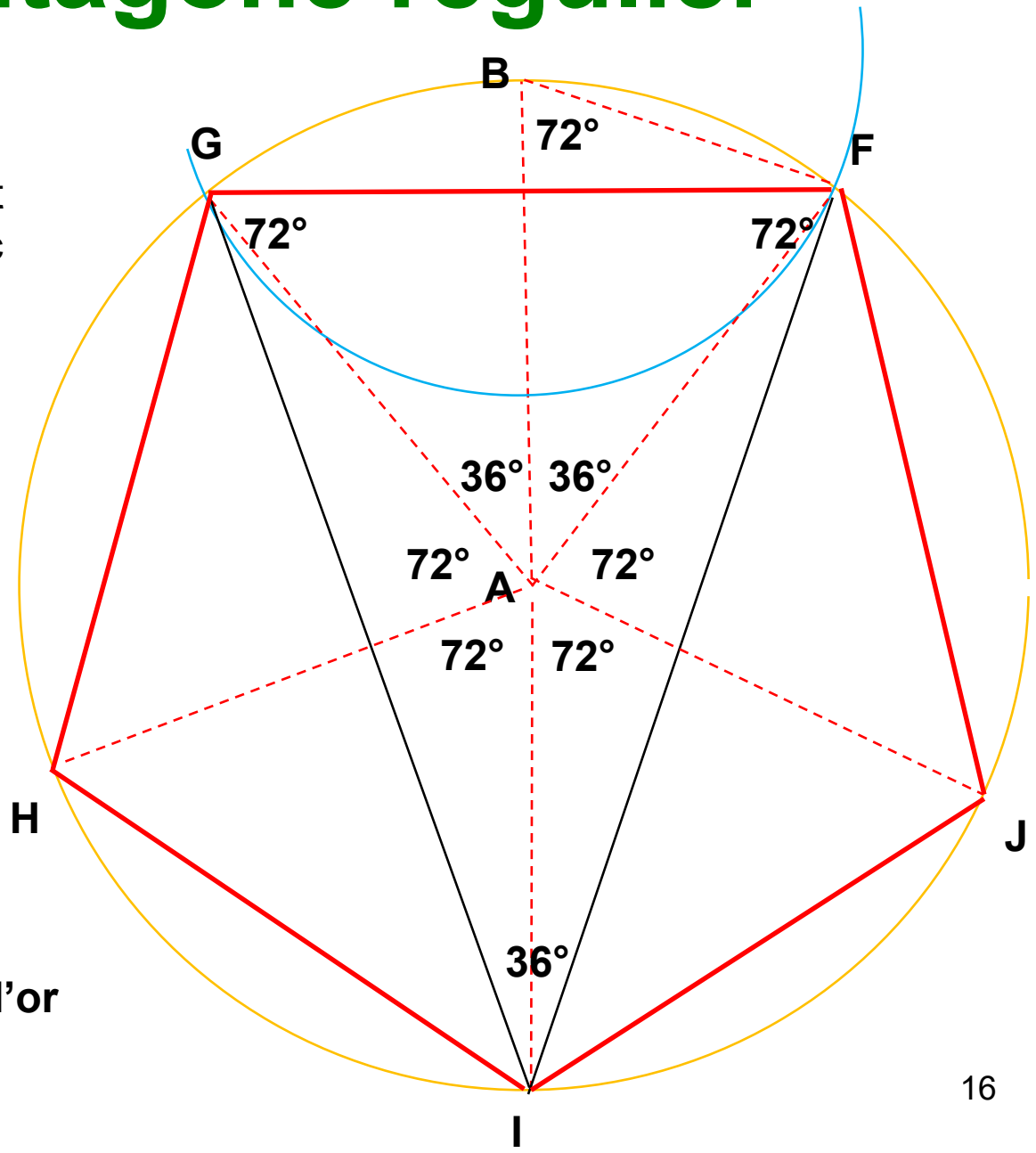
  d'où l'angle ACE = α est égal au double des angles DCE = ACD = β

  soit **α = 2 β**, comme 2 α + β = 180° on déduit que 5 β = 180°

ainsi **β = 36°** et **α =72°**

Le pentagone régulier

- Tracer l'arc de cercle de centre B et rayon BF , soit l'autre intersection G avec le cercle orange
- Soit le sommet I dans le prolongement de AB sur le cercle orange
- Soit le sommet J du cercle orange qui intersecte la bissectrice AF, AI
- Soit le sommet H symétrique de J
- Alors FGHIJ est un **pentagone régulier**



Et FGI est un triangle d'or

L'heptagone (1)

