

Polynômes de Bernstein, courbes de Bézier et algorithme de De Casteljau

François Dubois *

café Aïre-Ona, 1, rue du Docteur Goujon, Paris 12e

jeudi 13 novembre 2025

* co-animateur du Kafemath

une histoire parisienne ?

2



“l'École Normale rencontre rarement les Arts et Métiers”

Régis Debray

Conservatoire National des Arts et Métiers, 1994



Renault et Citroën



Pierre Bézier
1910-1999



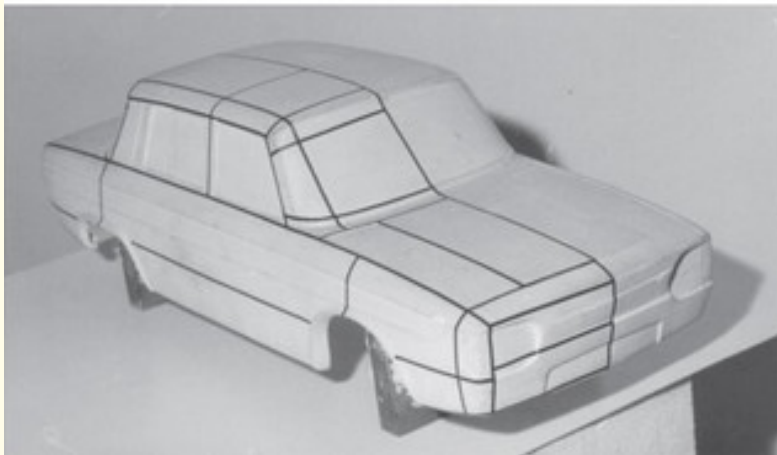
Paul de Faget de Casteljau
1930-2022

systeme Unisurf de Renault, 1960



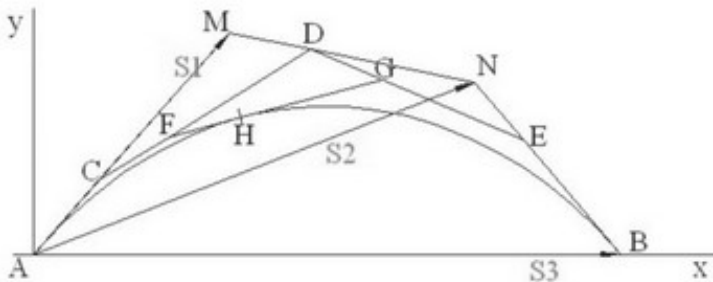
conception de la Renault 8, 1960

5



Henri Lagrange, Renault histoire, 2008

algorithme de de Casteljau vu par l'équipe Renault, 1963 6

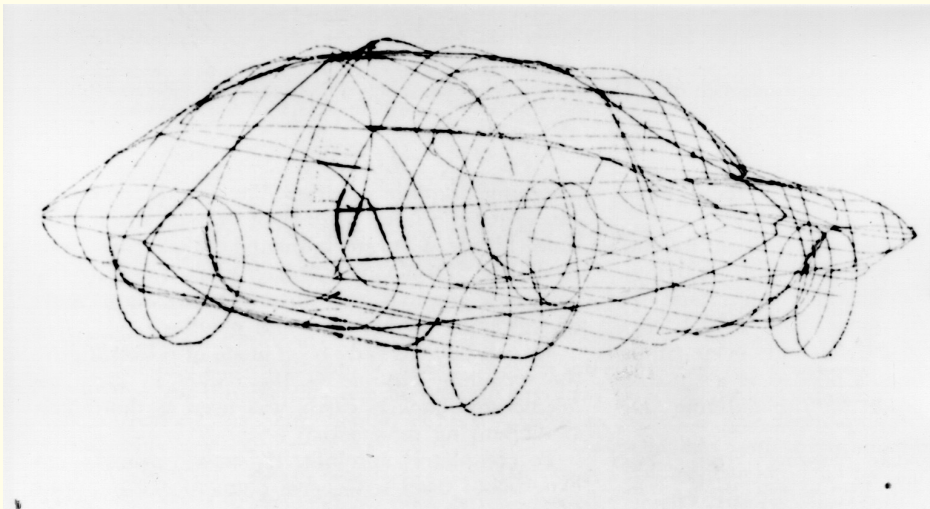


Algorithme de Paul de Casteljau

Henri Lagrange, Renault histoire, 2008

conférence de Pierre Bézier, 1964

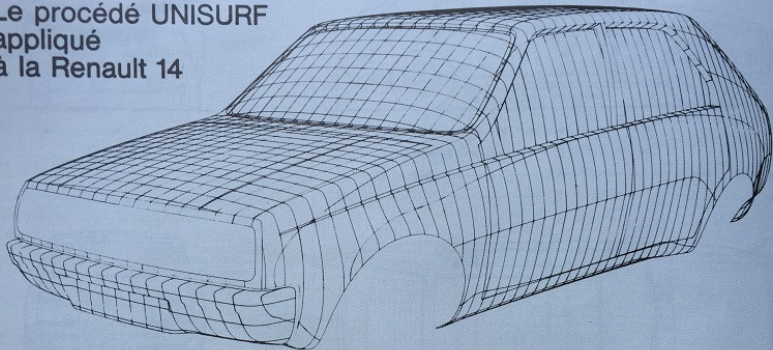
7



Renault 14, 1978

8

Le procédé UNISURF appliqué à la Renault 14



La forme extérieure de la carrosserie de la Renault 14 a été entièrement numérisée et dessinée par le Bureau d'Études Carrosserie de la D.R.D., avec utilisation du procédé UNISURF. Ce procédé permet de réaliser un découpage géométrique de la carrosserie en surfaces élémentaires, appelées « carreaux ». Ces surfaces élémentaires, facilement mathématisables, sont définies par des éléments que l'on stocke dans la mémoire de l'ordinateur. Celui-ci fonctionne en unité de calcul et peut, simultanément ou en différé, commander une table à dessiner automatique (qui a fourni la perspective cavalière reproduite ici) ou une fraiseuse de matériaux tendres pour la réalisation de maquettes.

Les applications du procédé UNISURF, également développé par la SOFERMO, ne sont pas limitées à la carrosserie automobile (1). Il connaît dans ce domaine, au fur et à mesure que nous étudions de nouveaux véhicules, un développement rapide. C'est ainsi qu'avec la Renault 14, c'est l'ensemble de la carrosserie, et non plus des éléments, qui a bénéficié de ce procédé d'avant-garde.

(1) Voir dans « Renault-Magazine » n° 82, la réalisation de la maquette du bateau d'Alain Colas par la SOFERMO.

Pierre Bézier ou nul n'est prophète en son pays...

“Si votre truc était si bien que cela,
il y a longtemps que les Ricains l'emploieraient”

[...] le gadzarts attribue son développement mathématique à un savant illustre, mais dont le nom n'avait pas laissé de traces dans l'histoire des sciences :

“Il est toujours utile, à qui veut donner l'impression d'être sérieux, de se placer sous l'égide d'un grand ancêtre ;

je mis donc ces fonctions sous l'invocation d'un professeur que je baptisai Onésime Durand.”

[...] c'est Détroit qui est en “retard” sur Billancourt. Pierre Bézier s'amuse de cette inversion du modèle à suivre. Alors qu'à Billancourt la direction lui oppose le contre-exemple des “Ricains”, ses collègues américains lui auraient signifié un agacement inverse :

“You see, Peter, the trouble is that next time we propose something to our topmen, they will say: if your gimmick is so cute, how come they don't already use it in Biancort ?”

algorithme de De Casteljau, 1959

10

Paul de Casteljau, "[Courbes à pôles](#)", enveloppe Soleau 40.040,
 document P 2108, INPI Paris ; transmise par le département
 Outillage Méthodes Calcul de la S.A. André Citroën, [1959](#)

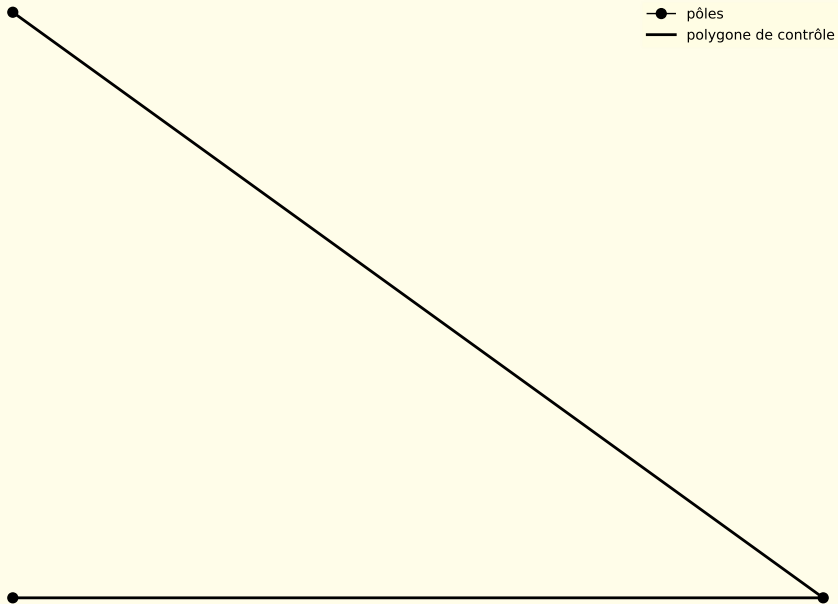
Paul de Casteljau, "[Courbes et Surfaces à Pôles](#)",
 document P.4147, registered with the bailiff, written in the
 department Outillage Méthodes Calcul
 at S.A. André Citroën, [1963](#)

références données dans l'article d'Andreas Müller (2024)

les enveloppes Soleau sont détruites au bout de 10 ans
 [information transmise par Laura Galibert,
 juriste à l'Institut National de la Propriété Industrielle]

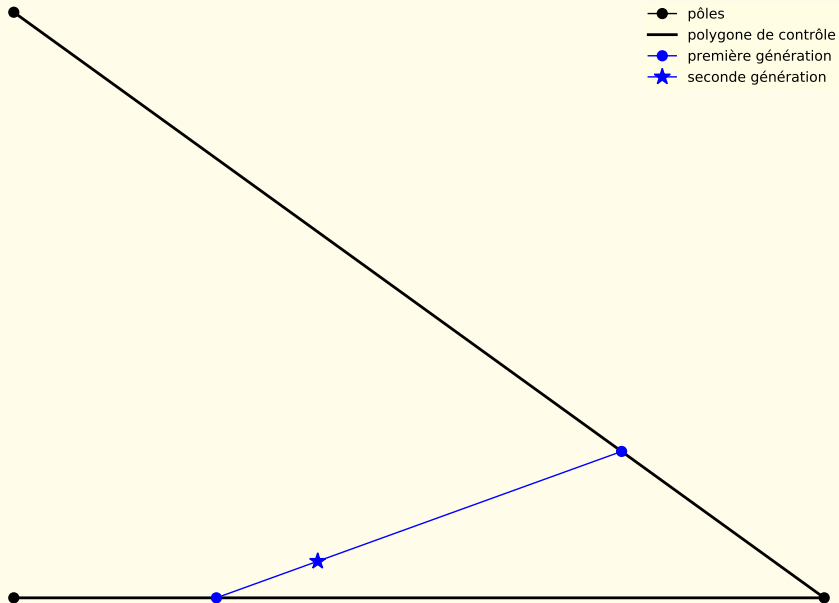
courbes à pôles, 1959

11



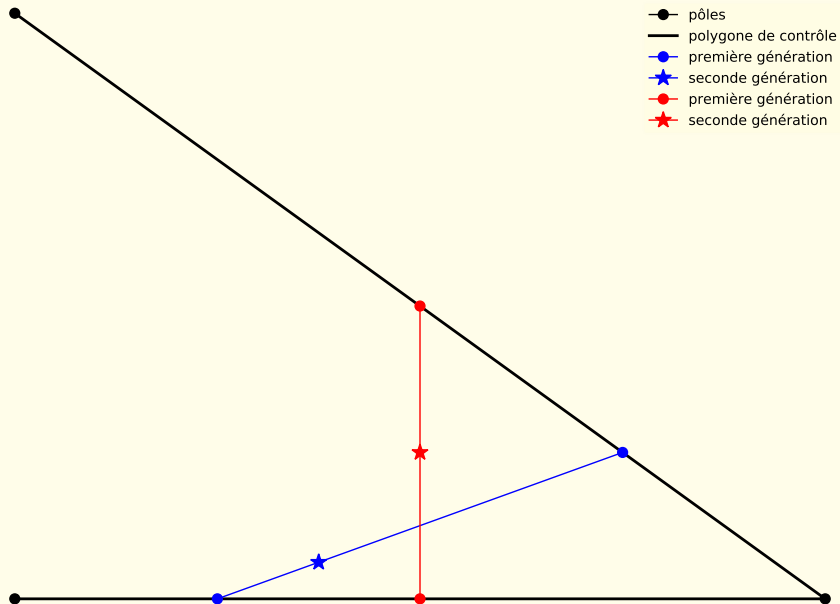
point courant avec sa tangente

12



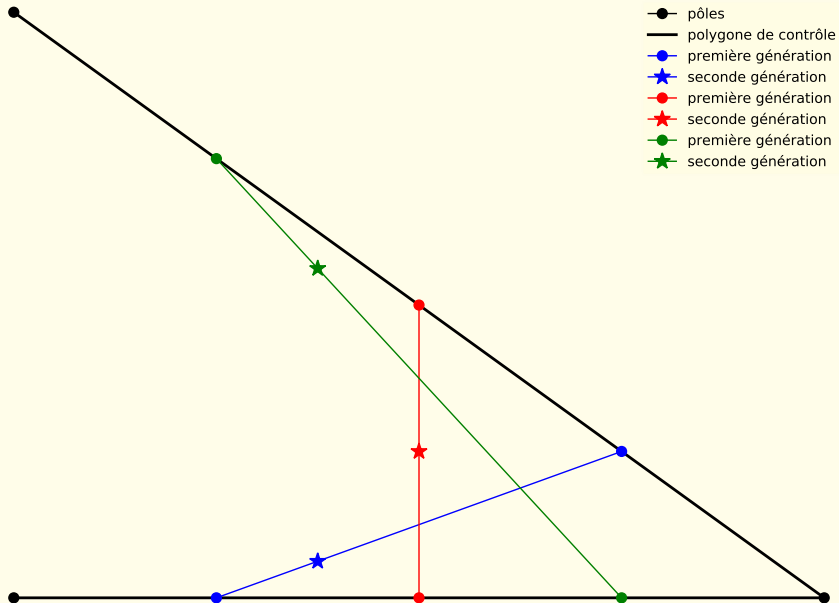
un second point courant avec sa tangente

13



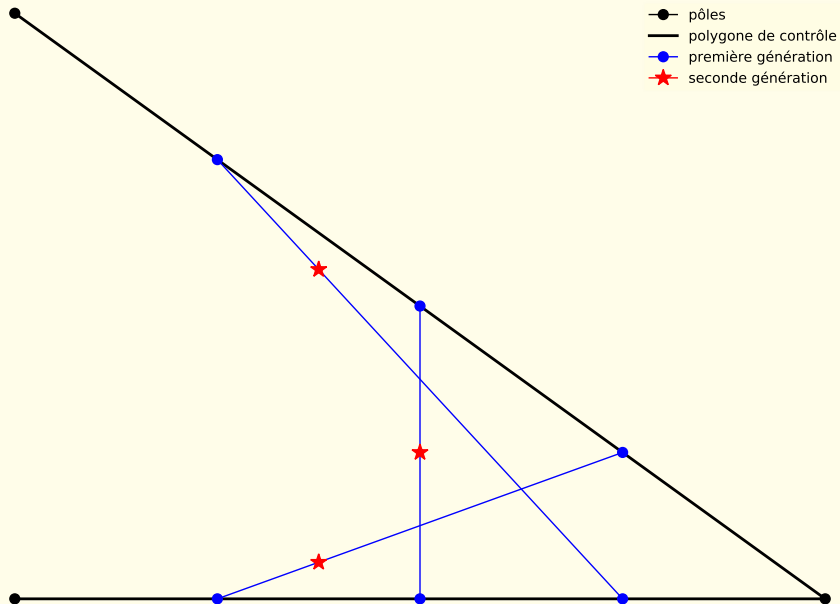
un troisième point...

