

# Polynômes de Bernstein, courbes de Bézier et algorithme de De Casteljau

François Dubois \*

**café Aïre-Ona, 1, rue du Docteur Goujon, Paris 12e**

**jeudi 13 novembre 2025**

---

\* co-animateur du Kafemath

Pierre Bézier  
1910-1999

Paul de Faget de Casteljou  
1930-2022

Ecole Nationale d'Arts et Métiers

École Normale Supérieure

“l'École Normale rencontre rarement les Arts et Métiers”

Régis Debray

Conservatoire National des Arts et Métiers, 1994

# systeme Unisurf de Renault, 1960

conception de la Renault 8, 1960

algorithme de de Casteljau vu par l'équipe Renault, 1963

conférence de Pierre Bézier, 1964

Renault 14, 1978

# Pierre Bézier ou nul n'est prophète en son pays...

“Si votre truc était si bien que cela,  
il y a longtemps que les Ricains l'emploieraient”

[...] le gadzarts attribue son développement mathématique à un savant illustre, mais dont le nom n'avait pas laissé de traces dans l'histoire des sciences :

“Il est toujours utile, à qui veut donner l'impression d'être sérieux, de se placer sous l'égide d'un grand ancêtre ;

je mis donc ces fonctions sous l'invocation d'un professeur que je baptisai Onésime Durand.”

[...] c'est Détroit qui est en “retard” sur Billancourt. Pierre Bézier s'amuse de cette inversion du modèle à suivre. Alors qu'à Billancourt la direction lui oppose le contre-exemple des “Ricains”, ses collègues américains lui auraient signifié un agacement inverse :

“You see, Peter, the trouble is that next time we propose something to our topmen, they will say: if your gimmick is so cute, how come they don't already use it in Biancort ?”

# algorithme de De Casteljaou, 1959

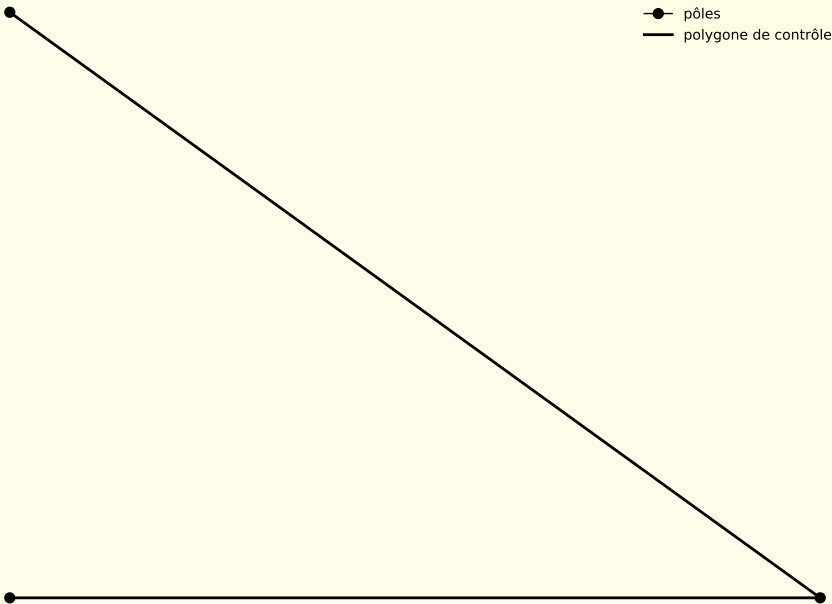
Paul de Casteljaou, "[Courbes à pôles](#)", enveloppe Soleau 40.040, document P 2108, INPI Paris ; transmise par le département Outillage Méthodes Calcul de la S.A. André Citroën, [1959](#)

Paul de Casteljaou, "[Courbes et Surfaces à Pôles](#)", document P.4147, registered with the bailiff, written in the department Outillage Méthodes Calcul at S.A. André Citroën, [1963](#)

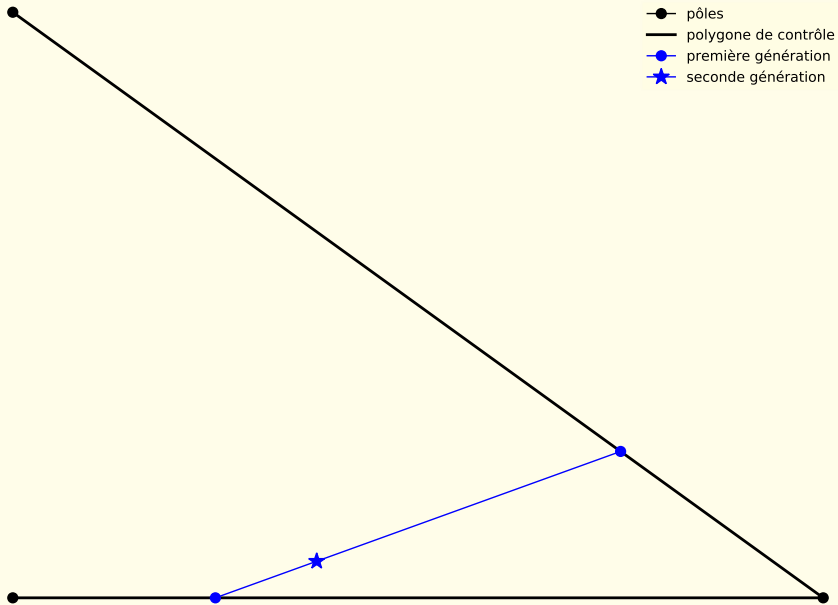
références données dans l'article d'Andreas Müller (2024)

les enveloppes Soleau sont détruites au bout de 10 ans  
[information transmise par Laura Galibert,  
juriste à l'Institut National de la Propriété Industrielle]

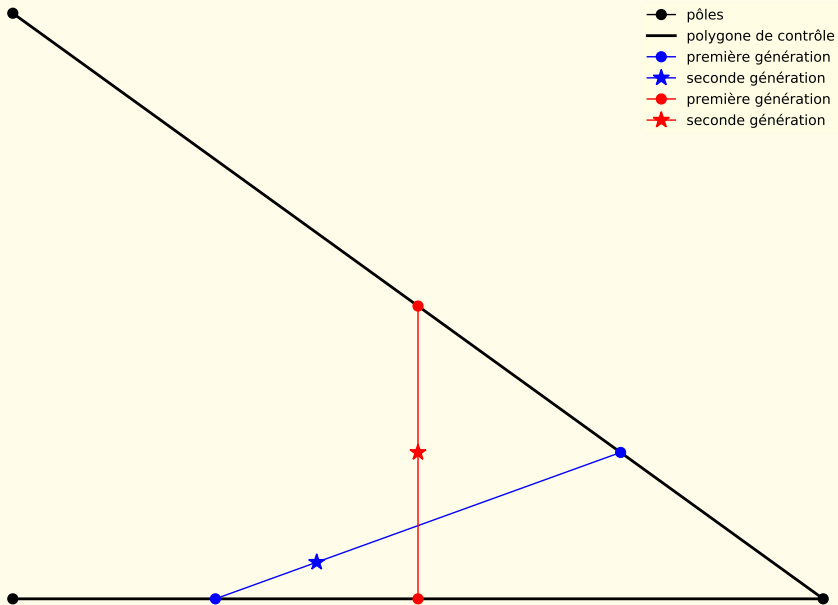
# courbes à pôles, 1959



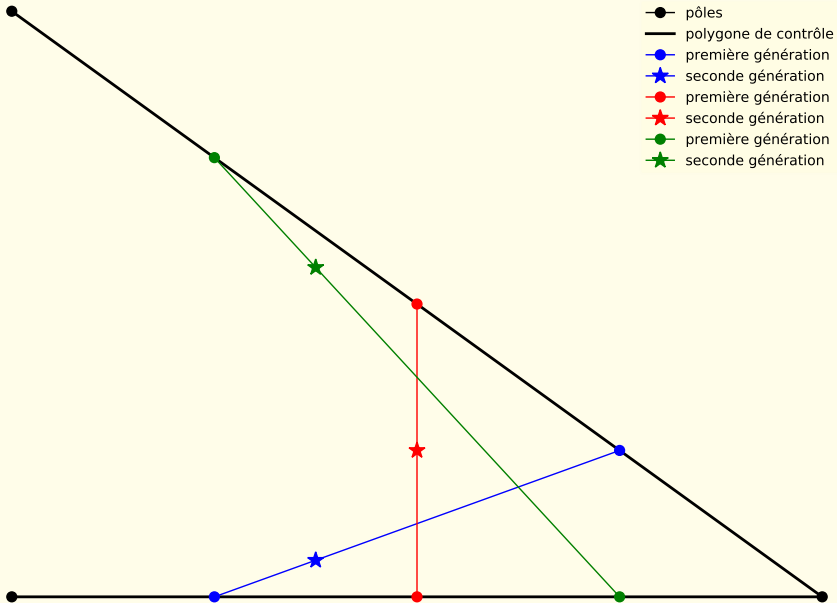
# point courant avec sa tangente



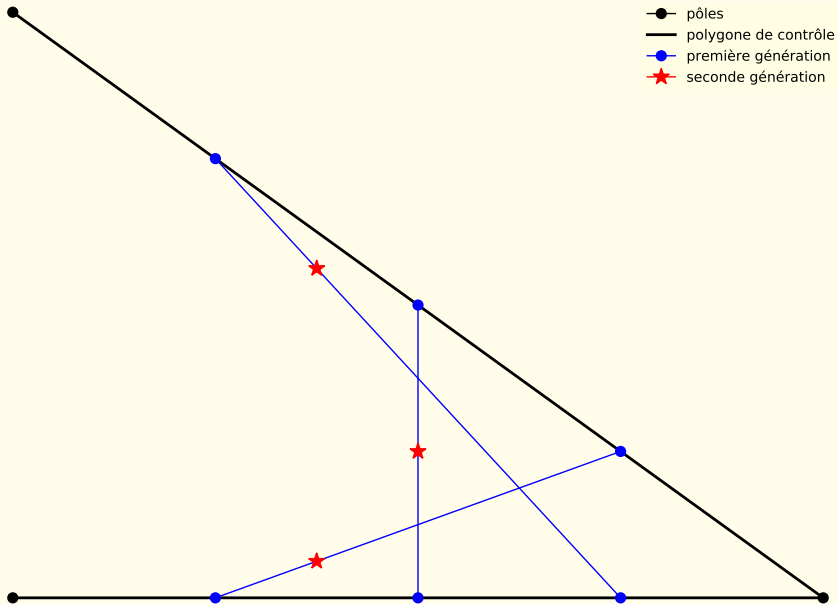
# un second point courant avec sa tangente



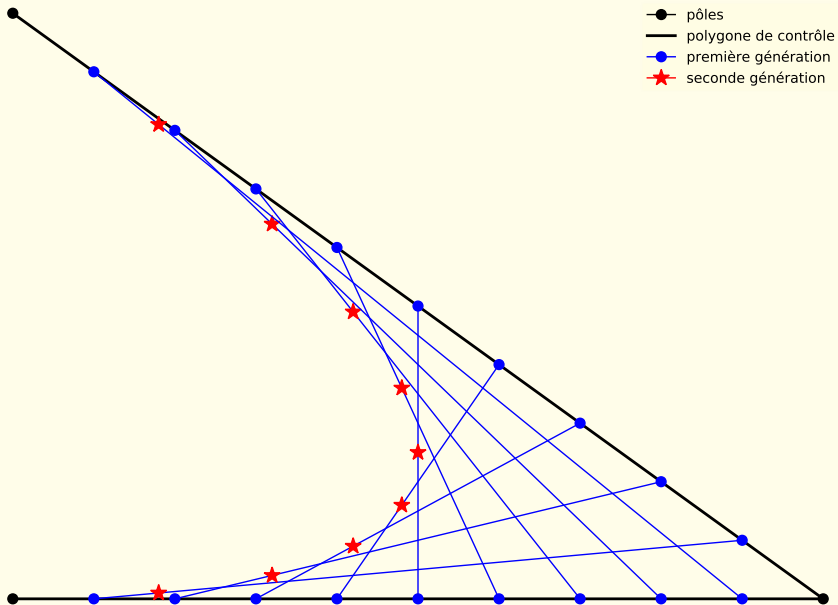
# un troisième point...



