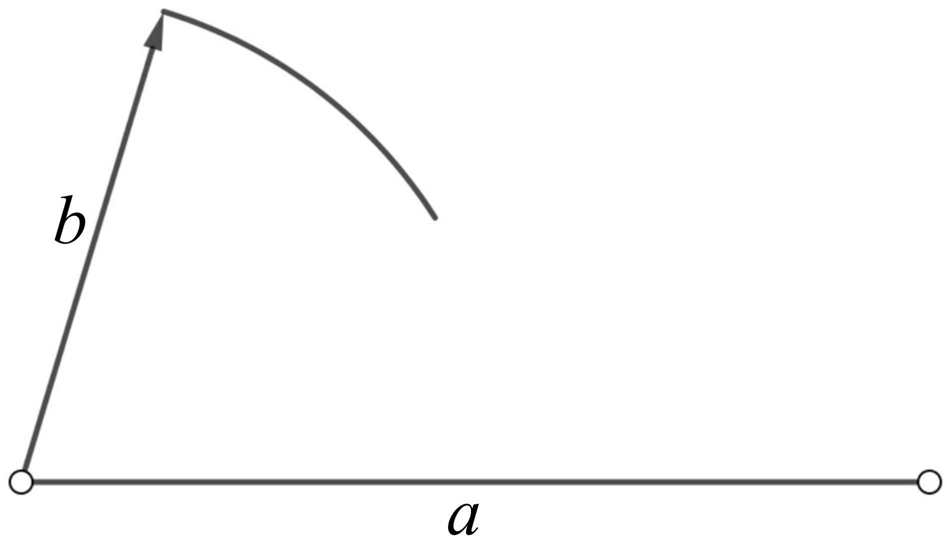
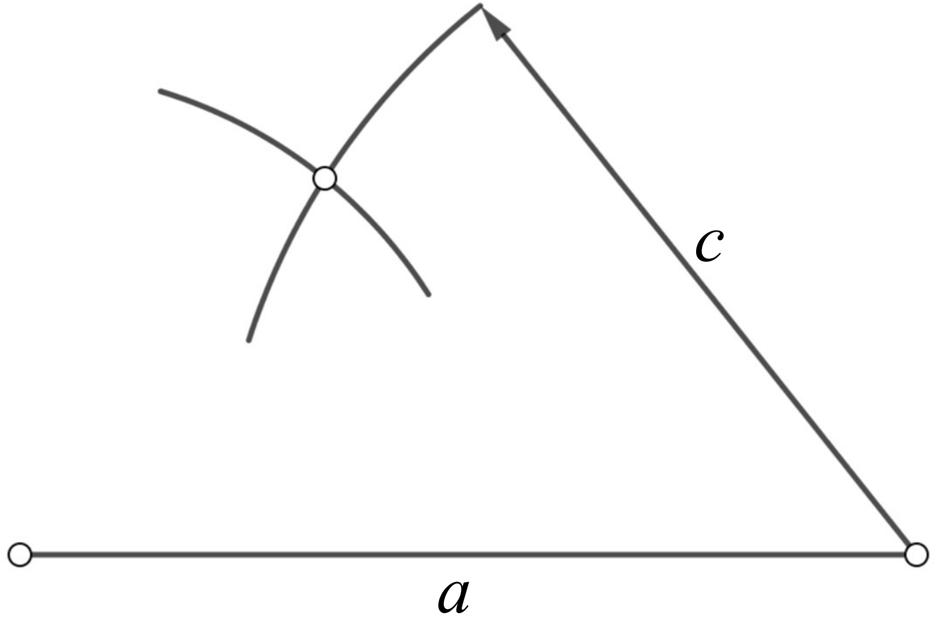
Un triangle est déterminé par la donnée de ses côtés a, b, c.

(*à une symétrie près*)

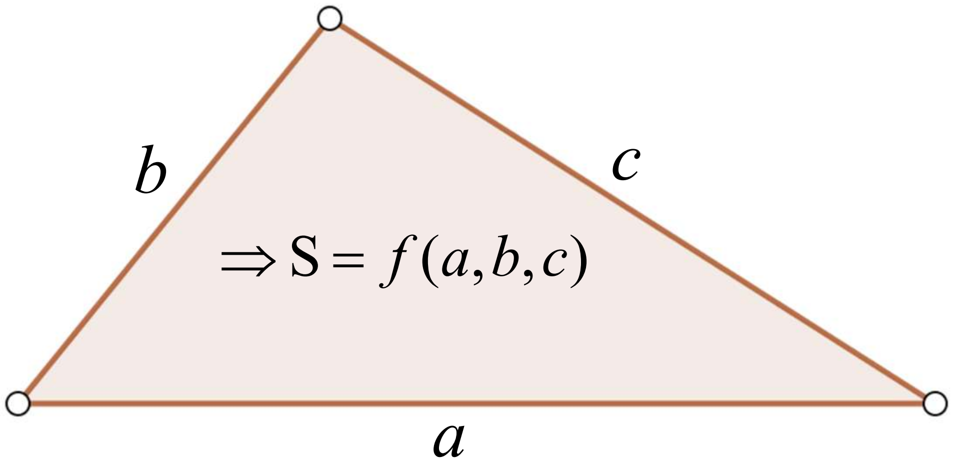


Un triangle est déterminé par la donnée de ses côtés a, b, c.