14



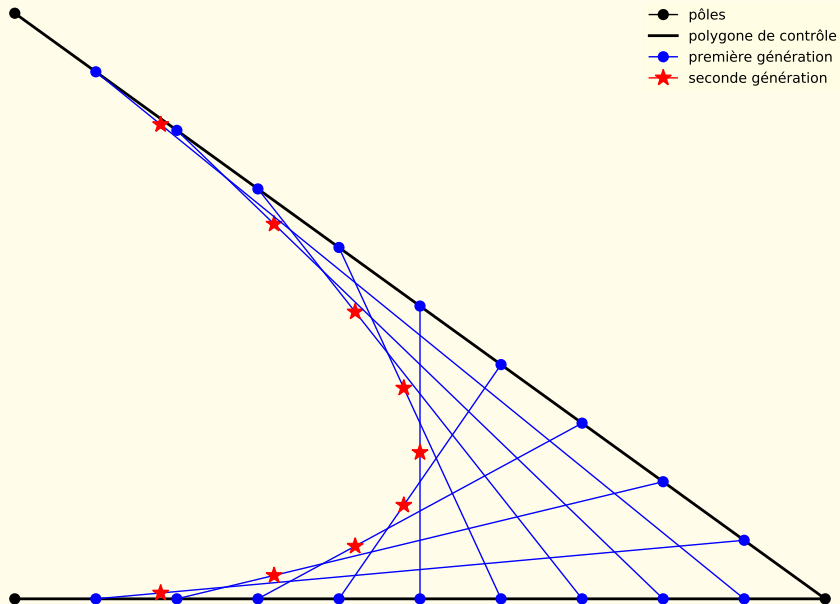
changement des couleurs...

15



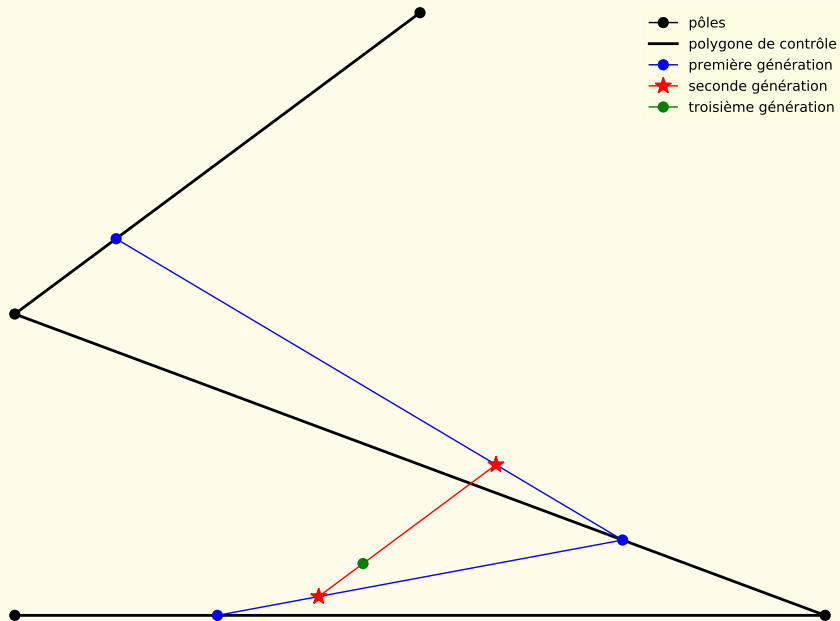
avec plus de points, la cône est une enveloppe

16



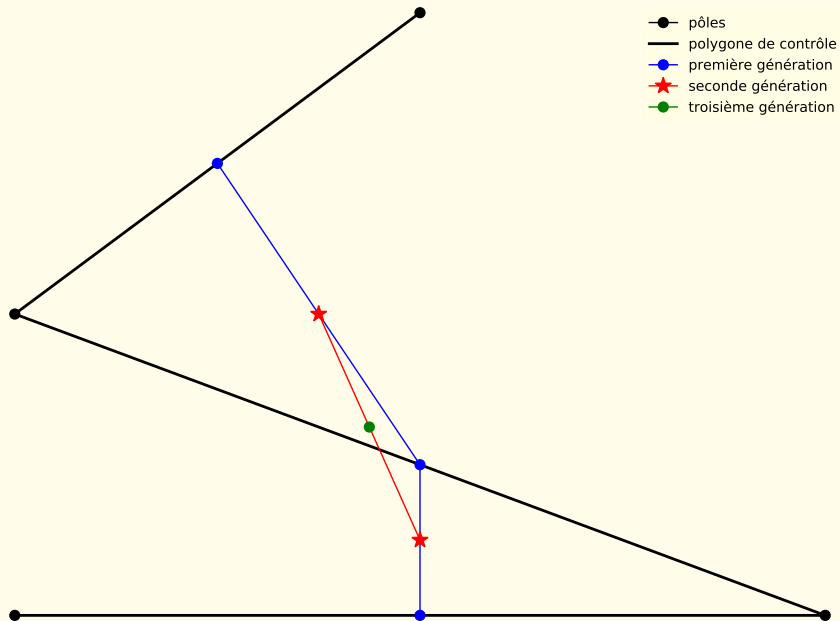
construction dans le cas de 4 points de contrôle

17



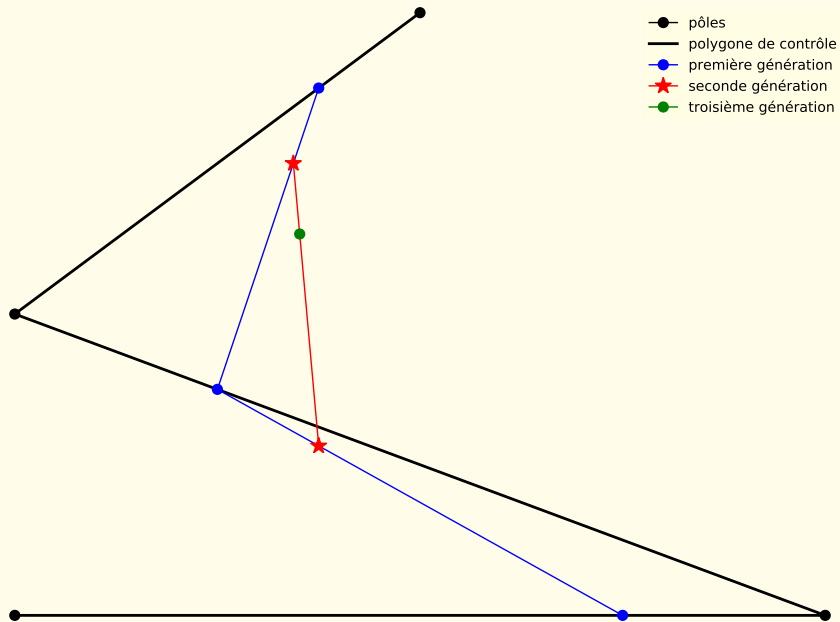
un second point dans le cas de 4 points de contrôle

18



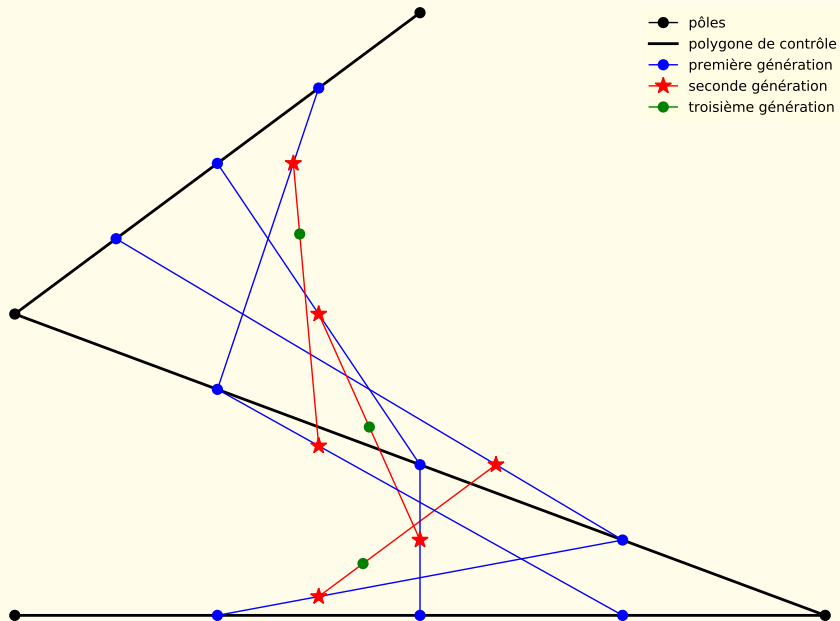
un troisième point dans le cas de 4 points de contrôle

19



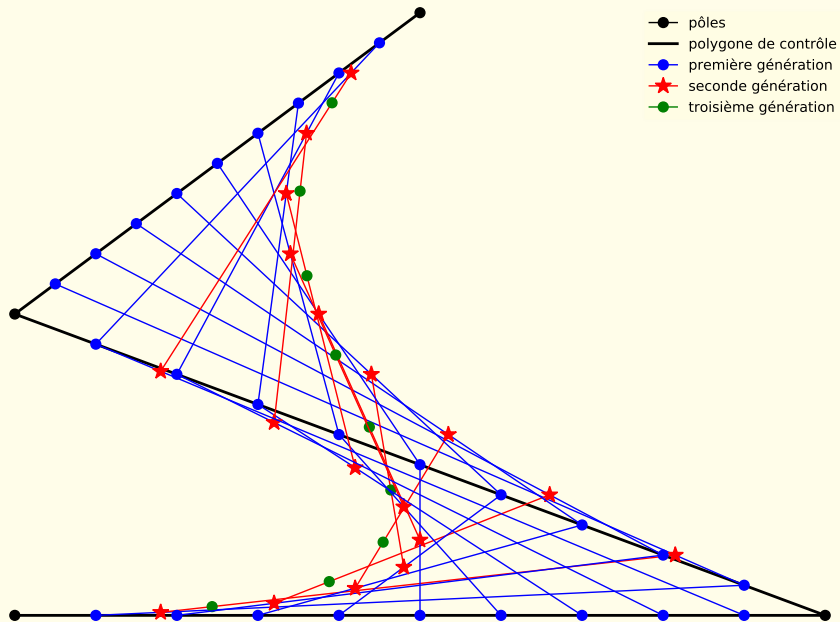
construction dans le cas de 4 points de contrôle

20



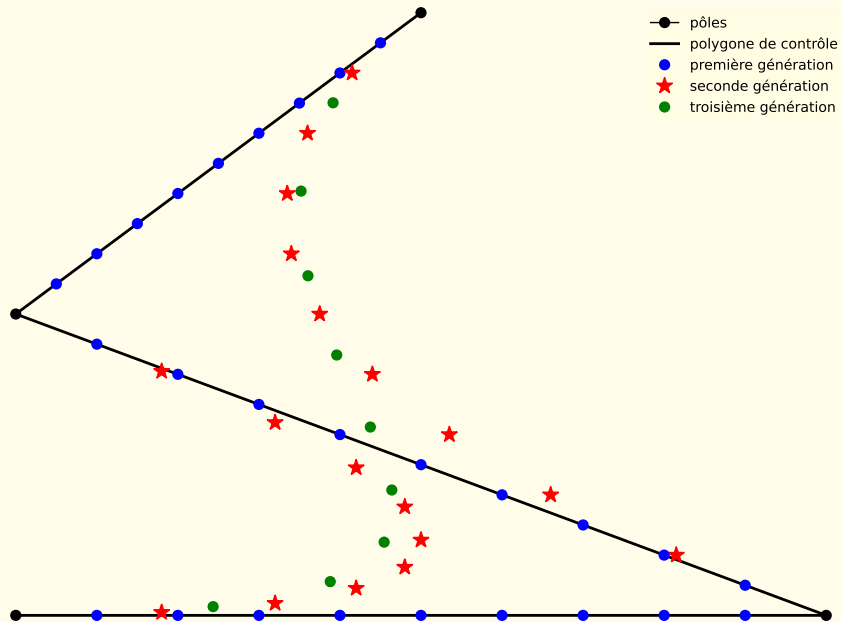
4 points de contrôle avec plus de sommets