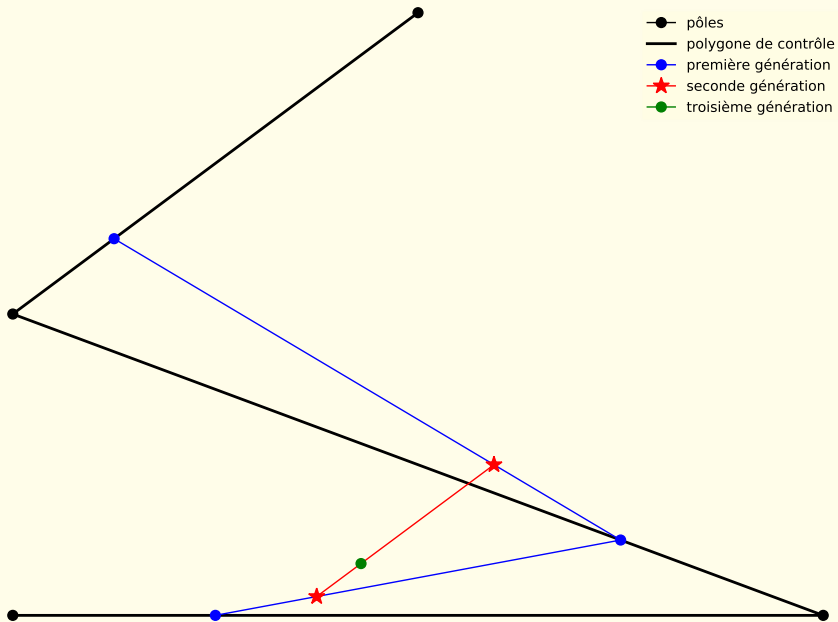
## changement des couleurs...



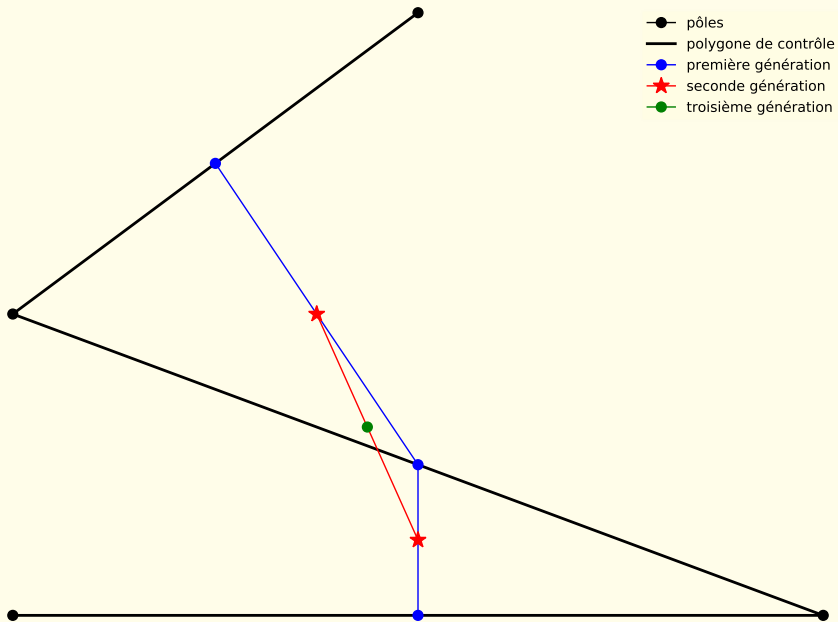
## avec plus de points, la cône est une enveloppe



# construction dans le cas de 4 points de contrôle

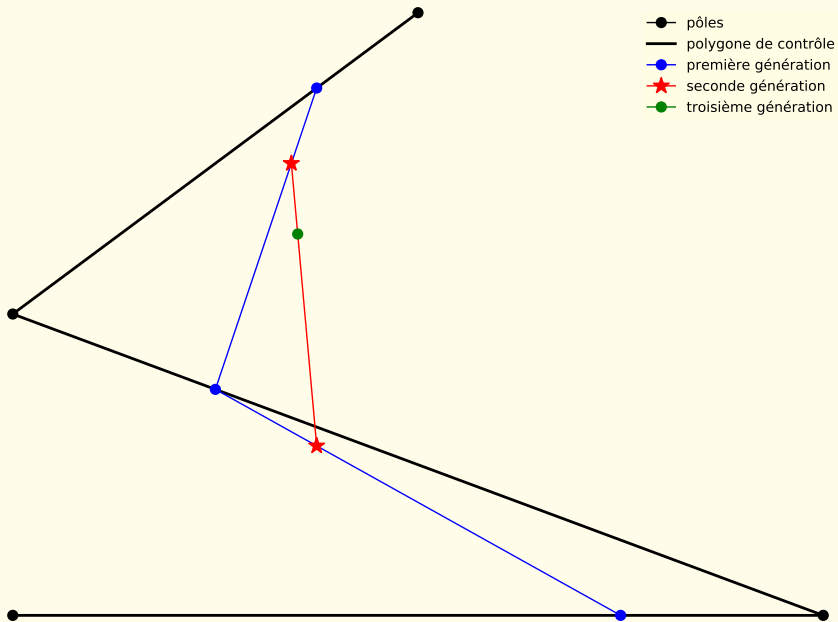


# un second point dans le cas de 4 points de contrôle

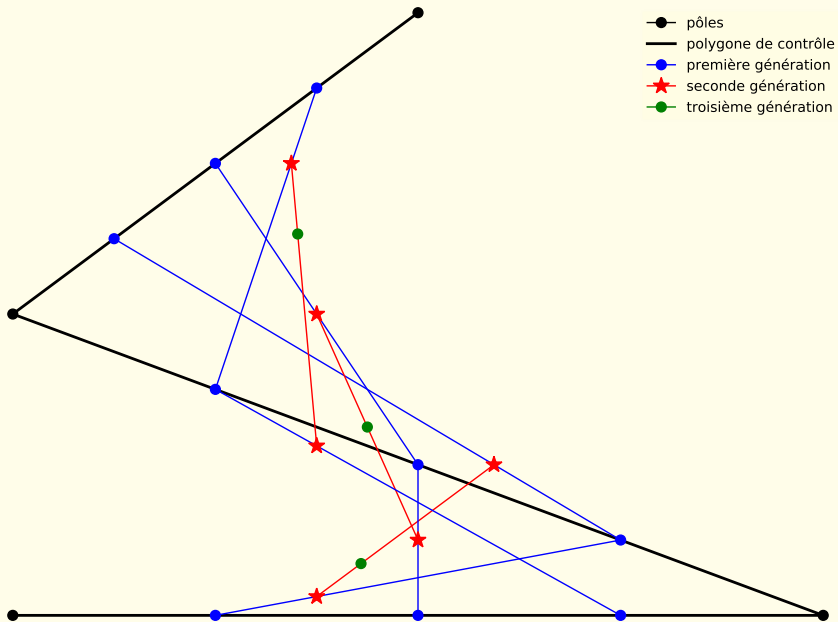


## un troisième point dans le cas de 4 points de contrôle

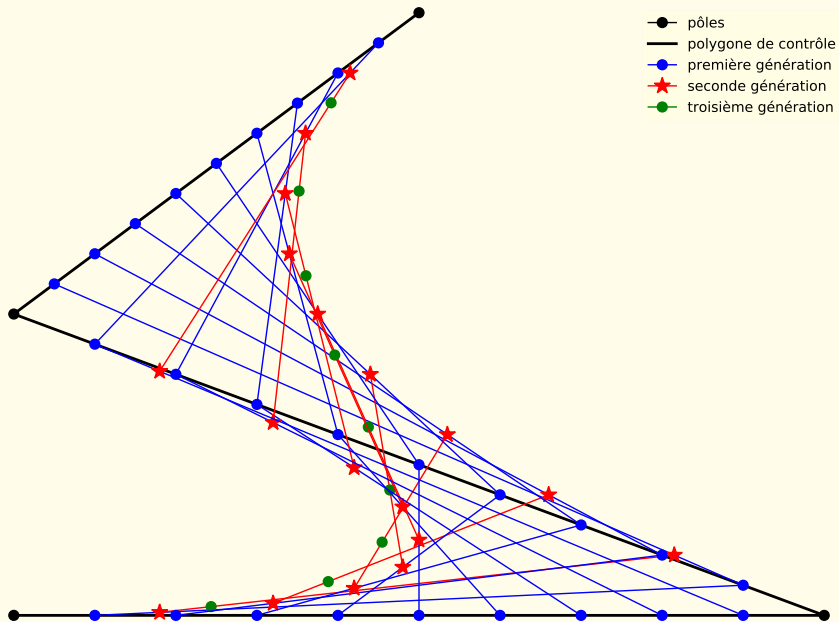
14



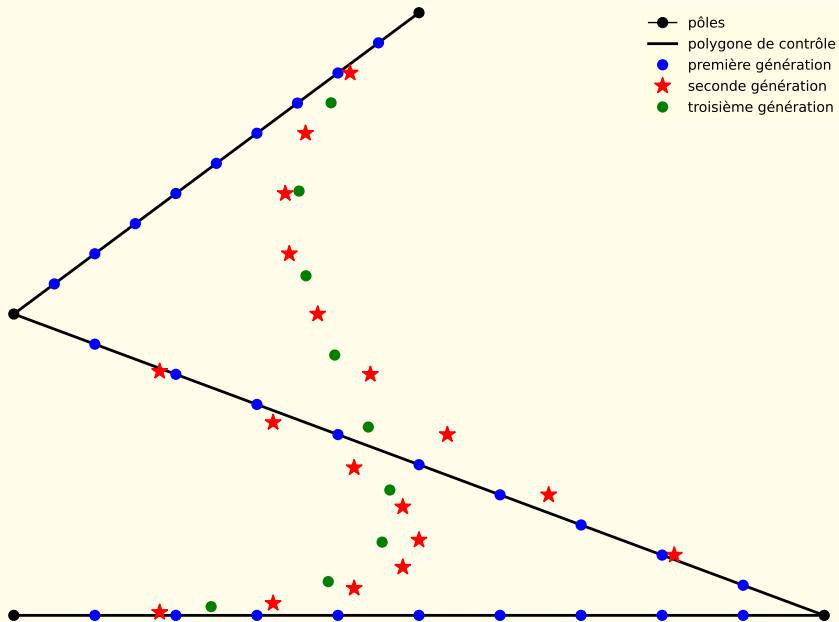
# construction dans le cas de 4 points de contrôle



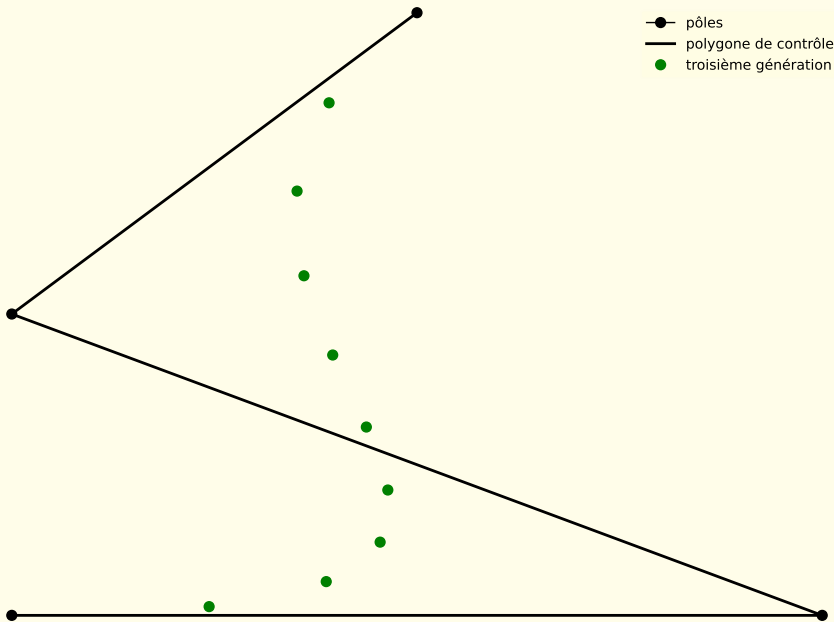
# 4 points de contrôle avec plus de sommets