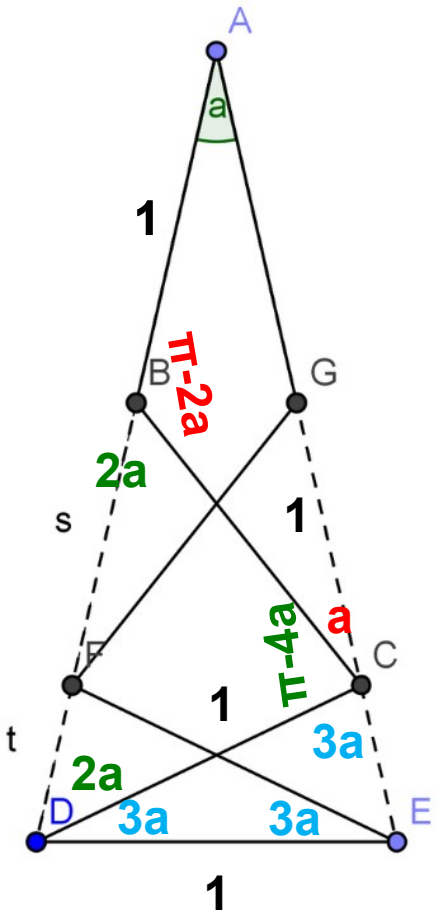
S=7 : non constructible à la règle non graduée et au compas mais possible par neusis en 3 étapes :

- Création de figure ci-contre : heptagone régulier non convexe ABCDEFGA tq ADE triangle isocèle de sommet A angle **a** et de base **DE=1**. **Combien vaut a ?**

- ABC est isocèle avec angle a en C et π-2a en B, et l'angle complémentaire CBD est 2a.

- BCD est isocèle angle 2a en D et π-4a en C, et l'angle complémentaire DCE est 3a.

- CDE est isocèle avec angle 3a en E qui est aussi celui du triangle isocèle ADE : d'où l'angle en D est aussi 3a. Dans ce triangle la somme des angles vaut **π = 3a + 3a + a = 7a**



d'où **a = π/7**

L'heptagone (2)

Calcul de BE :

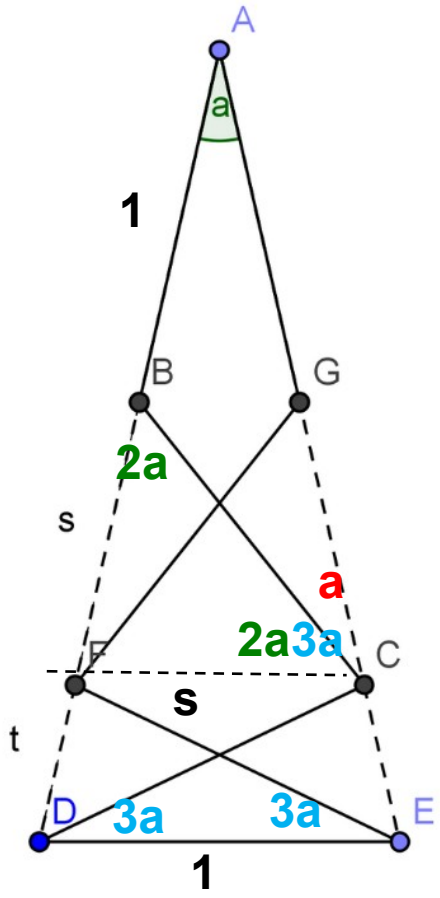
- Soient s=BF et t=FD
- FDE est isocèle alors cos(3π/7)=t/2
- FC // DE alors l'angle ACF est 3a, comme l'angle ACB vaut a alors l'angle BCF est 3a-a=2a. Comme l'angle CBF est aussi 2a alors BFC est isocèle en F et FC=FB=s.
- Application alors le théorème de Thales :

$$AF / AD = FC / DE$$

$$\text{ainsi } 1+s = s + s^2 + st \Rightarrow s^2 + st = 1$$

- **Loi des cosinus** : $BE^2 = BD^2 + DE^2 - 2BD\ DE \cos(BDE) = (s+t)^2 + 1 - 2(s+t)t/2 = s^2 + t^2 + 2st + 1 - st - t^2 = 2$

d'où BE = √2



L’heptagone (3)

Construction par neusis :

- Soit le segment DE=1 futur côté de l’heptagone, on trace la médiatrice de DE, le carré CDEF et le cercle bleu de centre E et de rayon CE=√2
- Avec une règle avec 2 marques distantes de 1, on place A et B tels la règle passe pas DE, la première marque sur cercle bleu en B et la seconde plus haut sur la médiatrice en A.
- On obtient le triangle isocèle DAE de sommet A d’angle **π/7** et sommet de l’heptagone à venir. Le centre O de ce triangle est aussi le centre de l’heptagone (intersection des bissectrices) ce qui permet de tracer le cercle orange heptagonale
- Les 4 autres sommets de l’heptagone sont placés à l’aide du compas écarté de DE.