21



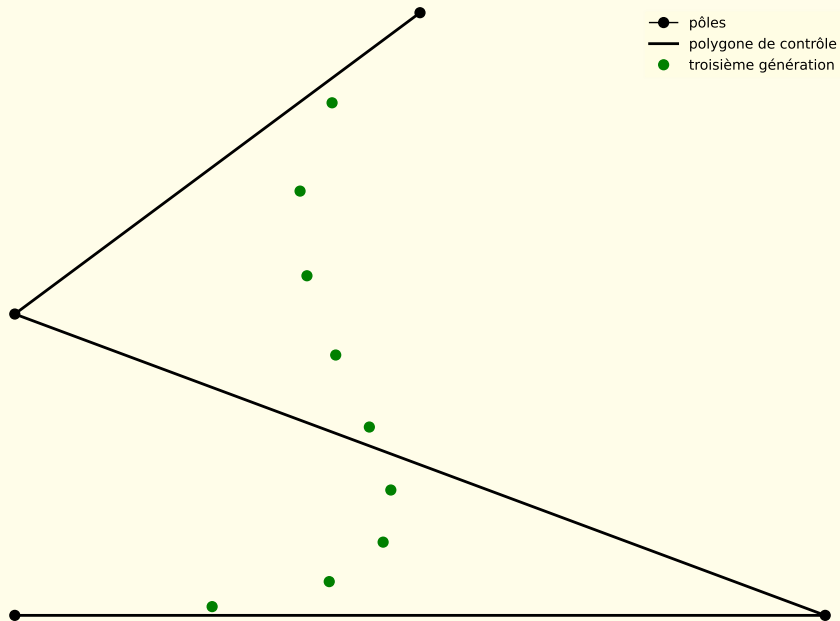
on enlève les traits de construction

22

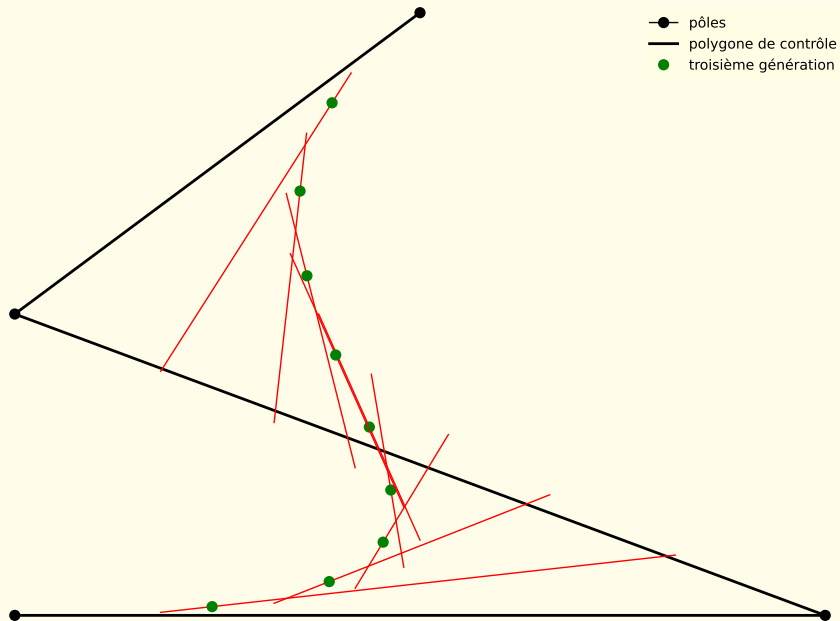


on enlève les points de construction

23

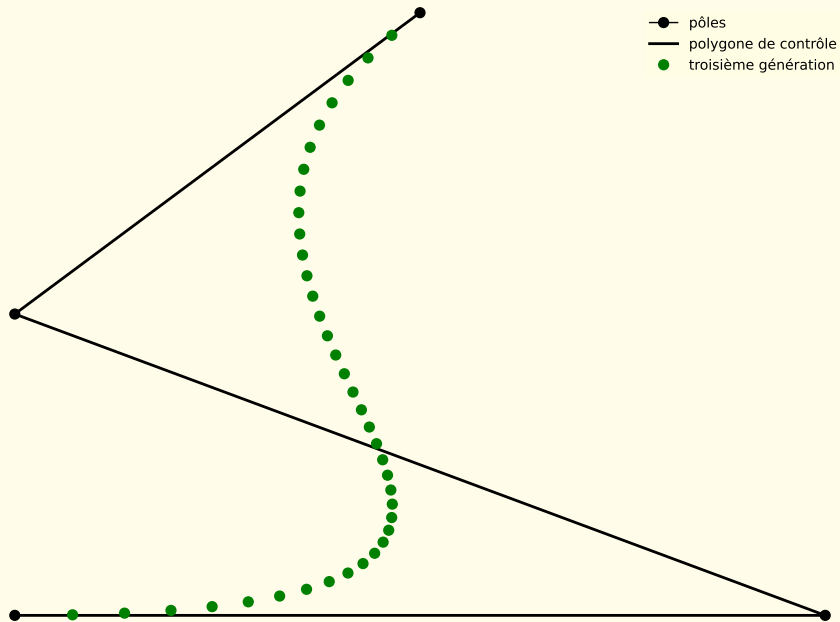


avec les tangentes en gardant l'avant-dernière génération 24



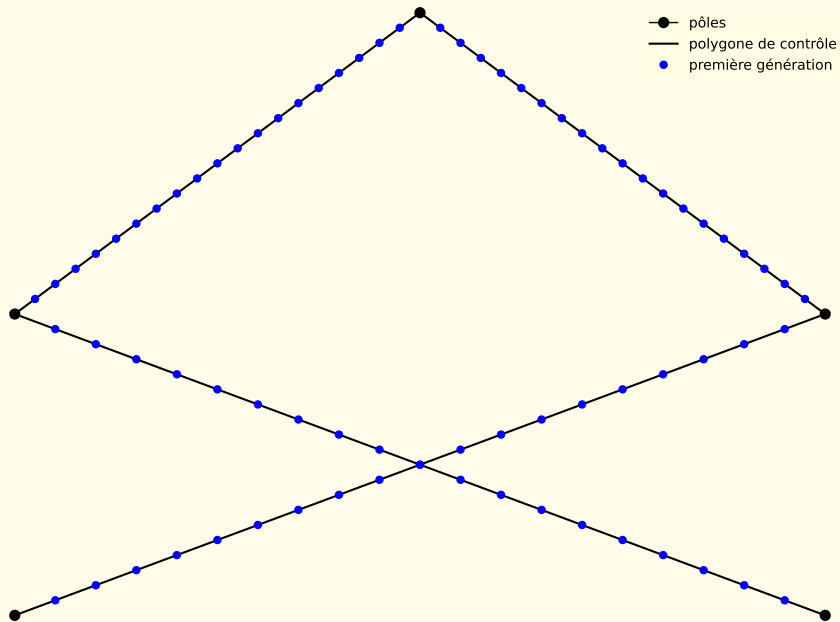
avec plus de points, on découvre la cubique

25



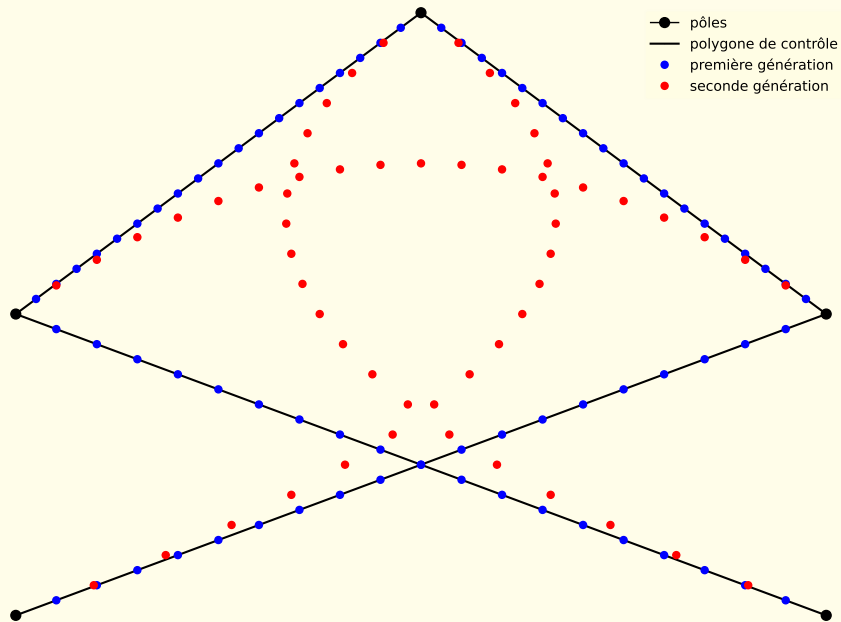
5 points de contrôle

26



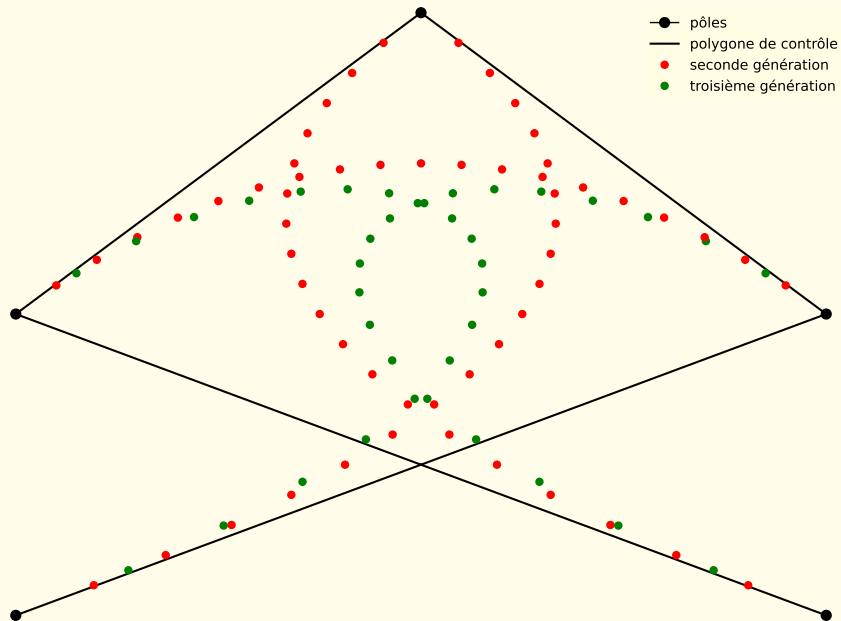
5 points de contrôle (ii)

27



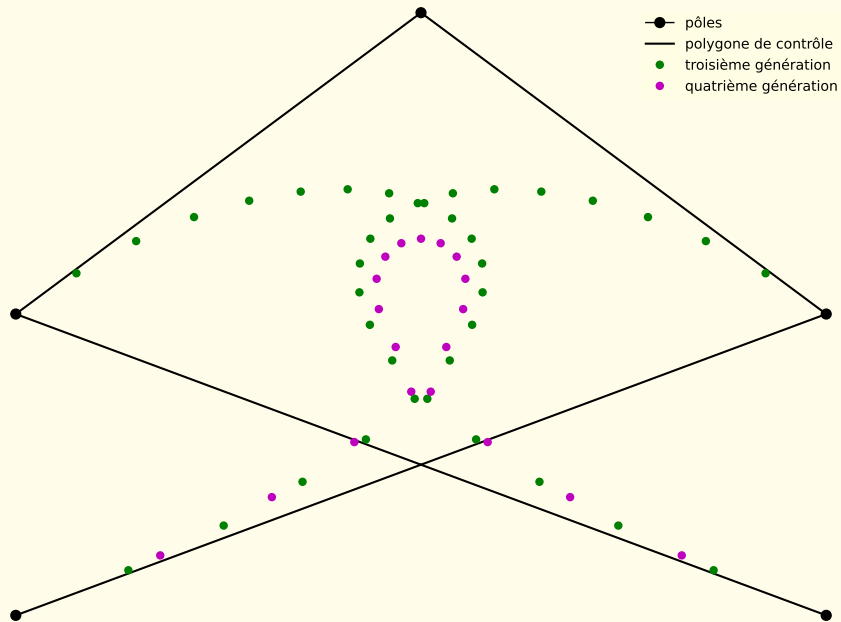
5 points de contrôle (iii)

28



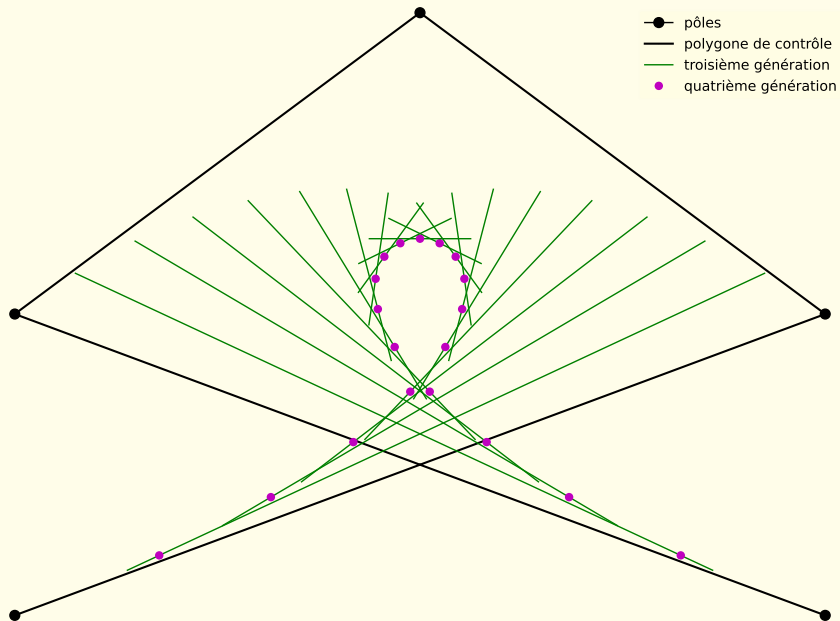
5 points de contrôle (iv)

29



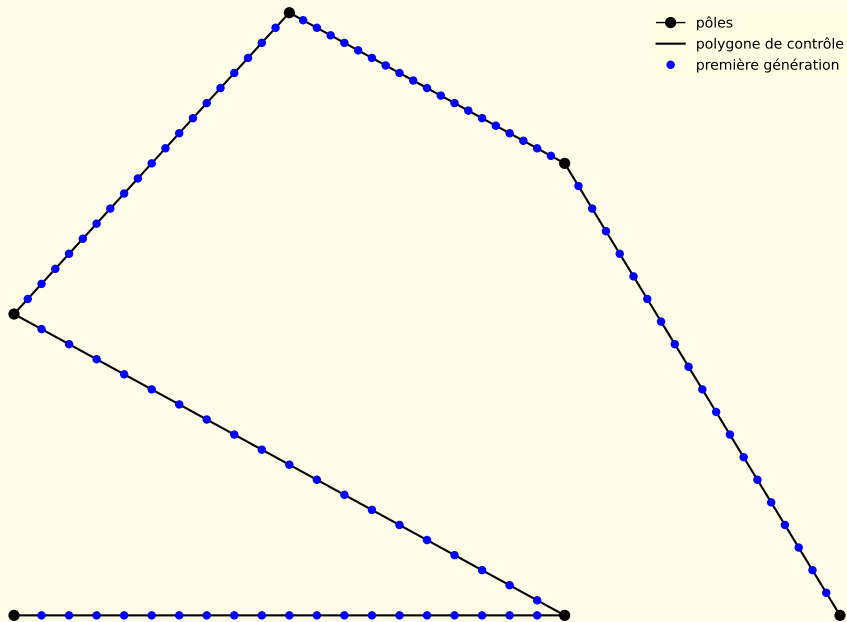
5 points de contrôle (v)