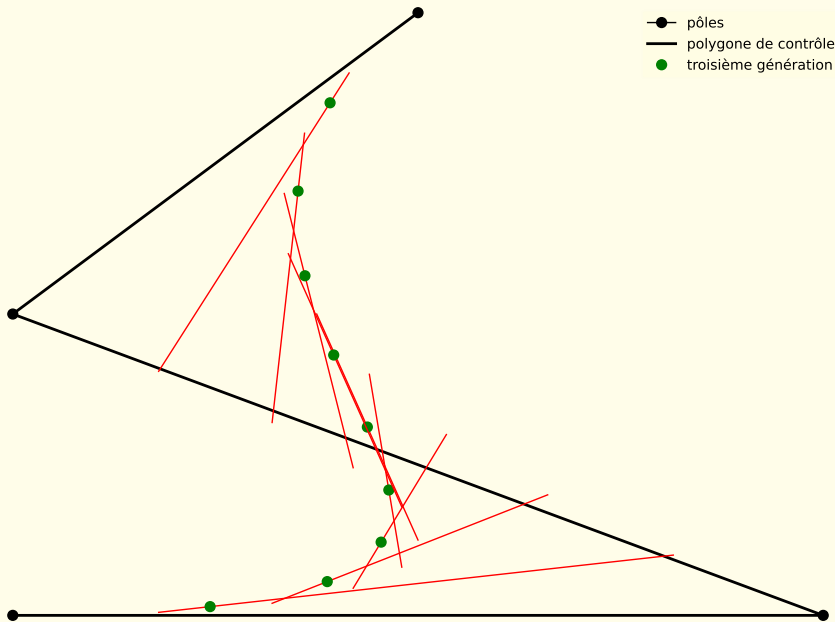
# on enlève les traits de construction



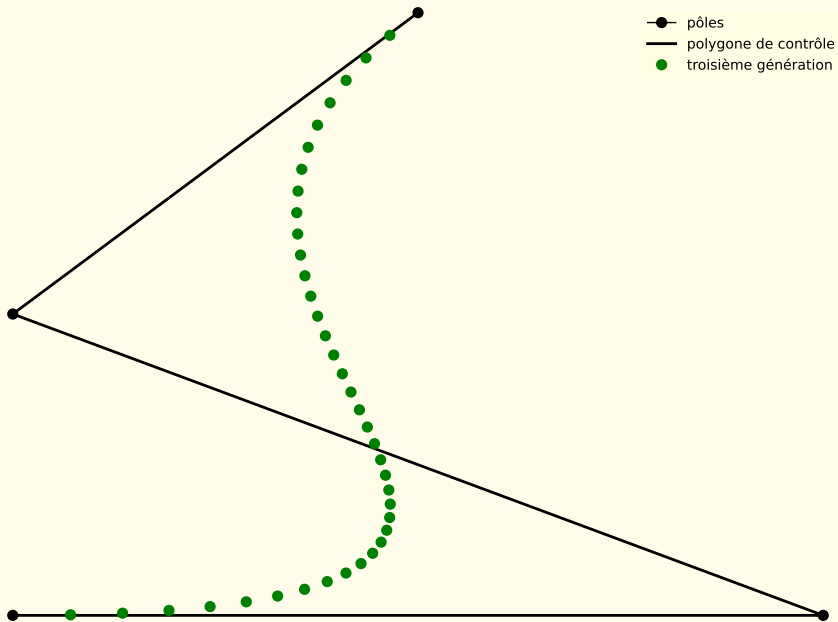
# on enlève les points de construction



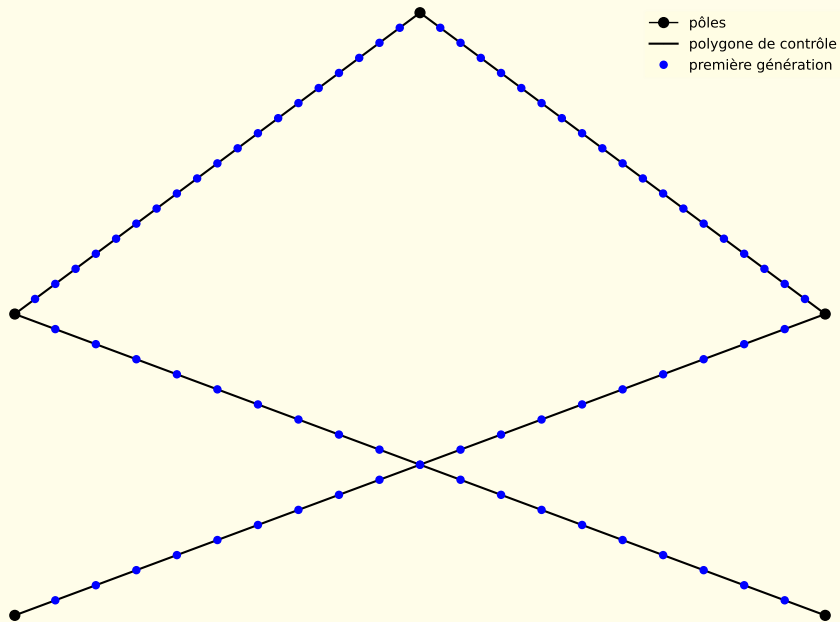
# avec les tangentes en gardant l'avant-dernière génération 19



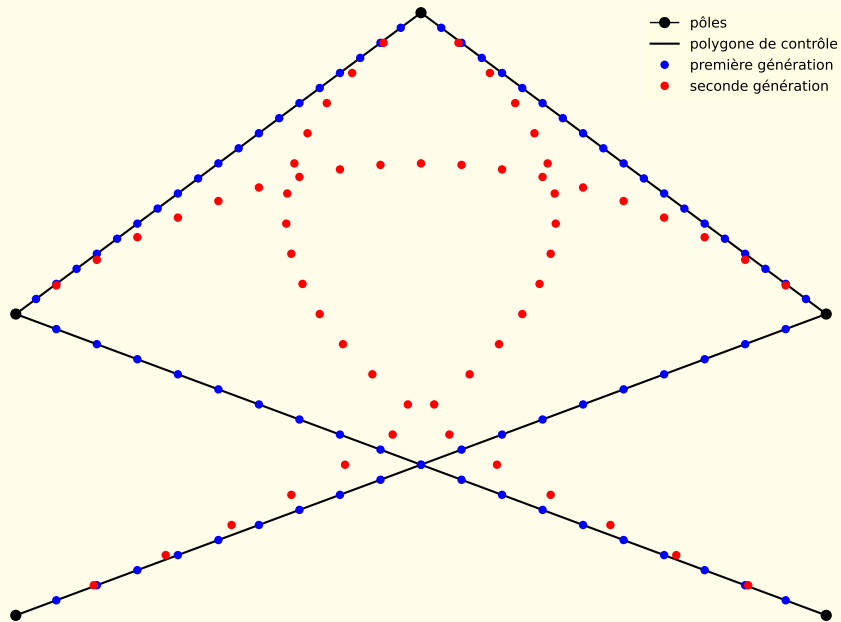
# avec plus de points, on découvre la cubique



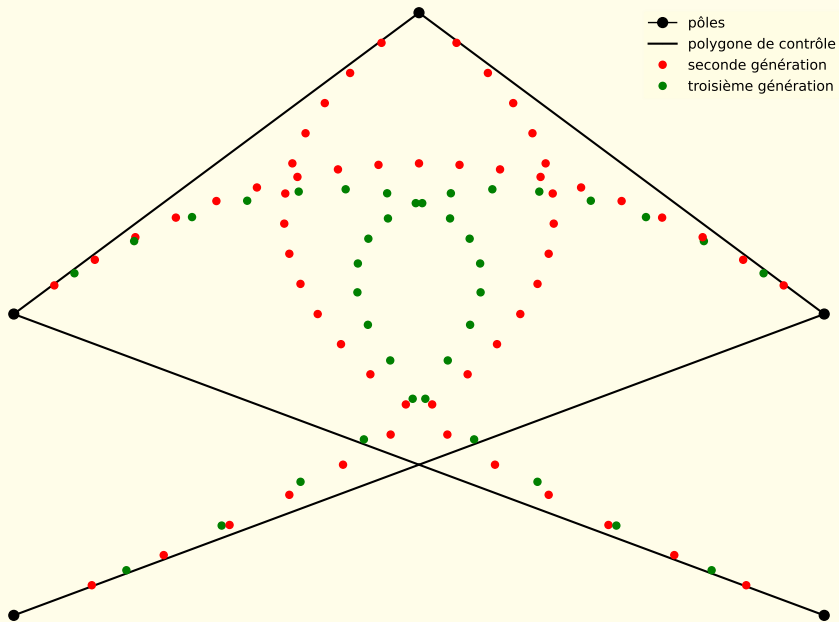
# 5 points de contrôle



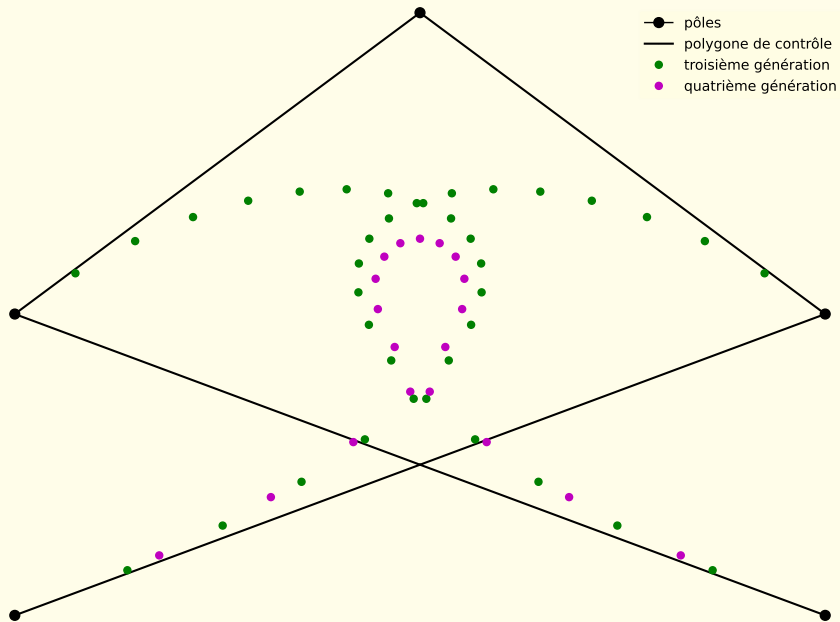
## 5 points de contrôle (ii)