30



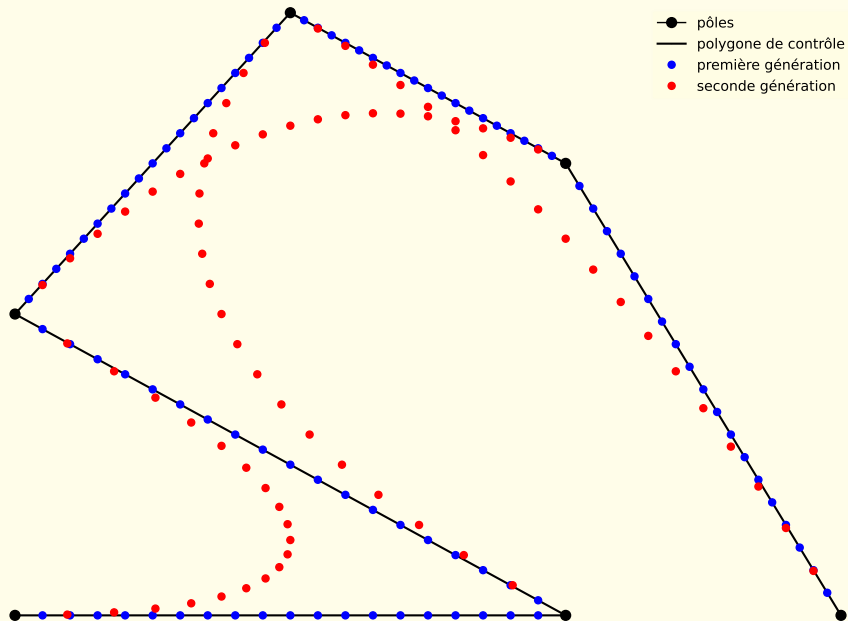
6 points de contrôle

31



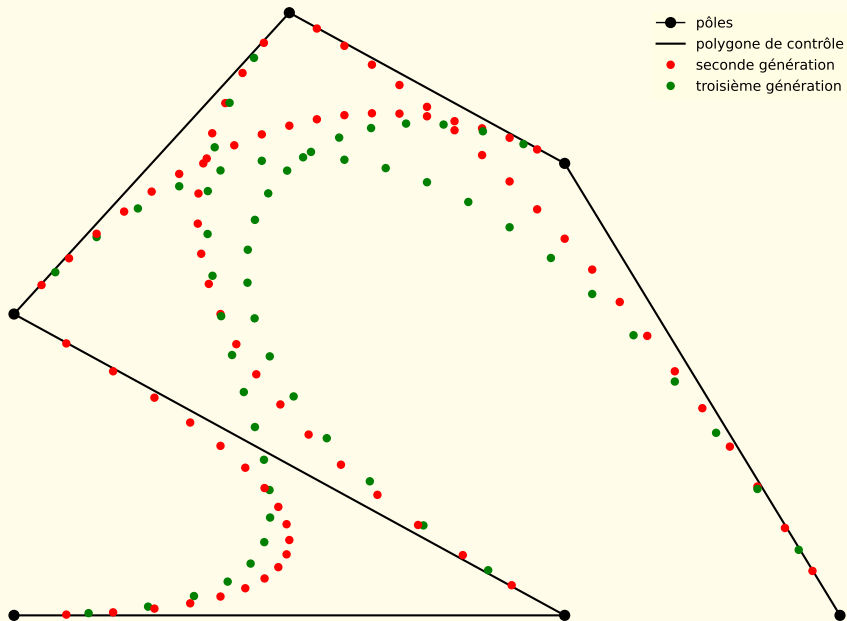
6 points de contrôle (ii)

32



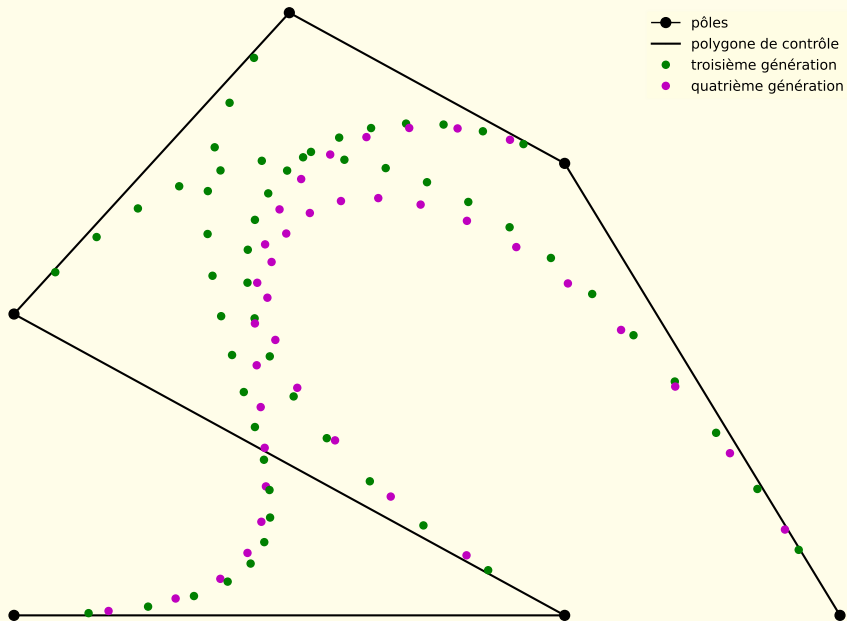
6 points de contrôle (iii)

33



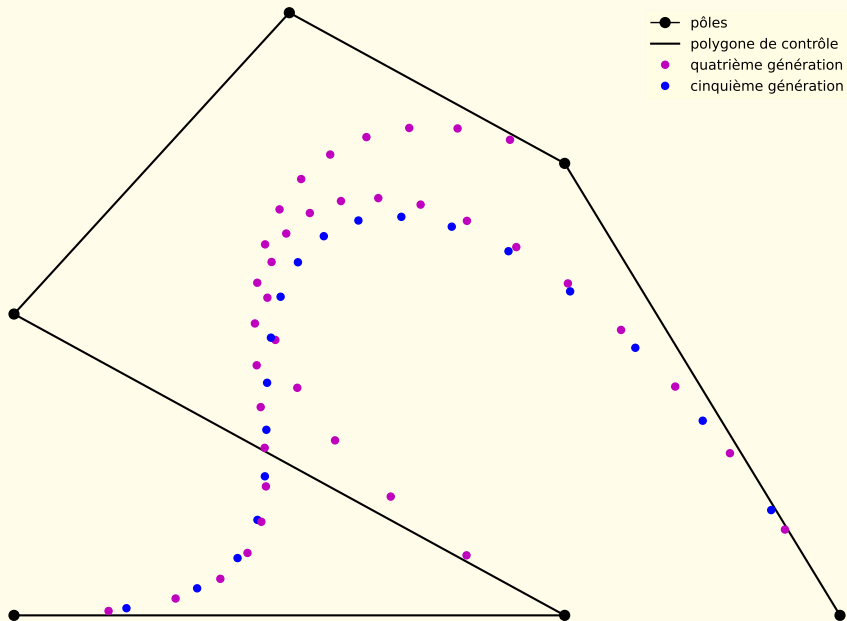
6 points de contrôle (iv)

34



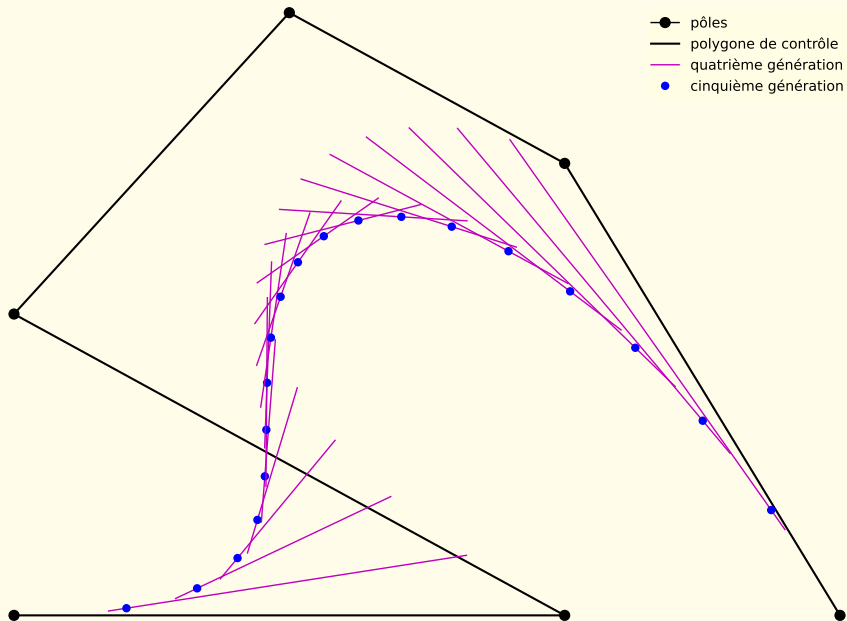
6 points de contrôle (v)

35



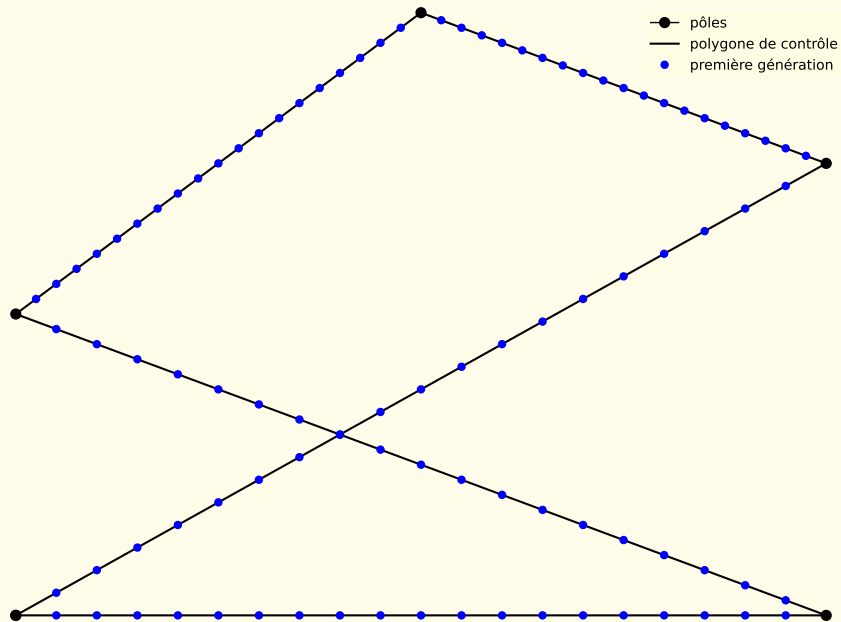
6 points de contrôle (vi)

36



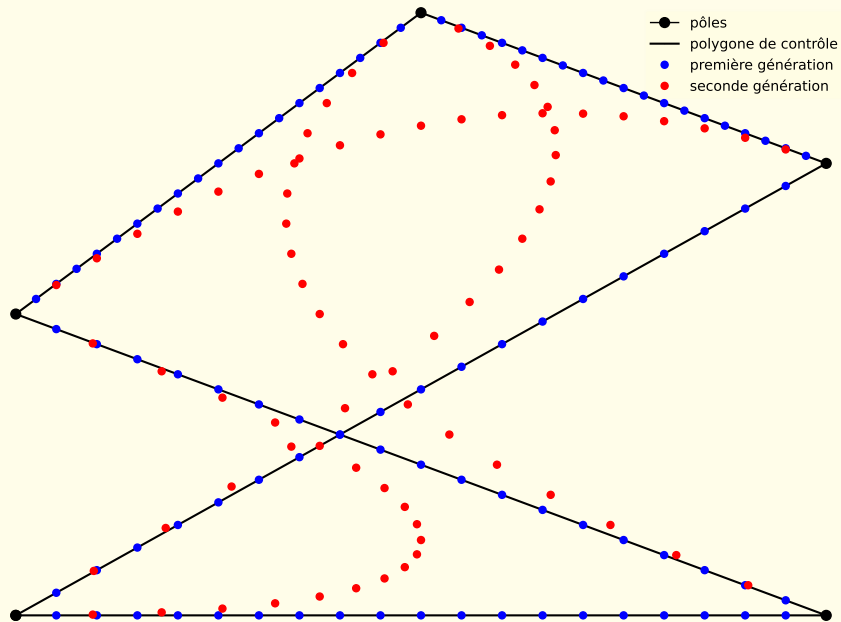
6 points de contrôle avec retour au point initial

37



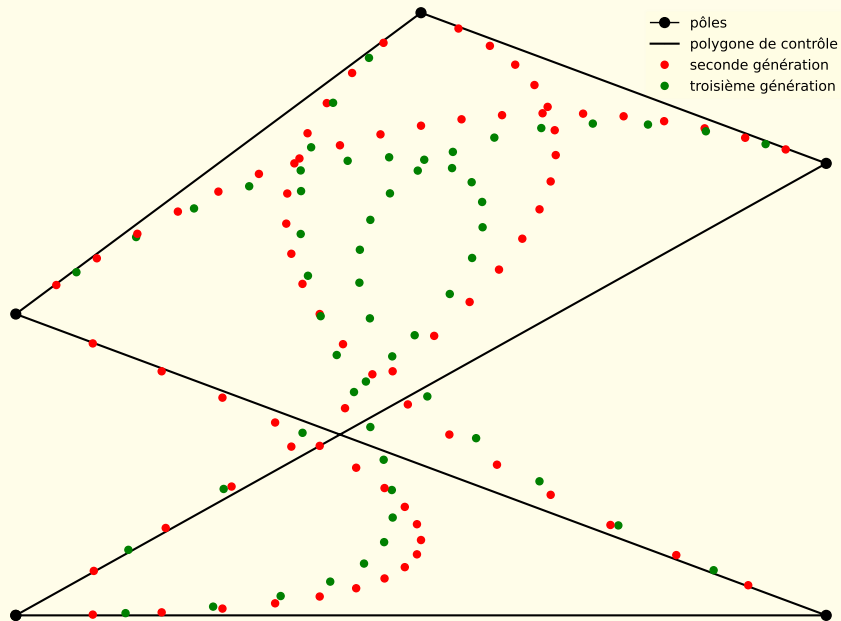
6 points de contrôle avec retour au point initial (ii)

38



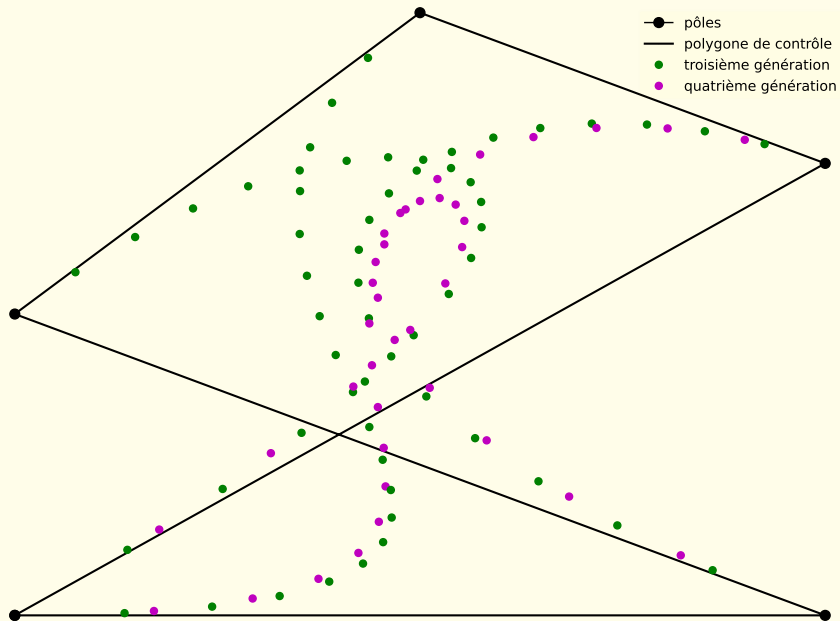
6 points de contrôle avec retour au point initial (iii)

39



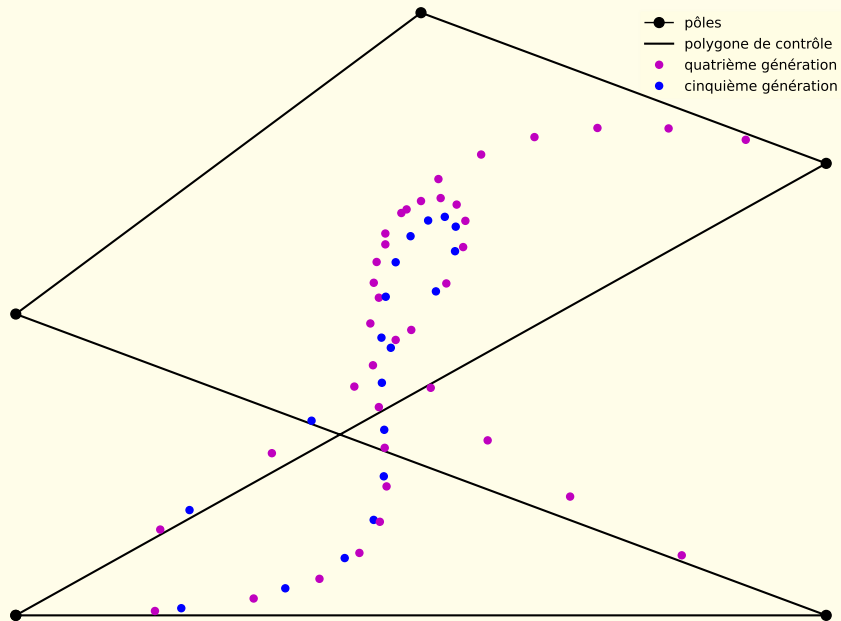
6 points de contrôle avec retour au point initial (iv)

40



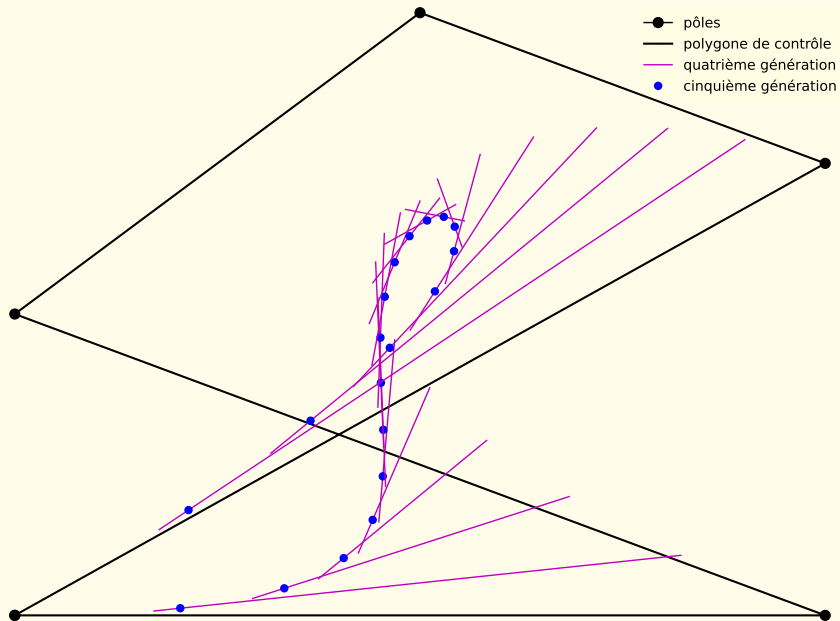
6 points de contrôle avec retour au point initial (v)

41



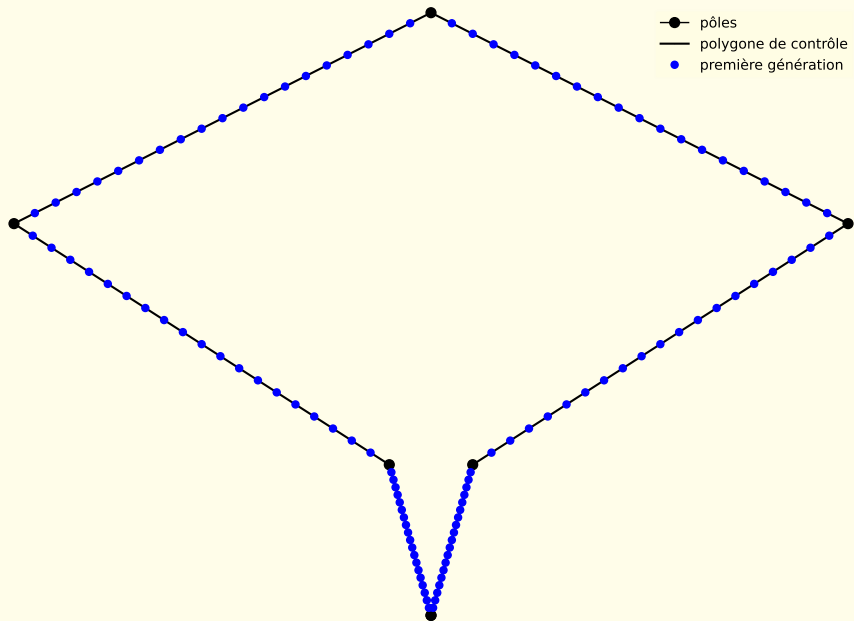
6 points de contrôle avec retour au point initial (v_i)

42



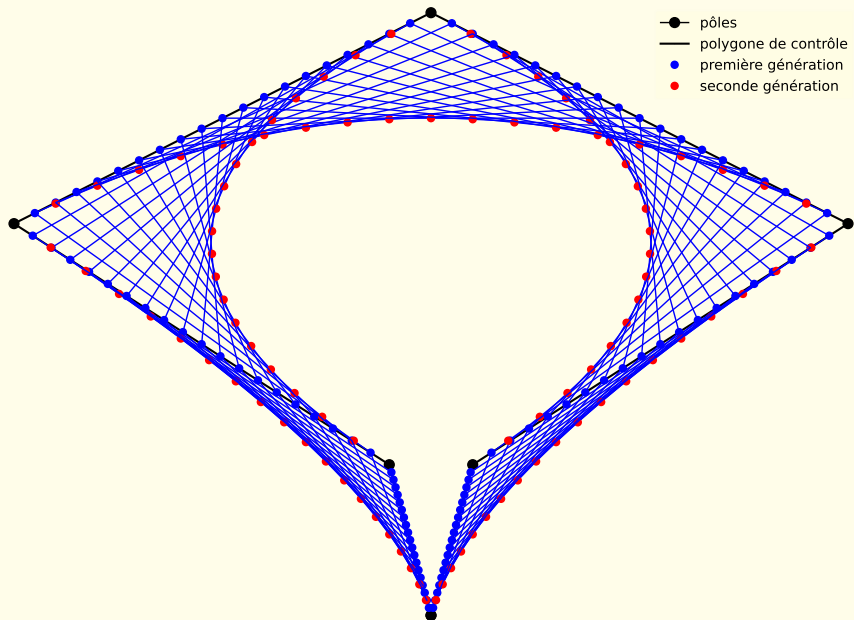
7 points de contrôle avec retour au point initial

43



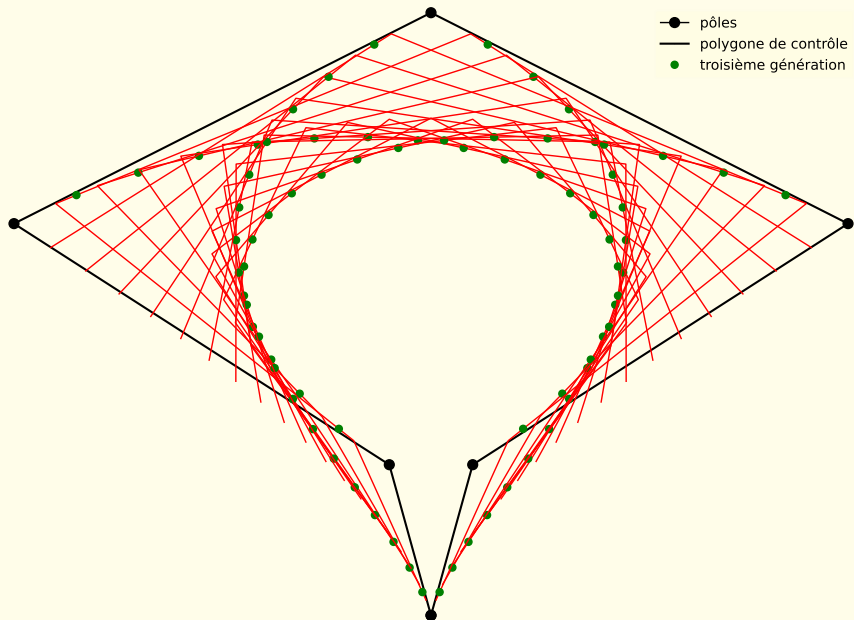
7 points de contrôle avec retour au point initial

44



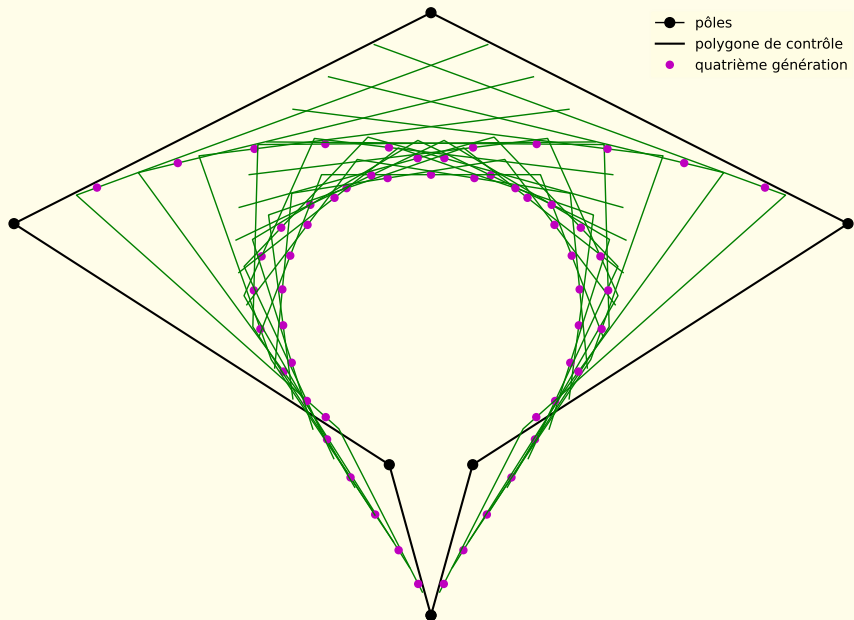
7 points de contrôle avec retour au point initial

45



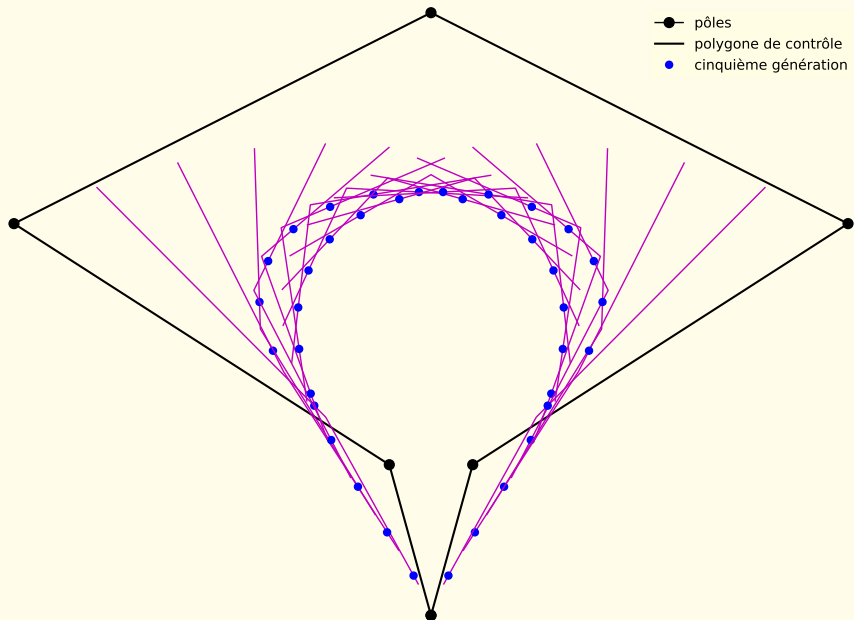
7 points de contrôle avec retour au point initial

46



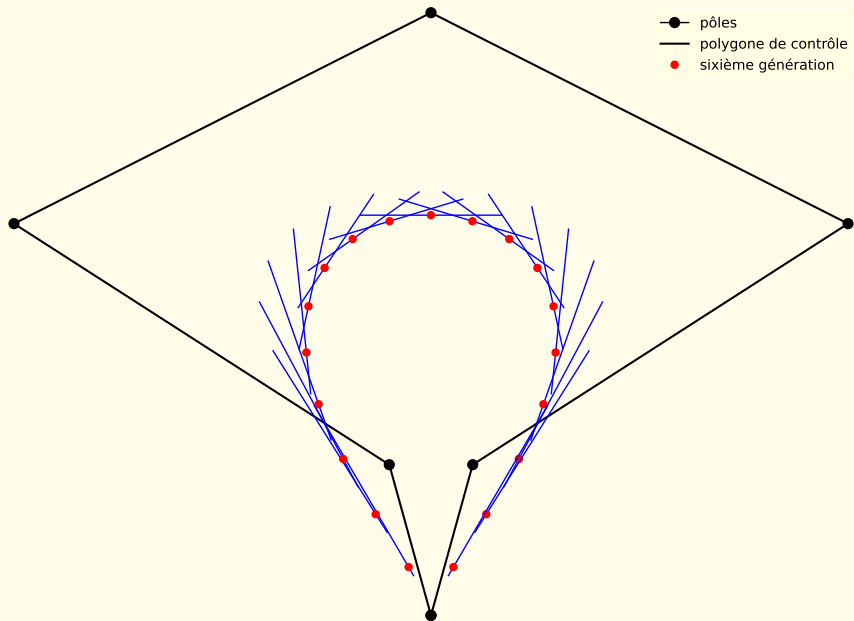
7 points de contrôle avec retour au point initial

47



7 points de contrôle avec retour au point initial

48



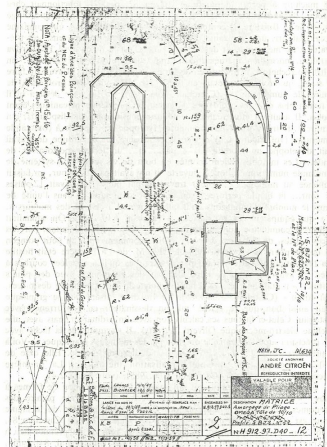


Figure 2.4. Poinçon de pliage de tôle, première pièce définie numériquement chez Citroën par P. de Casteljau, 1960.