# 5 points de contrôle (iii)

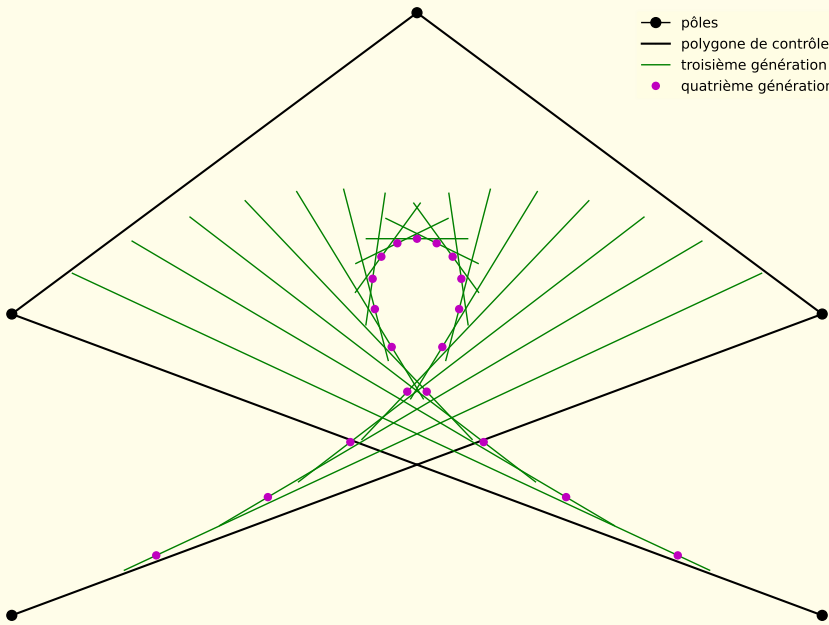


## 5 points de contrôle (iv)

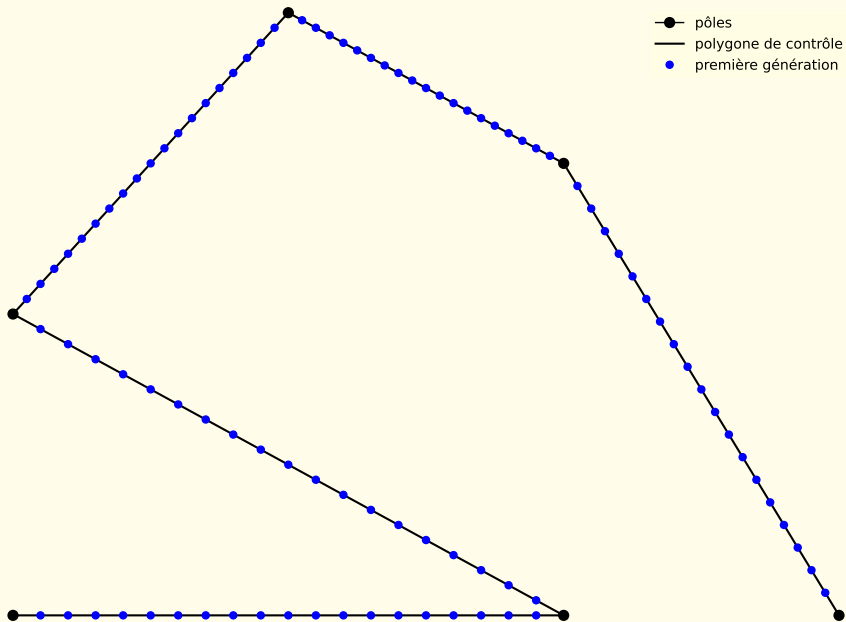


# 5 points de contrôle (v)

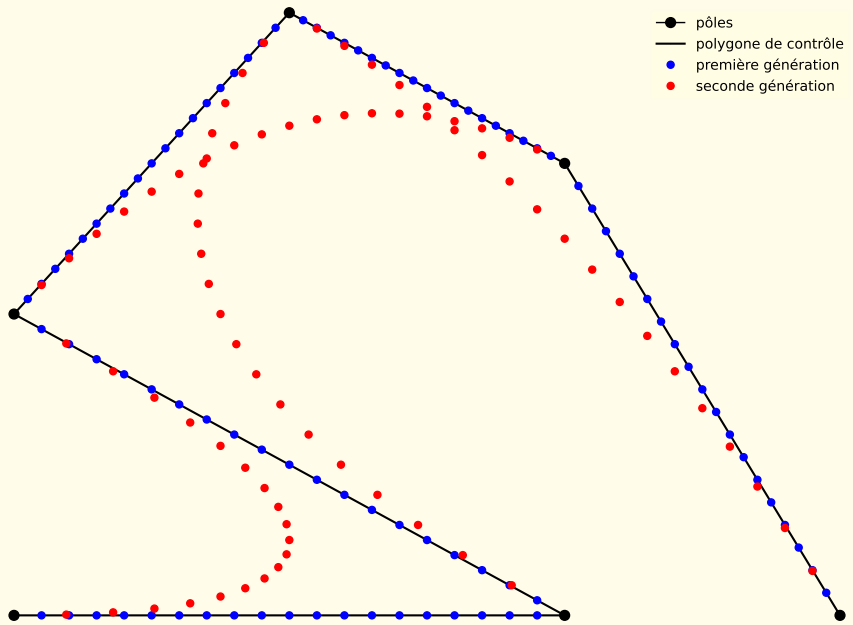
- pôles
- polygone de contrôle
- troisième génération
- quatrième génération



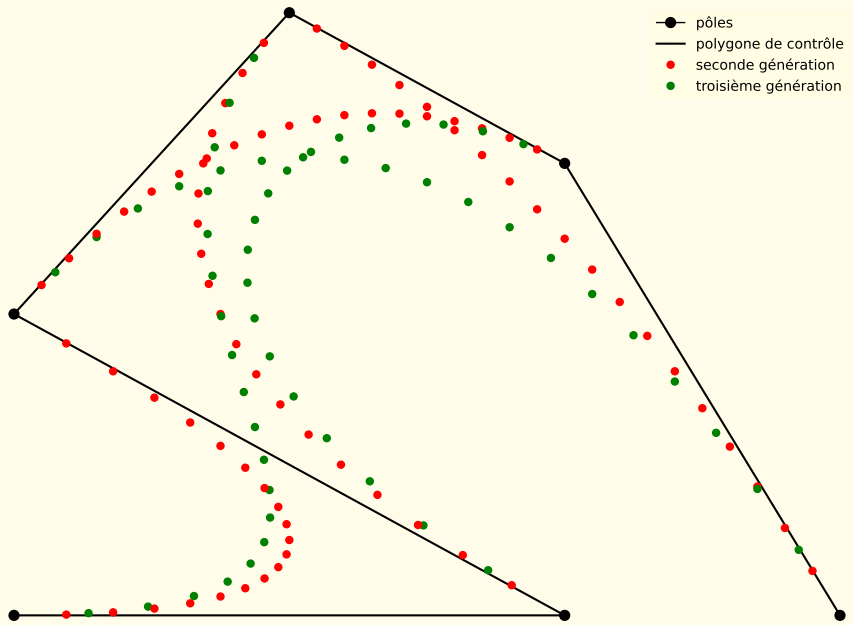
# 6 points de contrôle



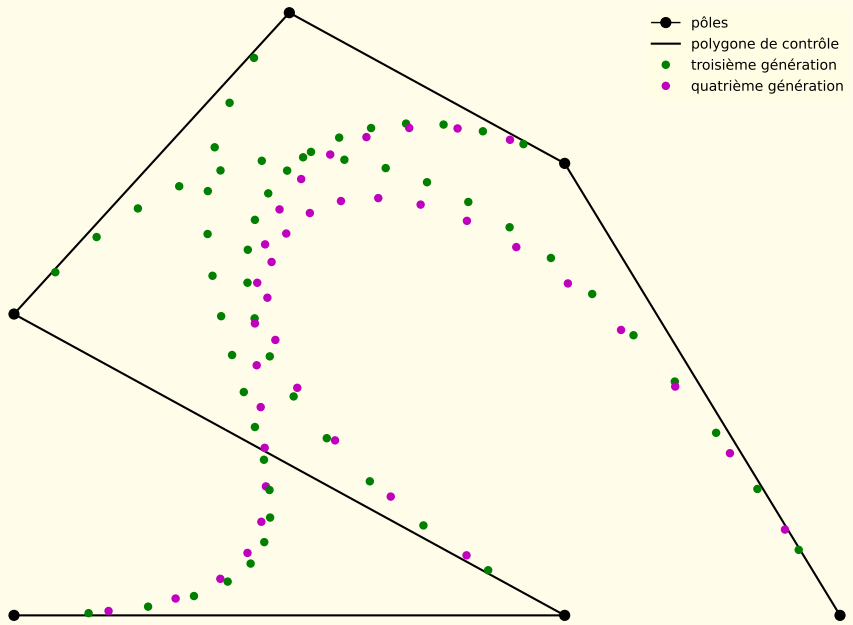
# 6 points de contrôle (ii)



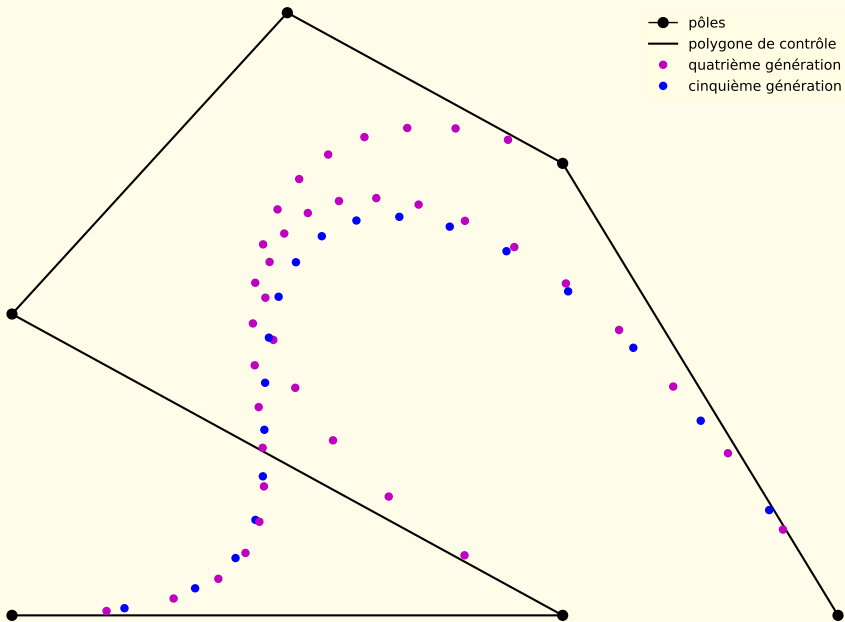
# 6 points de contrôle (iii)



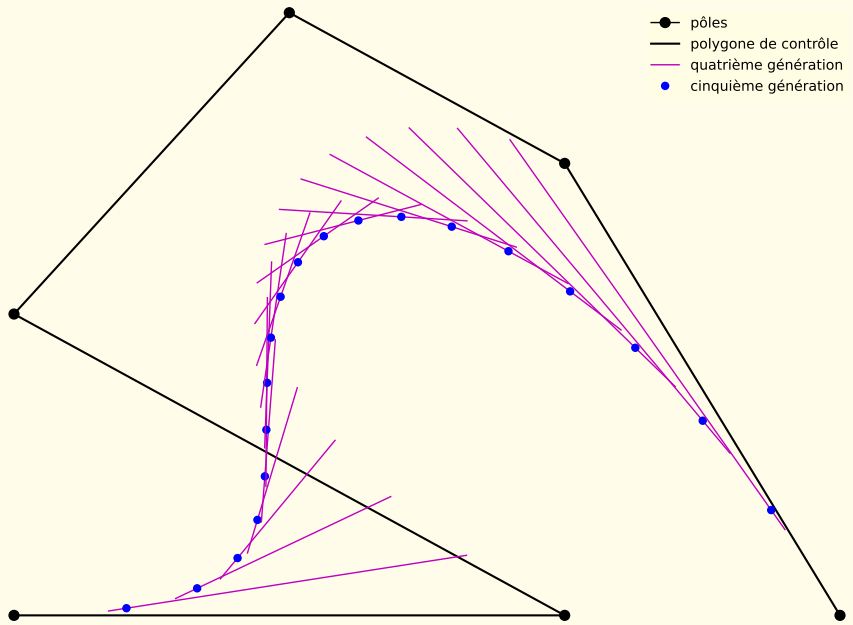
# 6 points de contrôle (iv)