Jean-Pierre Poitou, *30 ans de CAO en France*, 1989
cité par Maurice Zytnicki (2019)

système industriel chez Citroën, fin des années 60

50



modèles filaires et image de la GS,
premier modèle Citroën dont la carrosserie
a fait l'objet d'une description mathématique complète
[Paul de Casteljaou, 1998, communiqué à Andreas Müller]

Müller (2024)

deux rencontres

51

séminaire d'histoire des techniques

animé par [Claudine Fontanon](#)

au Conservatoire National des Arts et Métiers à Paris

30 avril 1998

[Pierre Bézier](#) assiste au séminaire de [Paul Germain](#)

"j'ai servi la technique, c'est à dire la mécanique sans majuscule"

"il y a 3000 ans chez les Grecs, Athena n'avait pas besoin d'Héphaïstos"

12 février 1999

Pierre Bézier présent pour l'intervention de [Paul de Casteljaou](#)

"Là je suis passé aux formes polaires, aux courbes à pôles

aujourd'hui bien connues"

[Paul de Casteljaou]

"Y-a qu'à faire, disait le chef de service"

[Paul de Casteljaou]

"il y a mieux : y-avait qu'à faire !"

[Pierre Bézier]

Pierre Bézier en 1990

52



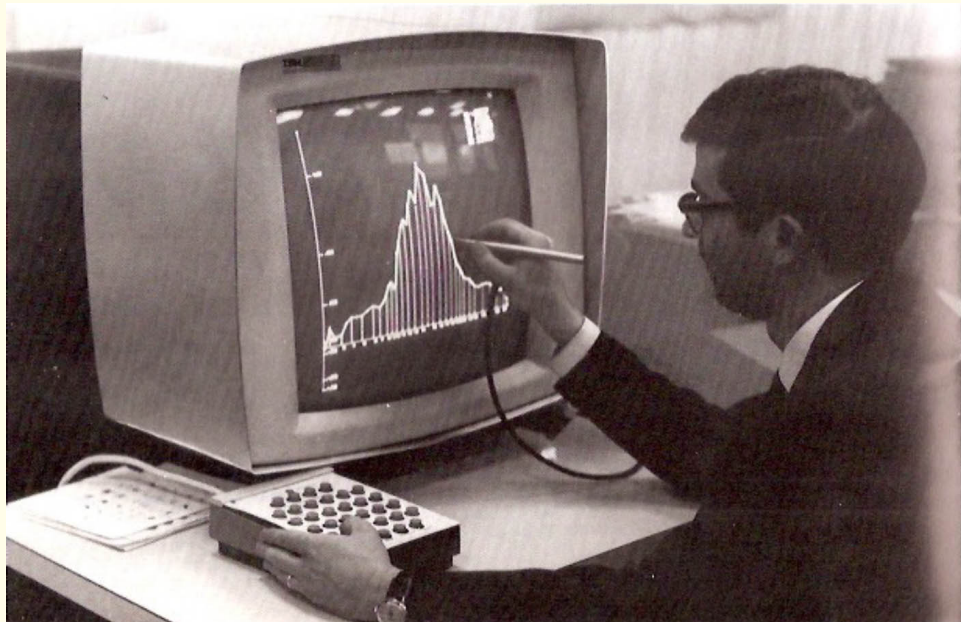
Dassault aviation, 1960

53



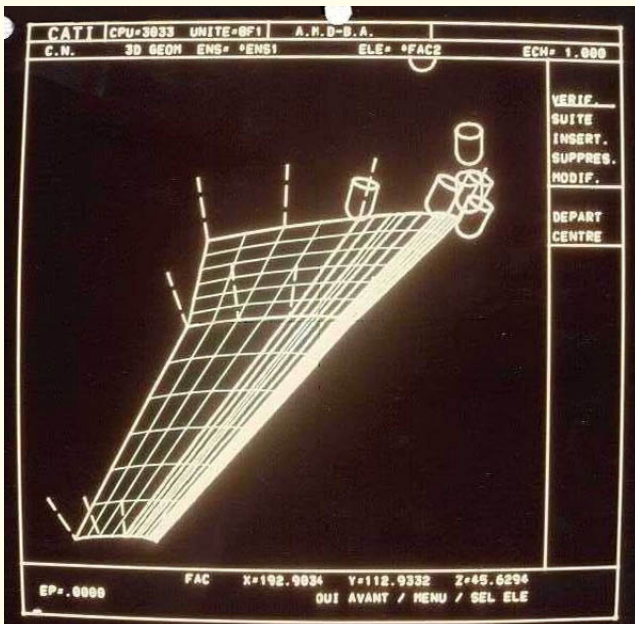
lissage d'une courbe, Dassault systèmes, 1967

54



CATI, précurseur de Catia

55



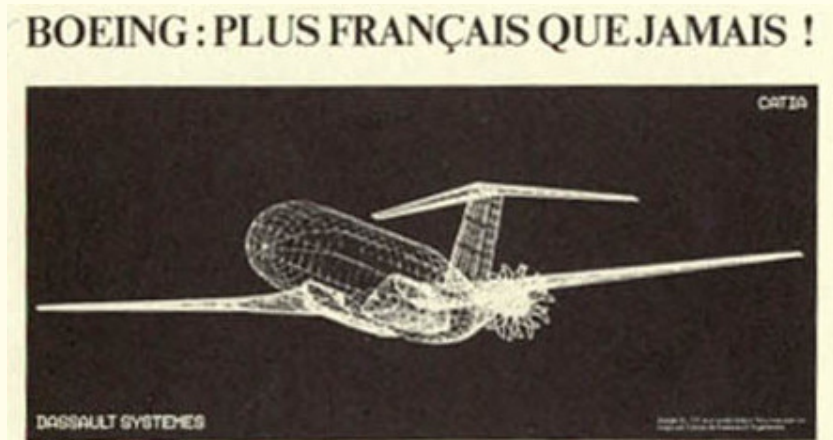
Marcel Dassault, Dominique Calmels, Francis Bernard 56



**Catia V1
1982**

Boeing adopte Catia, 1984

57



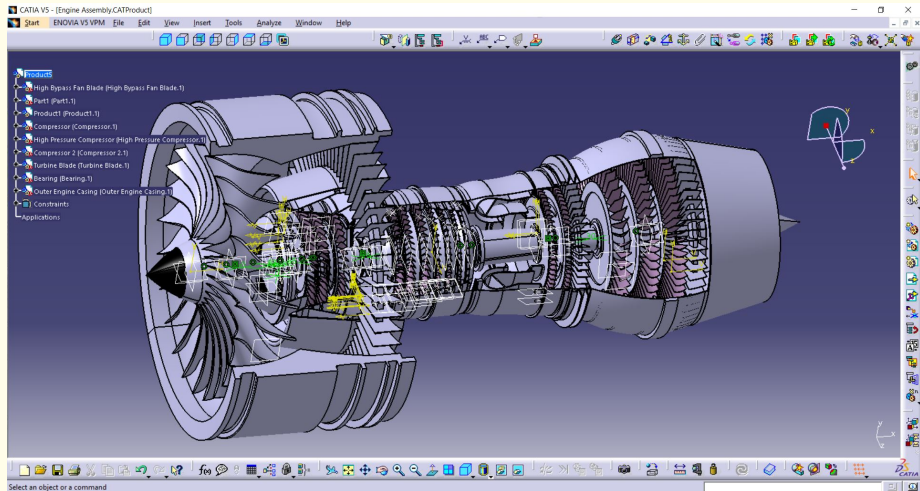
Catia V4, 1993

58



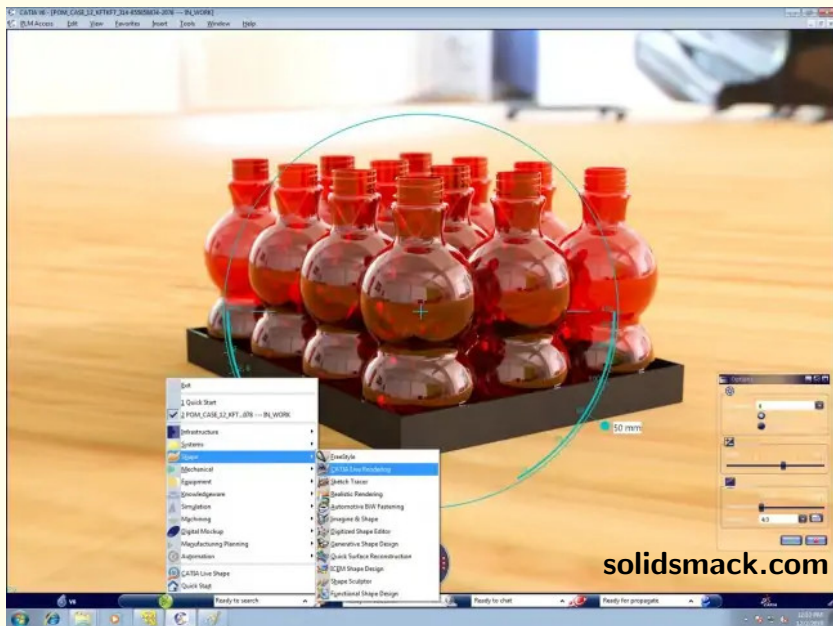
Catia V5, 1998

59



Catia V6, 2008

60



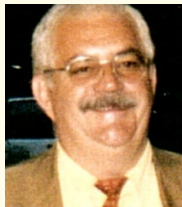
système Euclid

61



Jean-Marc Brun

(professeur émérite depuis 2003)



Michel Théron

(décédé en 2012)

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique
et les Sciences de l'Ingénieur (CNRS, Orsay)

Jean-Marc Brun : thèse d'État en aérodynamique (1970)
second sujet sur le "dessin automatique"

"Création, manipulation et visualisation de formes
tridimensionnelles", thèse de 3e cycle de Michel Théron (1970)
remplacer les courbes de Bézier par des "basic splines"

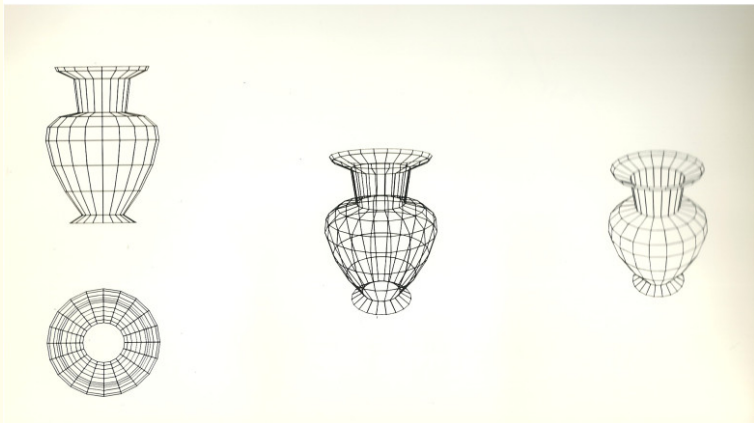
1979 : création de la société [Datavision](#), devenue Matra-Datavision

système Euclid (ii)

62

Première vision avec élimination des parties cachées dans EUCLID

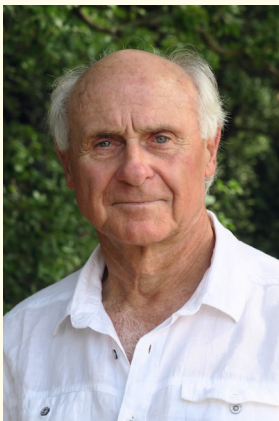
Jean-Marc Brun (2015)



accords avec Renault pour intégrer Euclid et Unisurf (1980)
rachat du logiciel Euclid par [Dassault Systèmes](#) (1998)

dans l'adhérence du système Euclid

63



Alain Massabo

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (1964-1968)
 développe "Systrid" chez [Aérospatiale Marignane](#) (1972)
 utilisation de [bases de fonctions orthogonales](#)

"Think3" : vice-président recherche à Aix en Provence (2002)

dans l'adhérence du système Euclid (ii)

64

Xavier Benveniste

École Normale Supérieure (1974-1978)

thèse d'État sous la direction d'Arnaud Beauville (1984)

Variétés de type général de dimension 3

master en Computer Sciences, University d'Orsay, 1987.

crée une équipe chez [ComputerVision](#) (\approx 1990)

embauche Jean-Marc Dupuy, mon maître en informatique

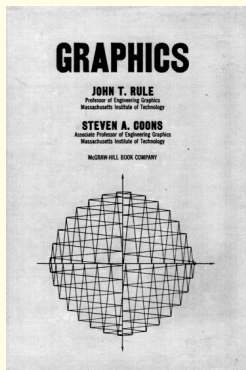
[Solidworks](#), directeur recherche et développement (depuis 2004)

ne pas oublier les “Ricains” !

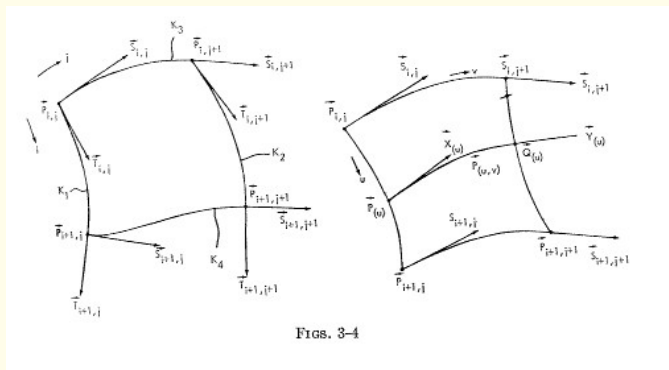
65

Steven Coons (1912-1979)
MIT

James C. Ferguson
Boeing



1961

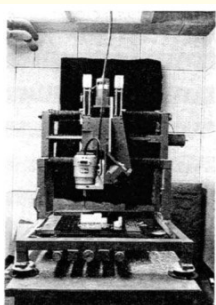


1964

ne pas oublier les “Ricains” (ii)

66

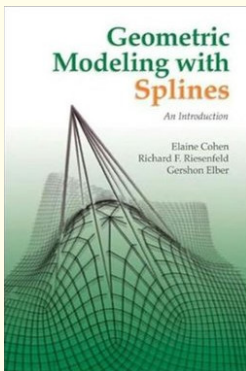
Robin Forrest
Cambridge University



Cambridge University Computer Aided Design Group's Mark II foam cutter (circa 1973). (Courtesy of Robin Forrest).

1972

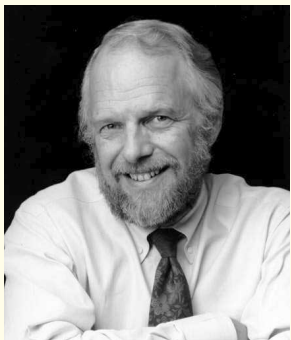
Richard Riesenfeld
Utah



1973

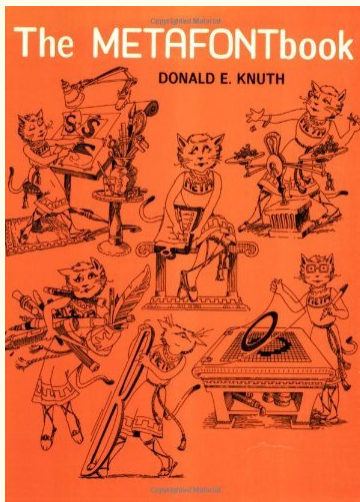
“Les courbes de Pierre Bézier ont redessiné le monde”
Peter Gabor (2007)





John Warnock (né en 1940)

crée le langage **PostScript** au sein de l'entreprise Adobe en 1983
les courbes "de type 1" du langage PostScript
sont des courbes de Bézier de degré 3



Donald Knuth (né en 1938)

The **Metafont** book, Addison-Wesley, 1986
utilise des courbes de Bézier de degré 3

polynômes de Bernstein

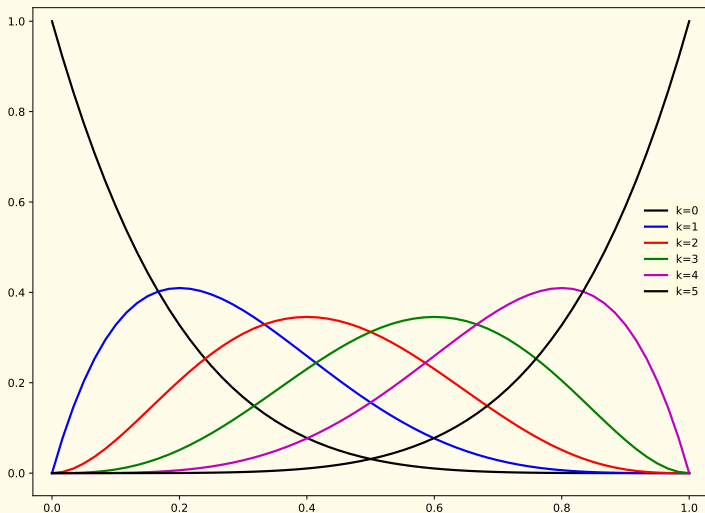
70



Sergei Bernstein (1880-1968)

polynômes de Bernstein (ii)

71



base de Bernstein des polynômes de degré n

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

fonction discrète et polynômes de Bernstein (iii)

72

polynôme de “non-interpolation” de degré n

paramétré par les $(n + 1)$ “pôles” a_0, \dots, a_n

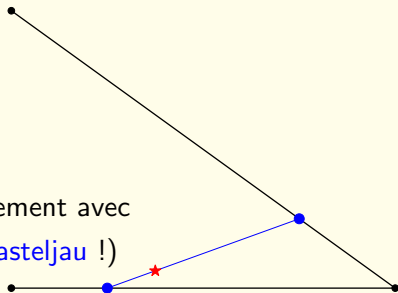
$$P_n(a_0, \dots, a_n; t) \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} a_k$$

relation classique sur les combinaisons de n objets : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

on en déduit :

$$\begin{aligned} & (1-t) P_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1}; t) \\ & + t P_{n-1}(a_1, \dots, a_n; t) \\ & = P_n(a_0, \dots, a_n; t) \end{aligned}$$

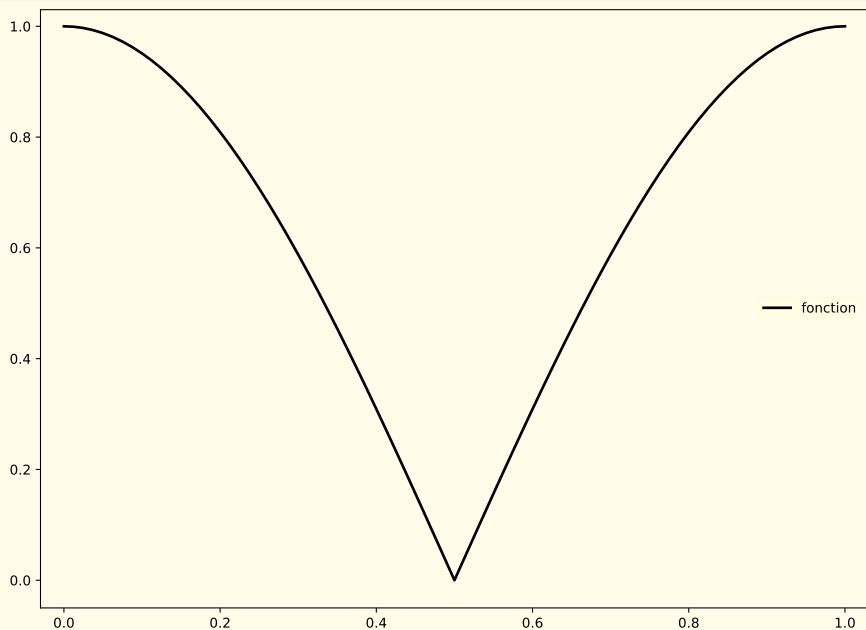
relation qui s'interprète géométriquement avec
les barycentres (algorithme de [de Casteljau](#) !)



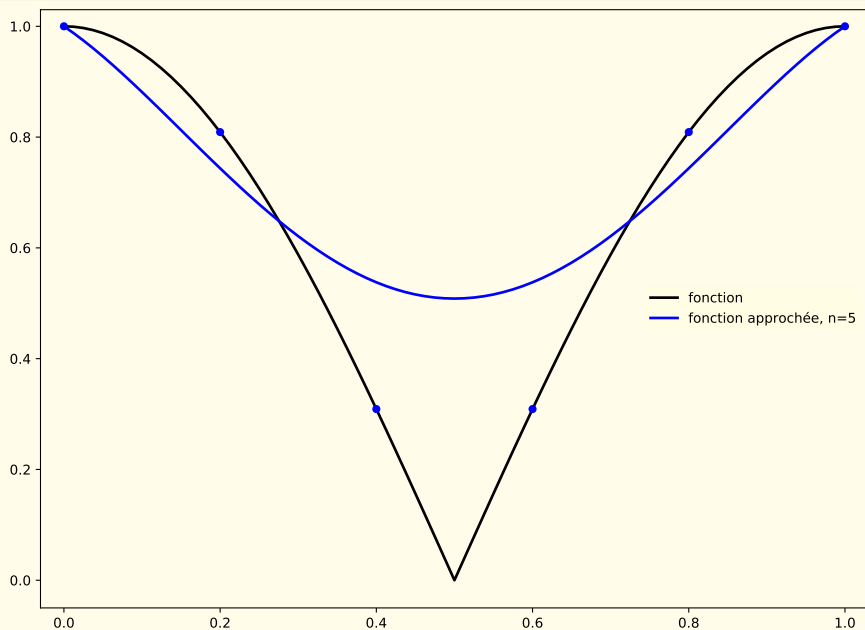
théorème de Weierstrass : toute [fonction continue](#)
est limite uniforme d'une [suite de polynômes](#)

théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein

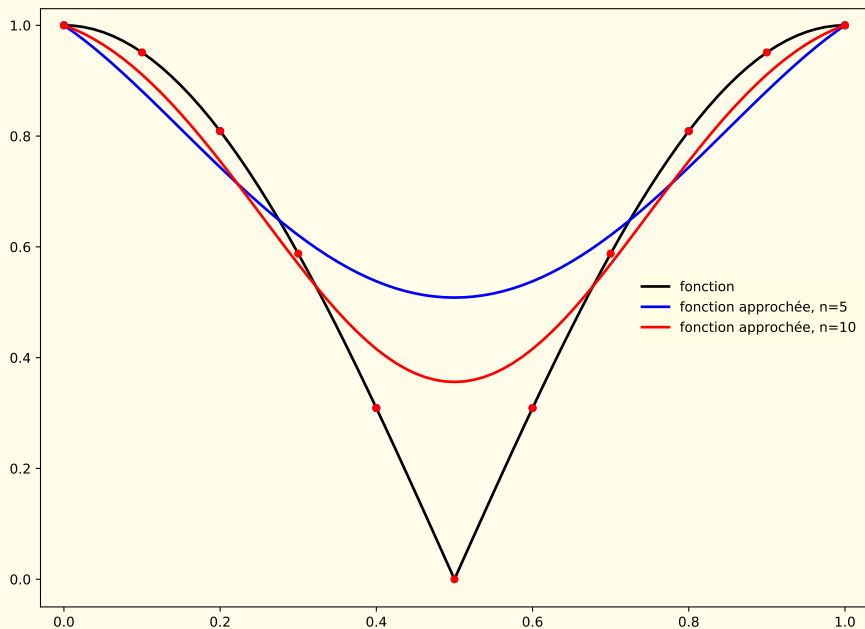
73



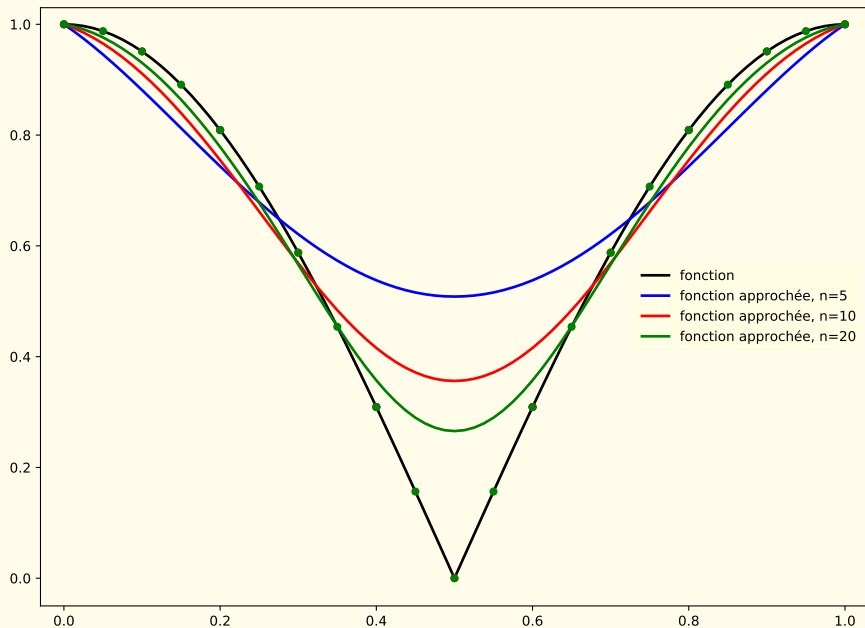
théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein (ii) 74



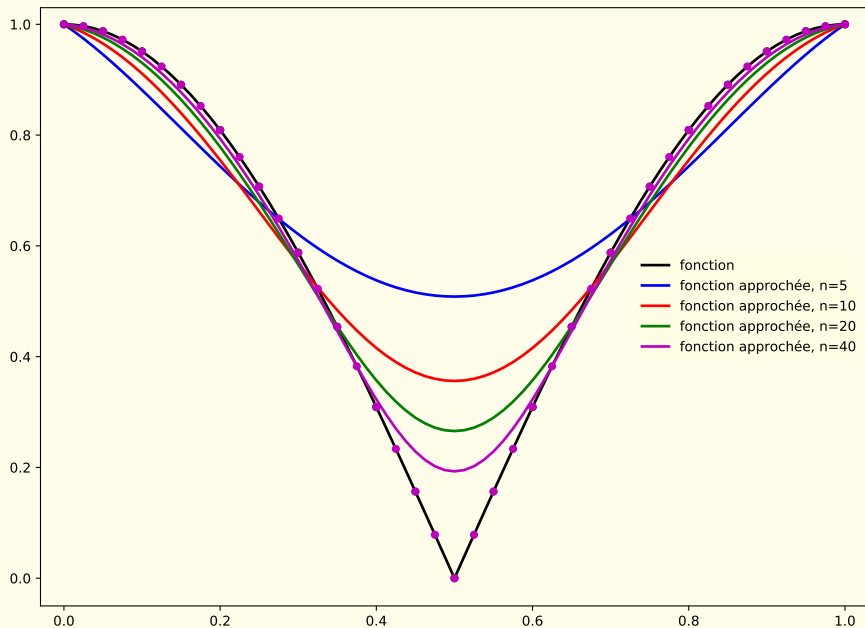
théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein (iii) 75



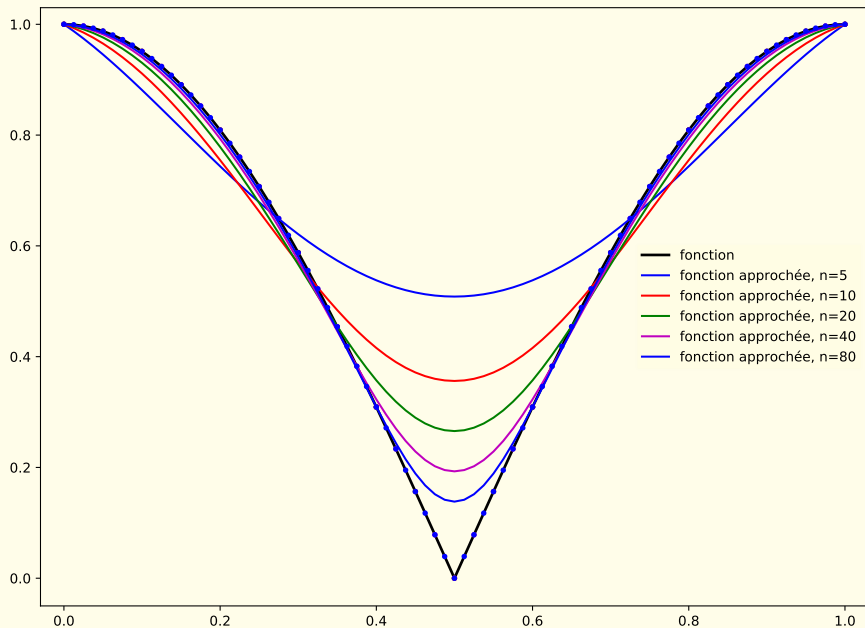
théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein (iv) 76



théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein (v) 77



théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein (vi) 78

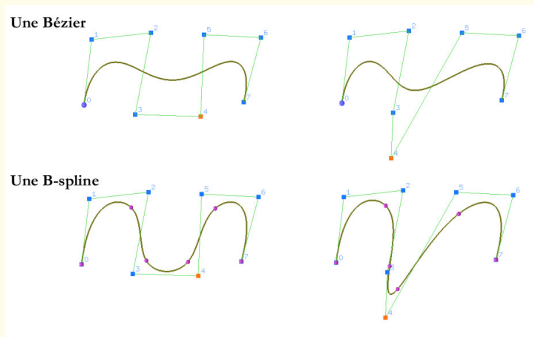




Pierre Bézier aimait à rappeler que quelques décennies après
Serguei Bernstein, il a fréquenté l'École Supérieure d'Électricité

aller plus loin que les polynômes !