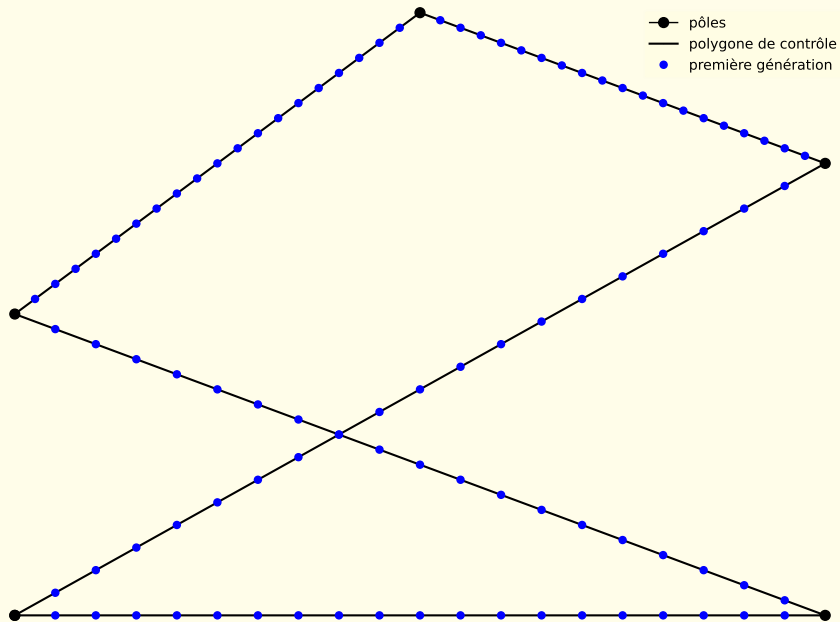
# 6 points de contrôle (v)



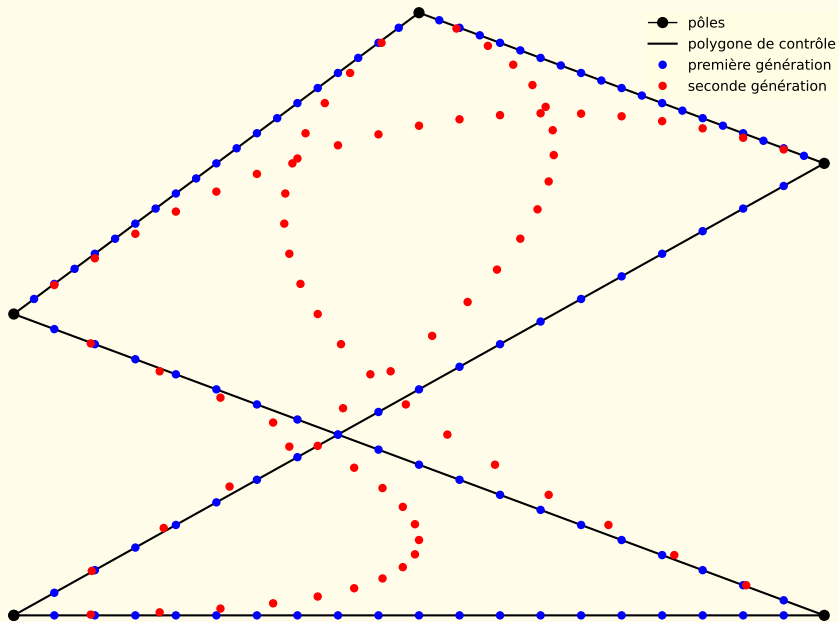
# 6 points de contrôle (vi)



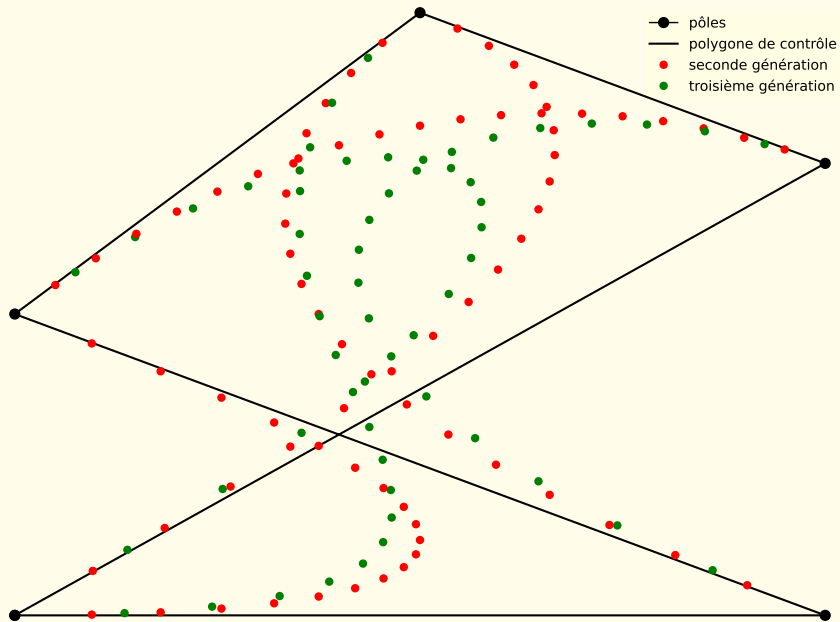
# 6 points de contrôle avec retour au point initial



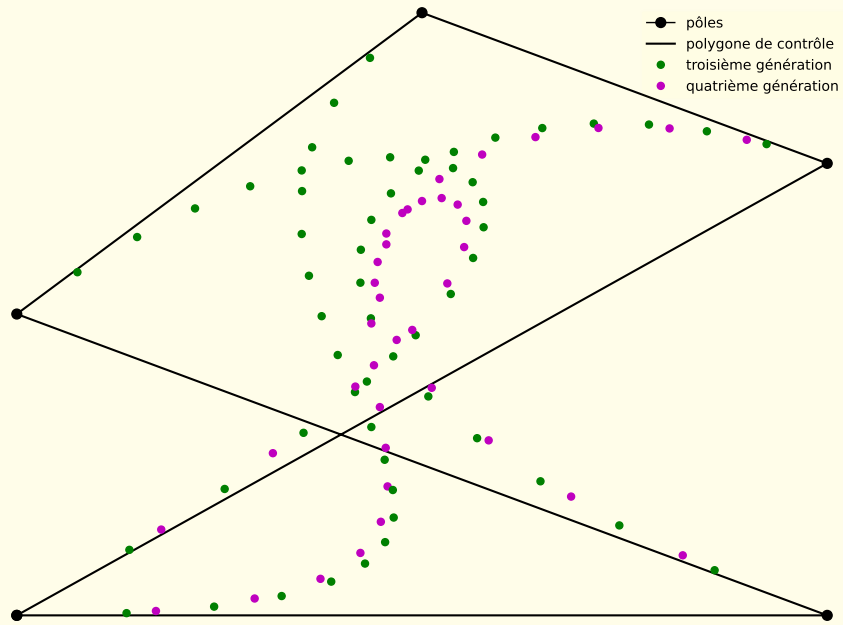
# 6 points de contrôle avec retour au point initial (ii)



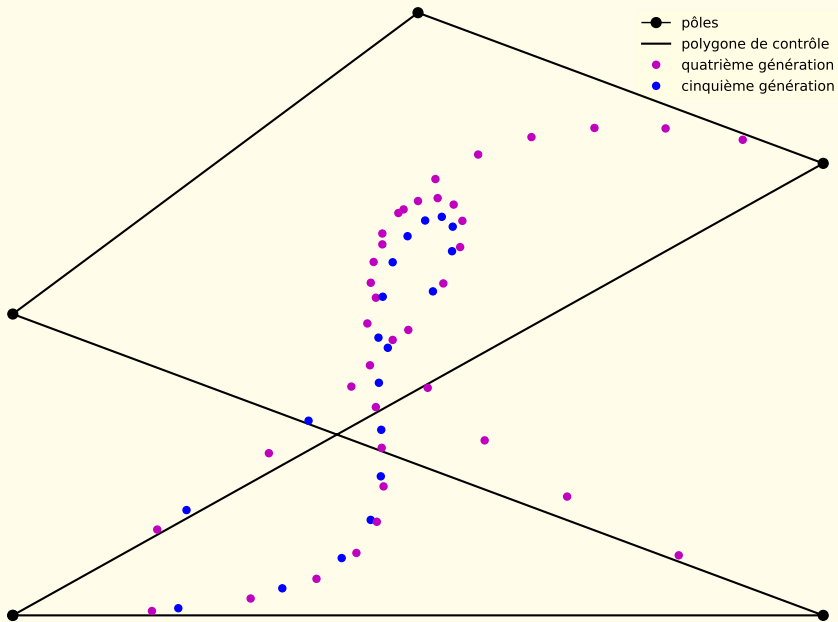
## 6 points de contrôle avec retour au point initial (iii)



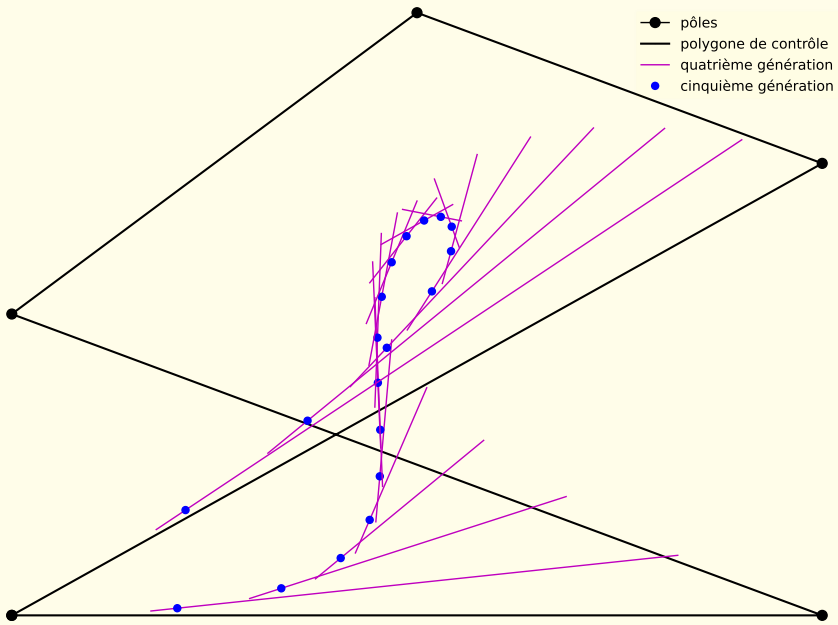
# 6 points de contrôle avec retour au point initial (iv)



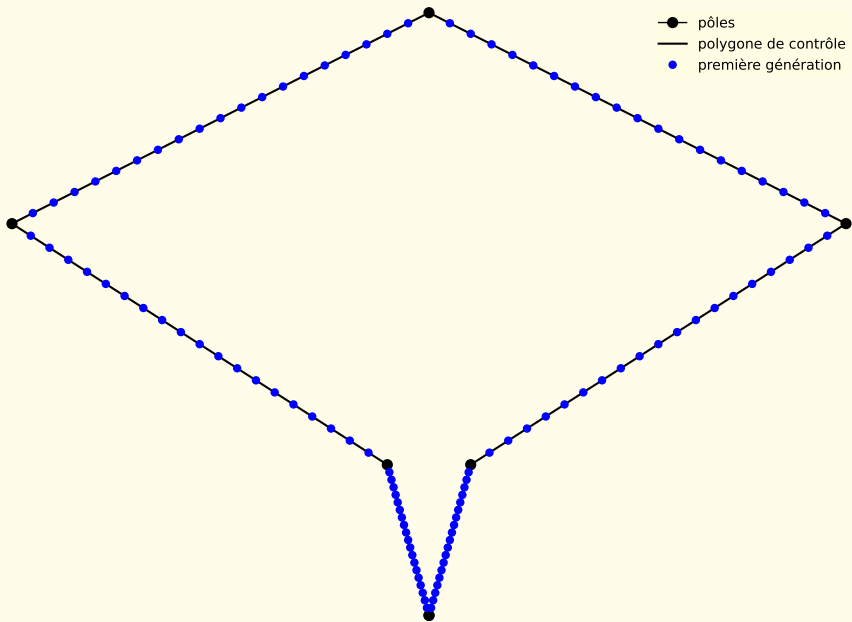
# 6 points de contrôle avec retour au point initial (v)



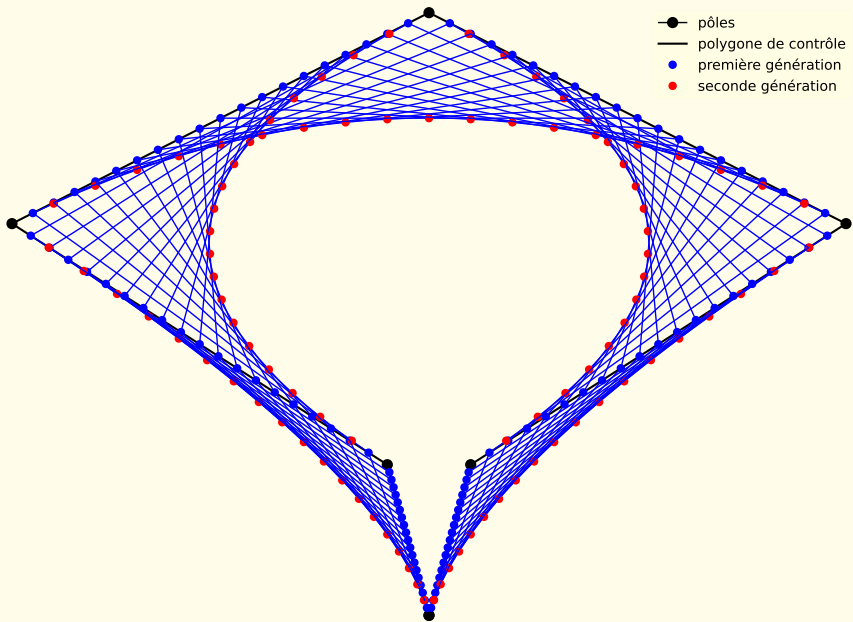
# 6 points de contrôle avec retour au point initial (vi)



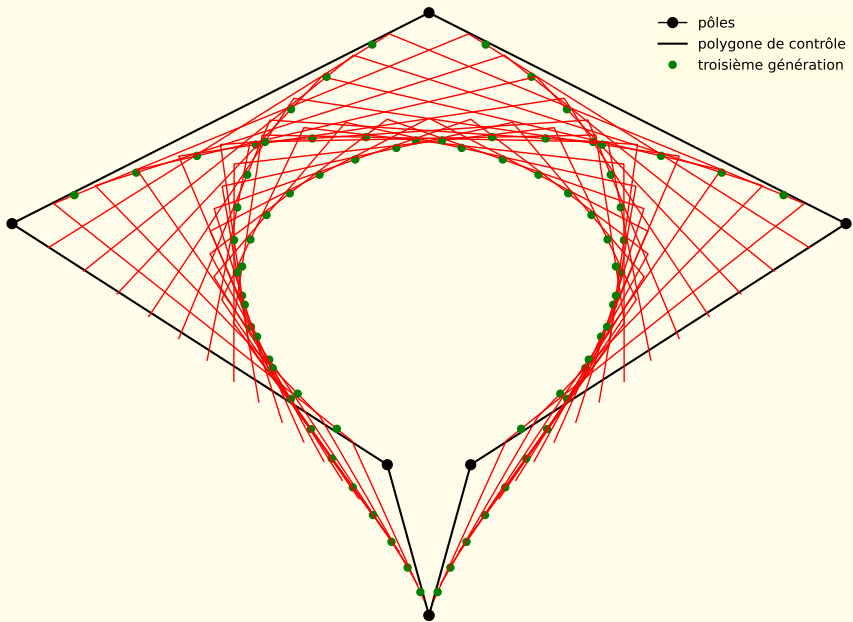
# 7 points de contrôle avec retour au point initial



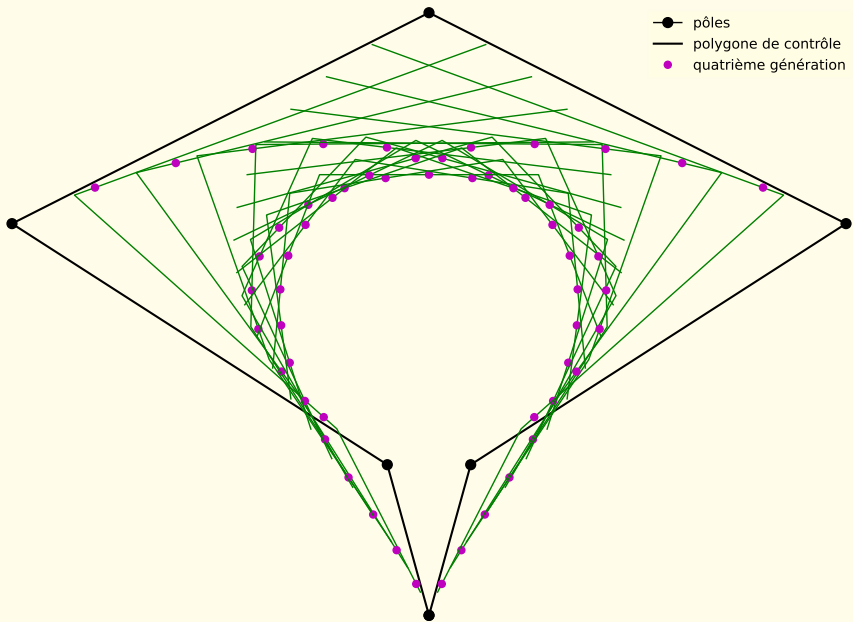
# 7 points de contrôle avec retour au point initial



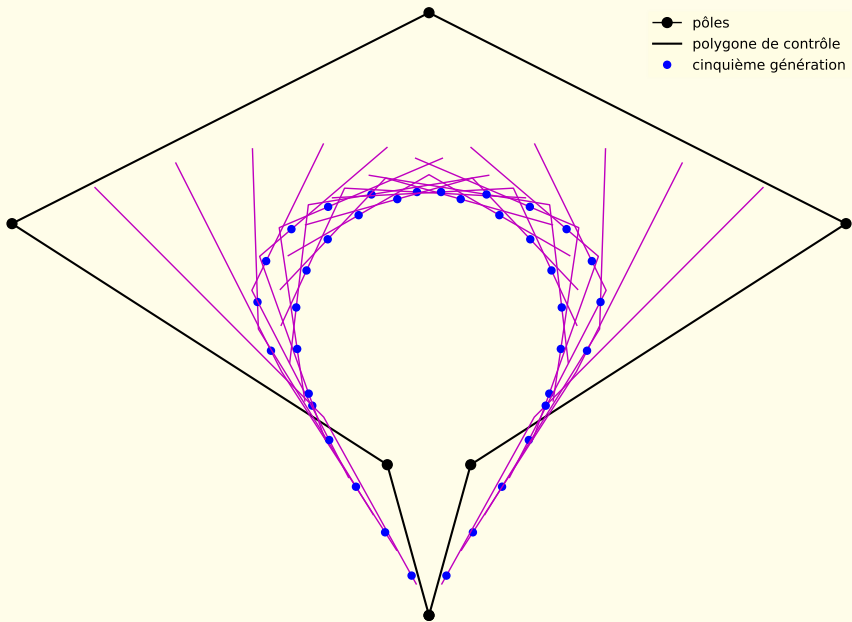
# 7 points de contrôle avec retour au point initial



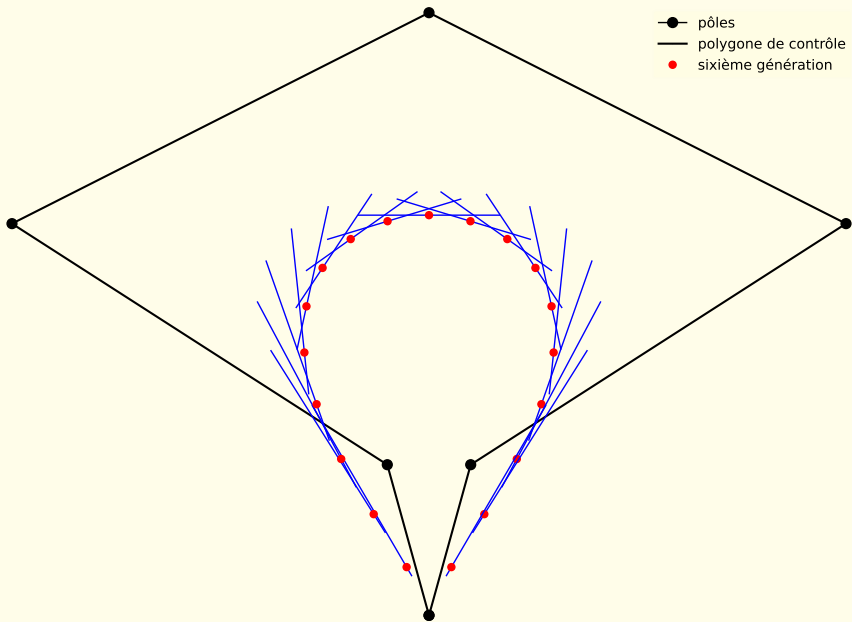
# 7 points de contrôle avec retour au point initial



# 7 points de contrôle avec retour au point initial



# 7 points de contrôle avec retour au point initial



# un dessin industriel entièrement fait à la machine, 1960 44

Jean-Pierre Poitou, *30 ans de CAO en France*, 1989  
cité par Maurice Zytnicki (2019)

système industriel chez Citroën, fin des années 60

modèles filaires et image de la GS,  
premier modèle Citroën dont la carrosserie  
a fait l'objet d'une description mathématique complète  
[Paul de Casteljau, 1998, communiqué à Andreas Müller]

Müller (2024)

séminaire d'histoire des techniques

animé par [Claudine Fontanon](#)

au Conservatoire National des Arts et Métiers à Paris

30 avril 1998

[Pierre Bézier](#) assiste au séminaire de [Paul Germain](#)

“j’ai servi la technique, c’est à dire la mécanique sans majuscule”

“il y a 3000 ans chez les Grecs, Athena n’avait pas besoin d’Héphaïstos”

12 février 1999

Pierre Bézier présent pour l’intervention de [Paul de Casteljou](#)

“Là je suis passé aux formes polaires, aux courbes à pôles

aujourd’hui bien connues”

[Paul de Casteljou]

“Y-a qu’à faire, disait le chef de service”

[Paul de Casteljou]

“il y a mieux : y-avait qu’à faire !”

[Pierre Bézier]

# Dassault aviation, 1960

lissage d'une courbe, Dassault systèmes, 1967

CATI, précurseur de Catia

Marcel Dassault, Dominique Calmels, Francis Bernard

Catia V1, 1982

Boeing adopte Catia, 1984

Catia V4, 1993

Catia V5, 1998

Catia V6, 2008

Jean-Marc Brun

(professeur émérite depuis 2003)

Michel Théron

(décédé en 2012)

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique  
et les Sciences de l'Ingénieur (CNRS, Orsay)

Jean-Marc Brun : thèse d'État en aérodynamique (1970)  
second sujet sur le "dessin automatique"

"Création, manipulation et visualisation de formes  
tridimensionnelles", thèse de 3e cycle de Michel Théron (1970)  
remplacer les courbes de Bézier par des "basic splines"

1979 : création de la société [Datavision](#), devenue Matra-Datavision

## système Euclid (ii)

accords avec Renault pour intégrer Euclid et Unisurf (1980)

rachat du logiciel Euclid par [Dassault Systèmes](#) (1998)

dans l'adhérence du système Euclid

### [Alain Massabo](#)

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (1964-1968)

développe "Systrid" chez [Aérospatiale Marignane](#) (1972)

utilisation de [bases de fonctions orthogonales](#)

"Think3" : vice-président recherche à Aix en Provence (2002)

### [Xavier Benveniste](#)

École Normale Supérieure (1974-1978)

thèse d'État sous la direction d'Arnaud Beauville (1984)

Variétés de type général de dimension 3

master en Computer Sciences, University d'Orsay, 1987.

crée une équipe chez [ComputerVision](#) ( $\approx$  1990)

embauche Jean-Marc Dupuy, mon maître en informatique

[Solidworks](#), directeur recherche et développement (depuis 2004)

# ne pas oublier les “Ricains” !

Steven Coons (1912-1979)

MIT, 1961

James C. Ferguson

Boeing, 1964

Robin Forrest

Cambridge University, 1972

Richard Riesenfeld

Utah, 1973

“Les courbes de Pierre Bézier ont redessiné le monde”

Peter Gabor (2007)