80



Jean-Marc Brun (2015)

splines, B-splines, Non Uniform Rational Basic Splines (**NURBS**)

surfaces

carreaux de Bézier, triangle de De Casteljau

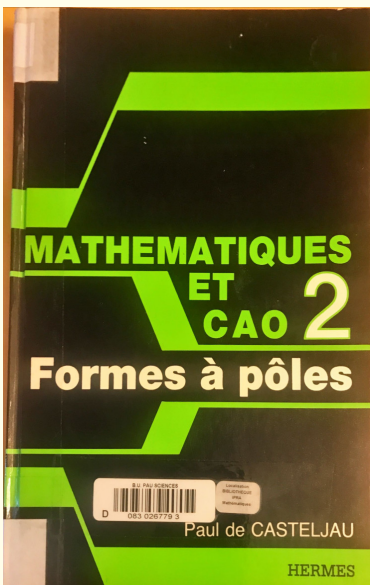
quelle **régularité** lors du raccord de surfaces ?

quelques livres

81



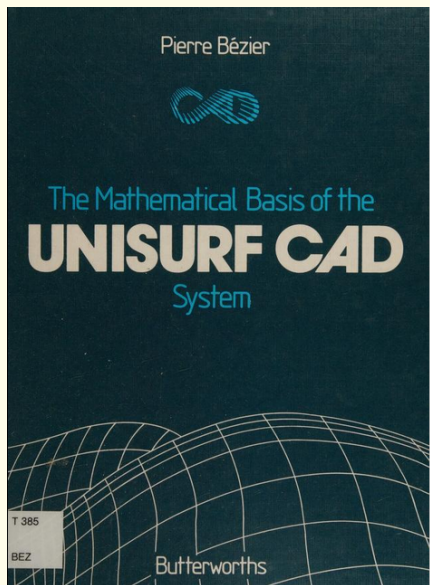
1988



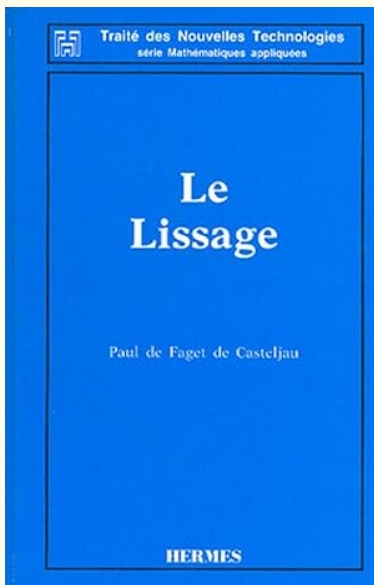
1985

quelques livres (ii)

82



1986



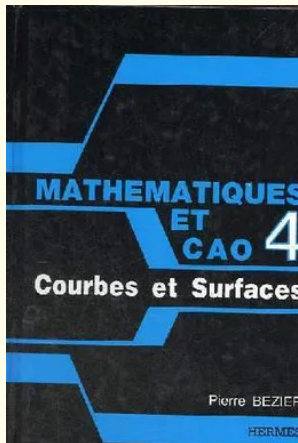
1990

quelques livres (iii)

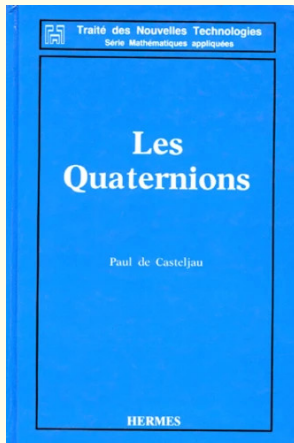
83



1970



1986



1987

Pierre Bézier

Essai de définition numérique des courbes et surfaces expérimentales

Thèse de doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie, 1977

Carl De Boor

A practical guide to splines, Springer, 1978

Jean-Charles Fiorot, Pierre Jeannin

Courbes et surfaces rationnelles, Masson, 1989

Jean-Pierre Poitou

Trente ans de CAO en France: ou les petits enfants

de Gaspard Monge, Hermès, Paris, 1989

Gerald Farin

Courbes et surfaces pour la CAO ; conception géométrique

assistée par ordinateur, Masson, 1990

Jean-Jacques Risler

Méthodes mathématiques pour la CAO, Masson, 1991

David F. Rogers

An introduction-to-nurbs, with historical perspective

Morgan Kaufmann, San Francisco, 2000

Alberto Sdegno

“On the origins of the theory of the digital drawing. In memory of Steven A. Coons (1912-1979)

Elogio della teoria, pages 333-341, 2012.

Véronique Boutet, Jonathan Godin, Alexis Langlois-Rémillard

“Excursion typographique : la matrice des fontes”

Accromath, numéro 12, pages 26-29, 2017.

Maurice Zytnicki

“Un regard de sociologue sur la CAO,
entretien avec Jean-Pierre Poitou”

Nacelles, volume 6, 2019

Alain P. Michel

“La carrière de Pierre Bézier chez Renault” (1933-1975)
Artefact, volume 13, pages 213-242, 2021

Andreas Müller

“A tour d'horizon of de Casteljau's work”
Computer Aided Geometric Design, volume 113,
article 102366, 2024

<https://aero-modelisme.com/histoire-catia-dassault-systemes/>

<https://blog.typogabor.com/2007/09/15/les-courbes-de-pierre-bezier-ont-redessine-le-monde/>

<https://histoire3d.siggraph.org/>

<https://www.machine-outil.com>



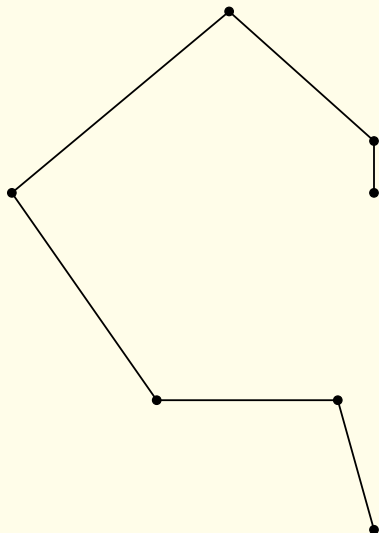
Alain P. Michel

Pierre Bézier - La discrète renommée mondiale d'un ingénieur

Classiques Garnier, 140 pages, sortie le 26 novembre 2025

une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !

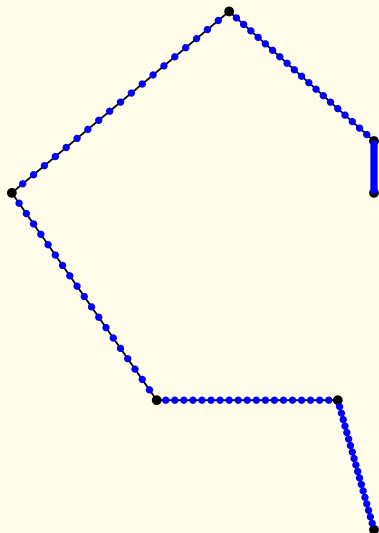
88



● pôles
— polygone de contrôle

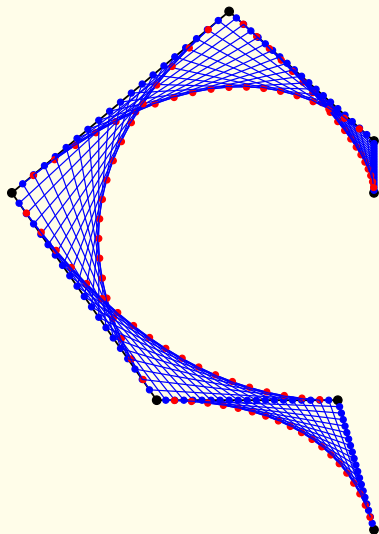
une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !

89



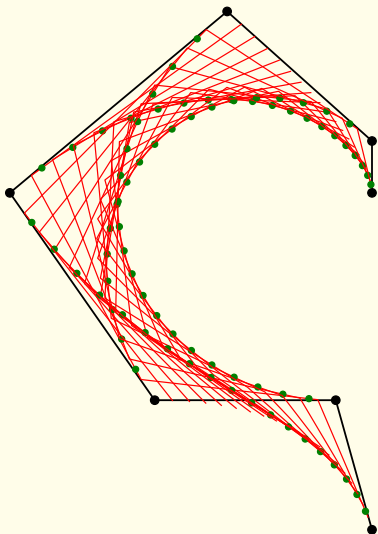
- pôles
- polygone de contrôle
- première génération

une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !



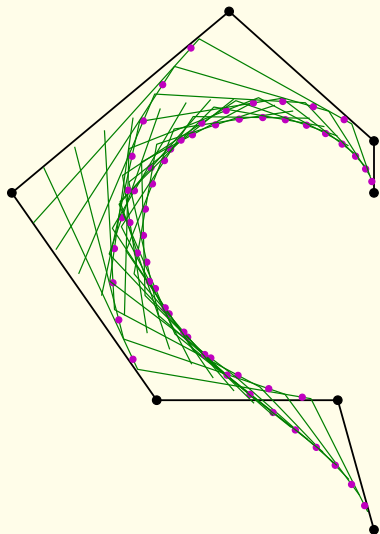
- pôles
- polygone de contrôle
- première génération
- seconde génération

une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !



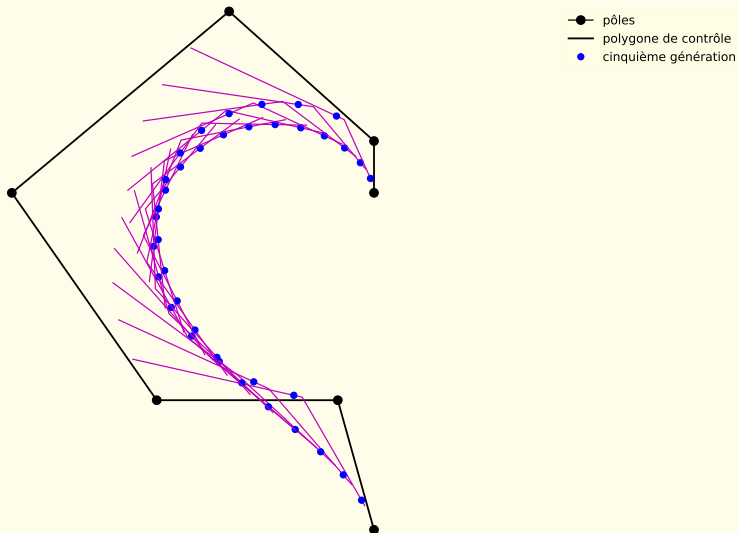
- pôles
- polygone de contrôle
- troisième génération

une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !

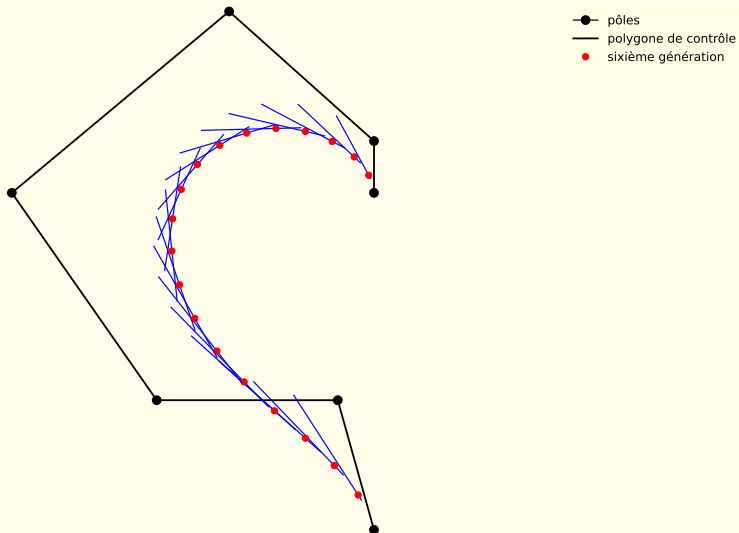


- pôles
- polygone de contrôle
- quatrième génération

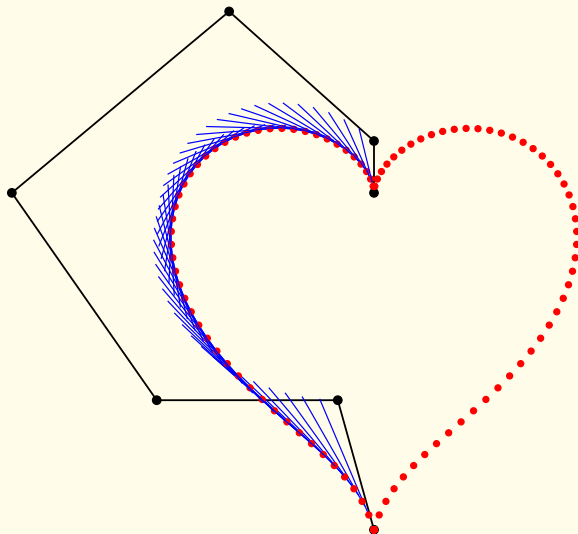
une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !



une dernière courbe de Bézier pour se faire plaisir !



une petite symétrie...



merci de votre attention !