[John Warnock](#) (né en 1940)

crée le langage [PostScript](#) au sein de l'entreprise Adobe en 1983

les courbes “de type 1” du langage PostScript

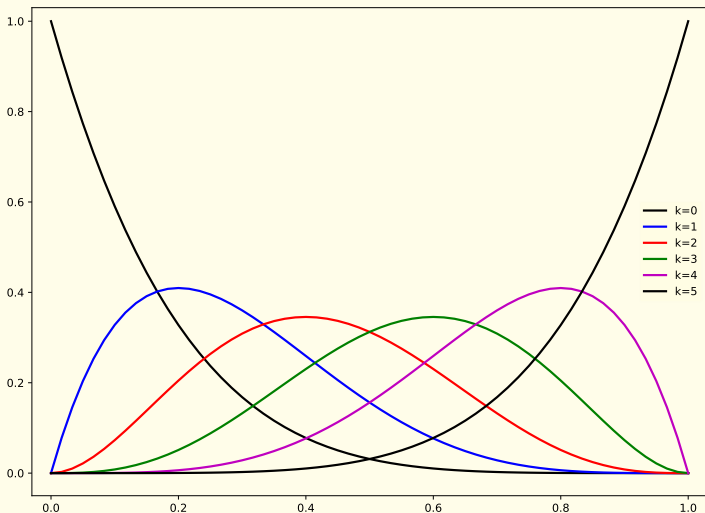
sont des courbes de Bézier de degré 3

[Donald Knuth](#) (né en 1938)

The [Metafont](#) book, Addison-Wesley, 1986

utilise des courbes de Bézier de degré 3

# polynômes de Sergei Bernstein (1880-1968)



base de Bernstein des polynômes de degré  $n$

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

# fonction discrète et polynômes de Bernstein

polynôme de “non-interpolation” de degré  $n$

paramétré par les  $(n + 1)$  “pôles”  $a_0, \dots, a_n$

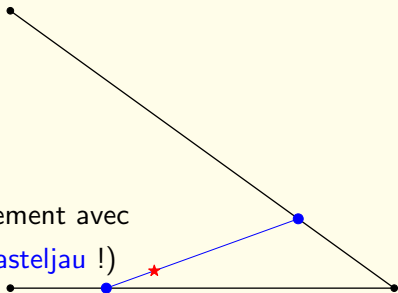
$$P_n(a_0, \dots, a_n; t) \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} a_k$$

relation classique sur les combinaisons de  $n$  objets :  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

on en déduit :

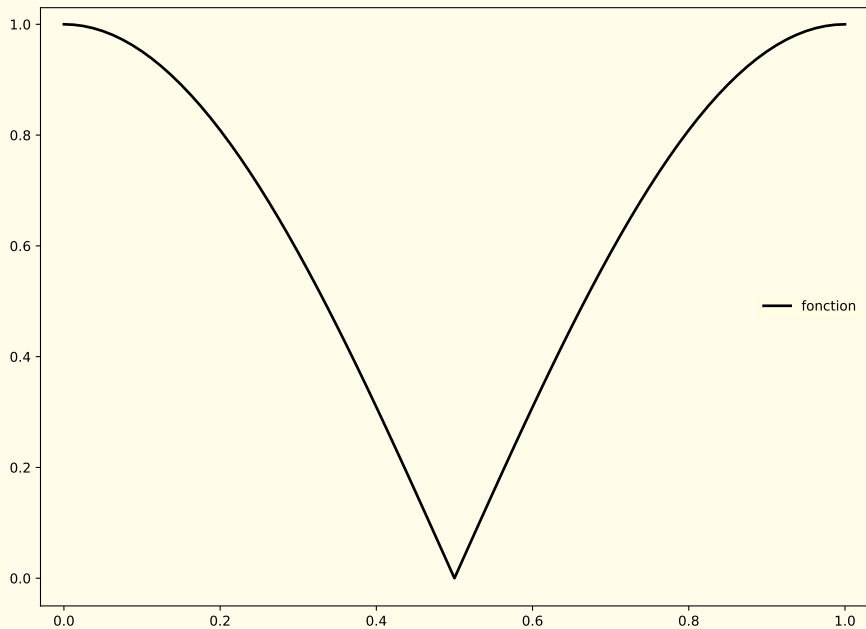
$$\begin{aligned} (1-t) P_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1}; t) \\ + t P_{n-1}(a_1, \dots, a_n; t) \\ = P_n(a_0, \dots, a_n; t) \end{aligned}$$

relation qui s'interprète géométriquement avec les barycentres (algorithme de [de Casteljau](#) !)

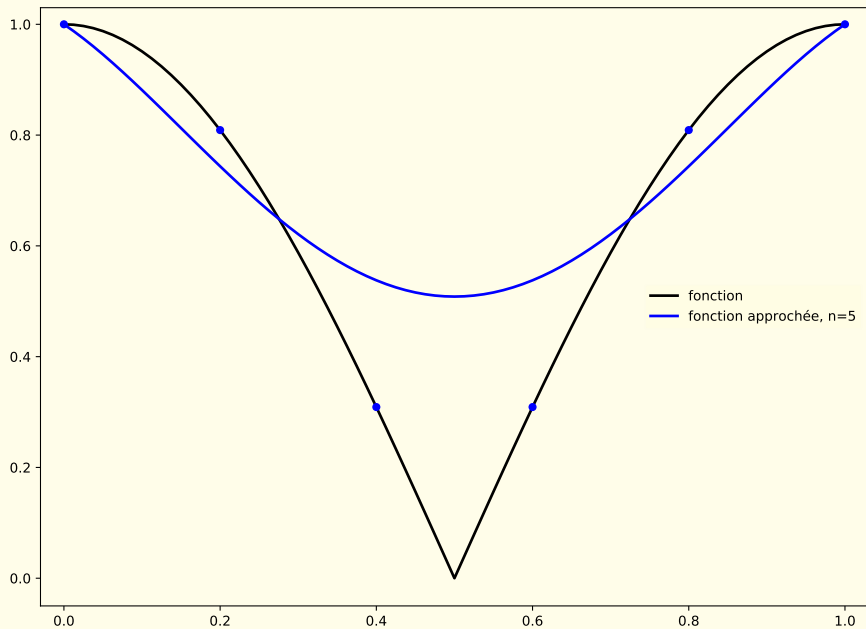


théorème de Weierstrass : toute [fonction continue](#) est limite uniforme d'une [suite de polynômes](#)

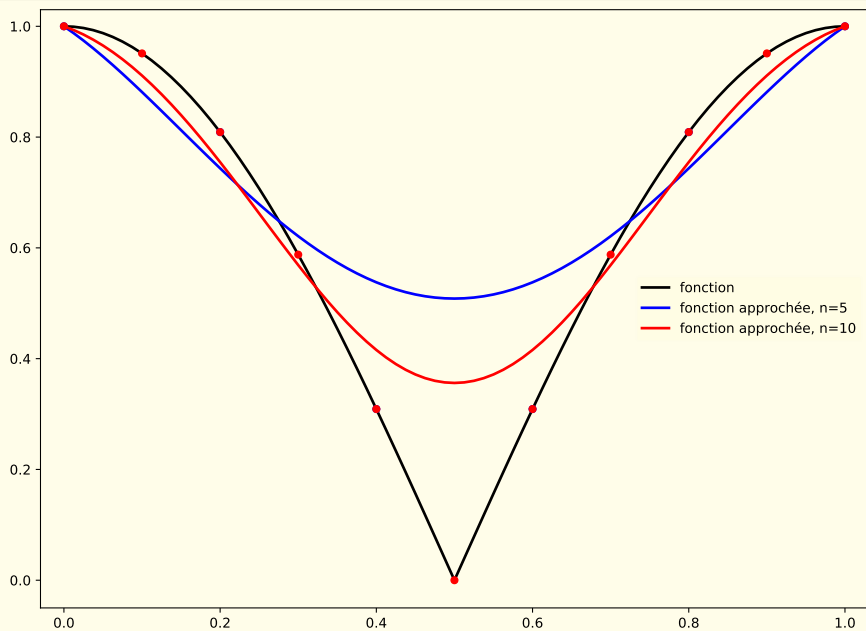
## théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein



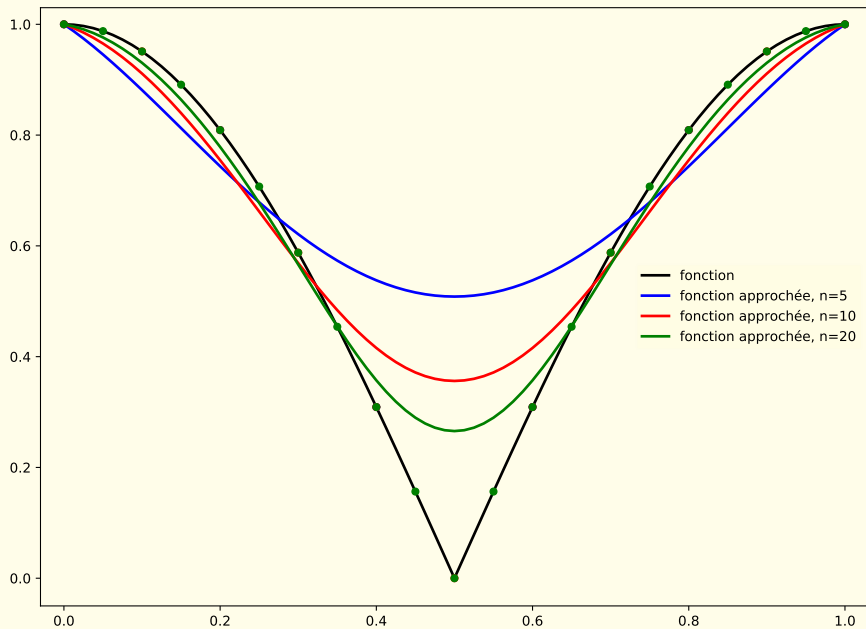
## théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein (ii) 54



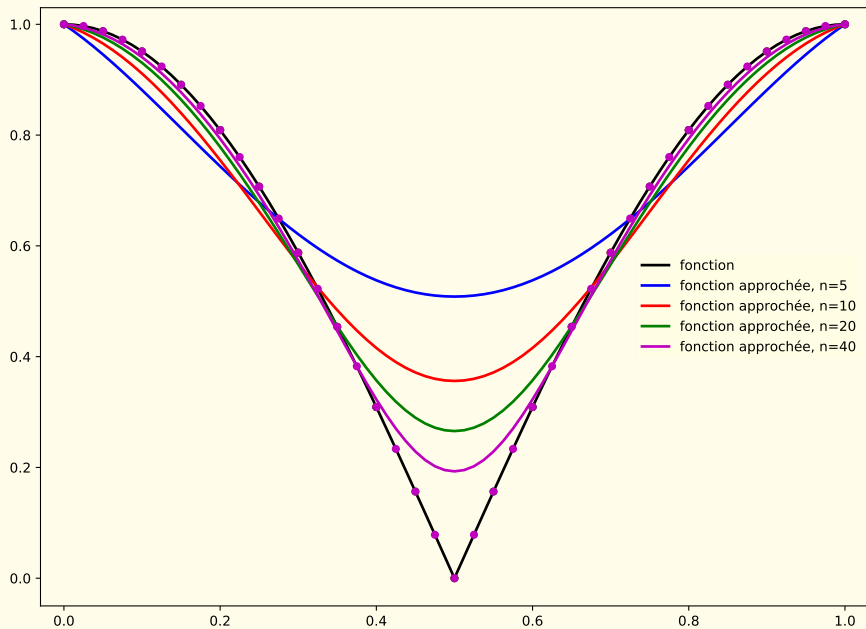
## théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein (iii) 55



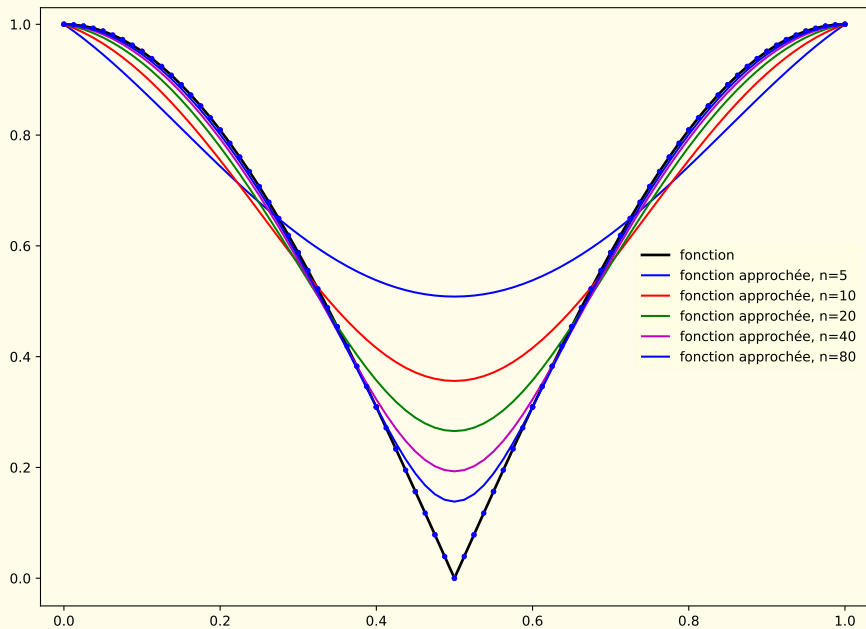
## théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein (iv) 56



## théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein (v) 57



## théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein (vi) 58



Pierre [Bézier](#) aimait à rappeler que  
quelques décennies après Serguei [Bernstein](#),  
il a fréquenté l'École Supérieure d'Électricité

# aller plus loin que les polynômes !

splines, B-splines, Non Uniform Rational Basic Splines ([NURBS](#))

## surfaces

carreaux de Bézier, triangle de De Casteljaou

quelle [régularité](#) lors du raccord de surfaces ?

# quelques livres

Pierre Bézier

Utilisation des courbes et des surfaces

Hermes, 1988

Paul de Casteljaou

Formes à pôles

Hermes, 1985

Pierre Bézier

The mathematical basis of the Unisurf CAD system

Butterworth, 1986

Paul de Casteljaou

Le lissage

Hermes, 1990

## quelques livres (ii)

Pierre Bézier

Emploi des machines à commande numérique

Eyrolles, 1970

Pierre Bézier

Courbes et surfaces

Hermes, 1986

Paul de Casteljaou

Les quaternions

Hermes, 1987

Alain P. Michel

Pierre Bézier - La discrète renommée mondiale d'un ingénieur

Classiques Garnier, 2025

Pierre Bézier

*Essai de définition numérique des courbes et surfaces expérimentales*

Thèse de doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie, 1977

Carl De Boor

*A practical guide to splines*, Springer, 1978

Jean-Charles Fiorot, Pierre Jeannin

*Courbes et surfaces rationnelles*, Masson, 1989

Jean-Pierre Poitou

*Trente ans de CAO en France: ou les petits enfants*

*de Gaspard Monge*, Hermès, Paris, 1989

Gerald Farin

*Courbes et surfaces pour la CAO ; conception géométrique*

*assistée par ordinateur*, Masson, 1990

Jean-Jacques Risler

*Méthodes mathématiques pour la CAO*, Masson, 1991

David F. Rogers

*An introduction-to-nurbs, with historical perspective*

Morgan Kaufmann, San Francisco, 2000

Alberto Sdegno

“On the origins of the theory of the digital drawing. In memory of Steven A. Coons (1912-1979)

*Elogio della teoria*, pages 333-341, 2012.

Véronique Boutet, Jonathan Godin, Alexis Langlois-Rémillard

“Excursion typographique : la matrice des fontes”

*Accromath*, numéro 12, pages 26-29, 2017.

Maurice Zytnicki

“Un regard de sociologue sur la CAO,  
entretien avec Jean-Pierre Poitou”

*Nacelles*, volume 6, 2019

### Alain P. Michel

“La carrière de Pierre Bézier chez Renault” (1933-1975)  
*Artefact*, volume 13, pages 213-242, 2021

### Andreas Müller

“A tour d'horizon of de Casteljaou's work”  
*Computer Aided Geometric Design*, volume 113,  
article 102366, 2024

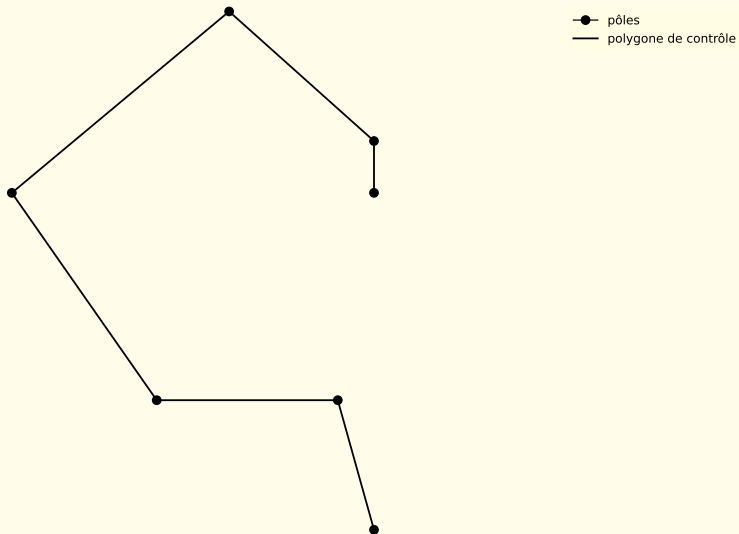
<https://aero-modelisme.com/histoire-catia-dassault-systemes/>

<https://blog.typogabor.com/2007/09/15/les-courbes-de-pierre-bezier-ont-redessine-le-monde/>

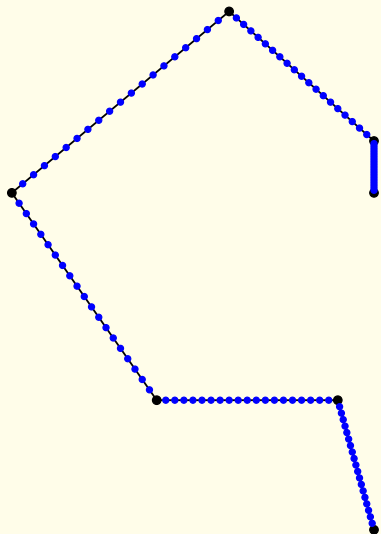
<https://histoire3d.siggraph.org/>

<https://www.machine-outil.com>

## une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !

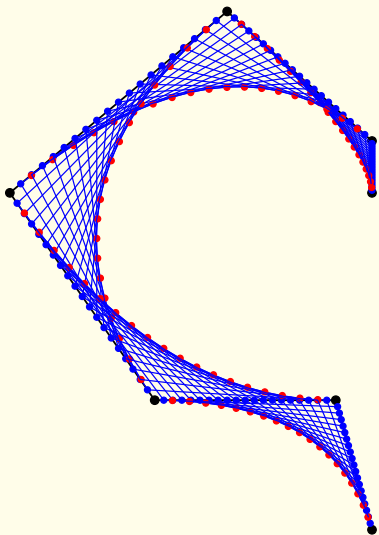


## une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !



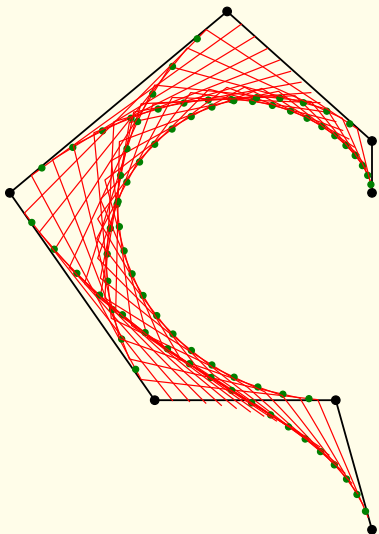
- pôles
- polygone de contrôle
- première génération

# une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !



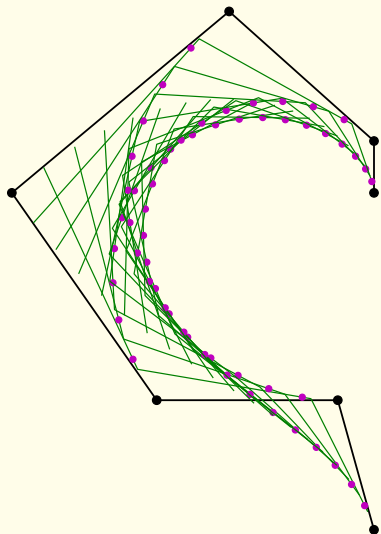
- pôles
- polygone de contrôle
- première génération
- seconde génération

# une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !



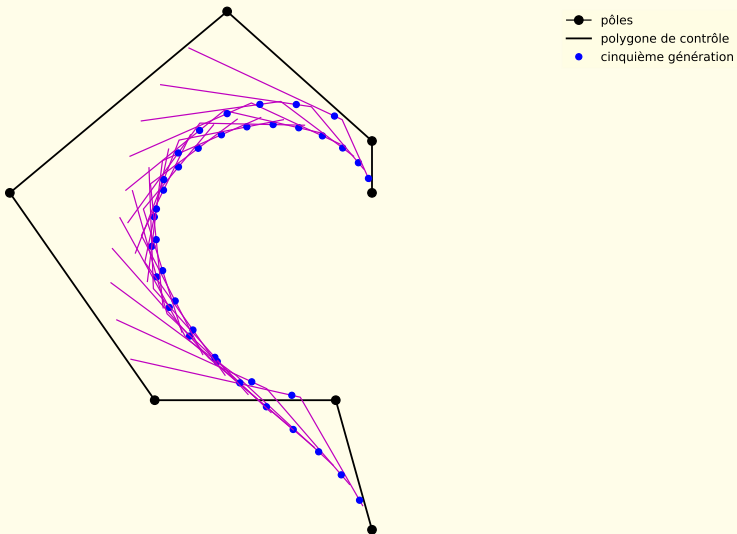
- pôles
- polygone de contrôle
- troisième génération

# une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !

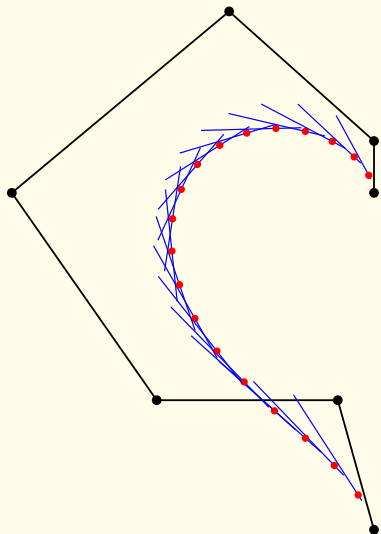


- pôles
- polygone de contrôle
- quatrième génération

# une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !

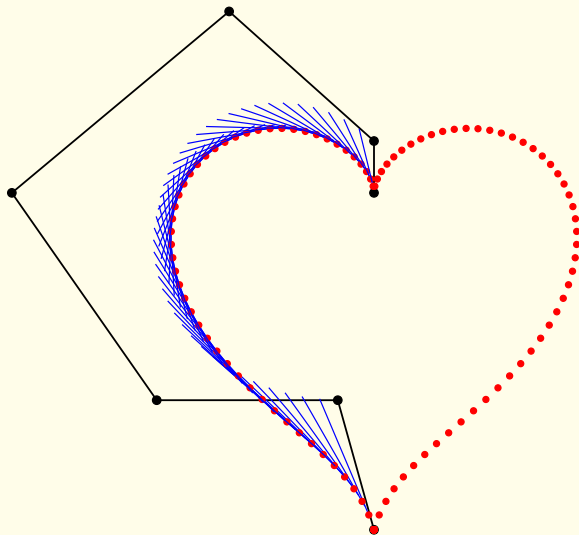


# une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !



- pôles
- polygone de contrôle
- sixième génération

# une petite symétrie...



merci de votre attention !