(*à une symétrie près*)



Un triangle est déterminé par la donnée de ses côtés a, b, c.
(*à une symétrie près*)



$$\Rightarrow S = f(a,b,c)$$

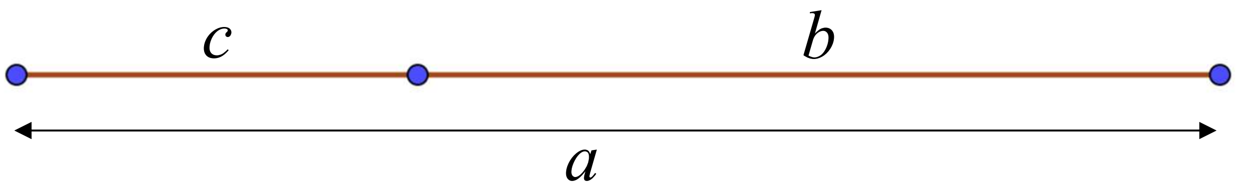
S : homogène du second degré par rapport aux côtés: $f(\lambda a,\lambda b,\lambda c) = \lambda^2 f(a,b,c)$

S : symétrique par rapport aux côtés:

$$f(a,b,c) = f(b,c,a) = f(c,a,b) = f(a,c,b) = f(b,a,c) = f(c,b,a)$$

Pythagore Héron

Triangle plat => S = 0



$$p = \frac{a+b+c}{2} \qquad a = b + c \iff p = a$$

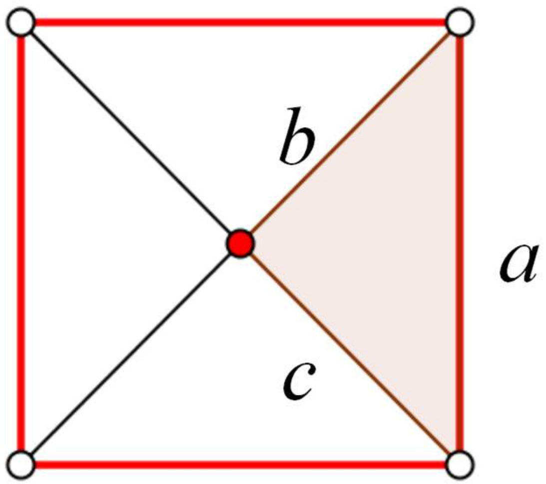
On cherche donc une fonction symétrique, homogène du 1^er^ degré:

$$g(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda g(a,b,c)$$

telle que : $S^2 = g(a,b,c)(p-a)(p-b)(p-c)$

seule possibilité: $g(a,b,c) = C.p$

Calcul de C? ***sans utiliser Pythagore!***



a = 2 par symétrie, b = c inconnu

$$S(2,b,b) = 1 = \frac{b^2}{2}$$

$$S(2,\sqrt{2},\sqrt{2}) = 1$$

puisque $p = \sqrt{2}+1$: $p - a = \sqrt{2}-1$ $p - b = p - c = 1$

$$S^2 = 1 = C(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = C$$

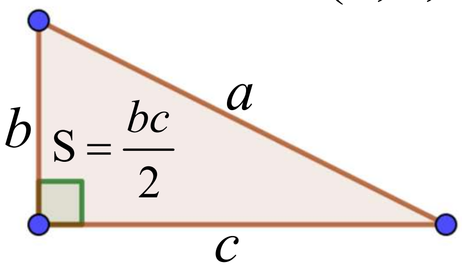
$$S(a,b,c) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Formule de Héron d'Alexandrie (1er siècle après J.C)

Un peu de calcul...

$$16p(p-a)(p-b)(p-c) = \left[(b+c)+a\right]\left[(b+c)-a\right]\left[a-(b-c)\right]\left[a+(b-c)\right]$$
$$= \left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]$$
$$= 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$
$$= (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)$$

$$\mathrm{S}(a,b,c) = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}$$



$$16\mathrm{S}^2 = (a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4) = 4b^2c^2$$

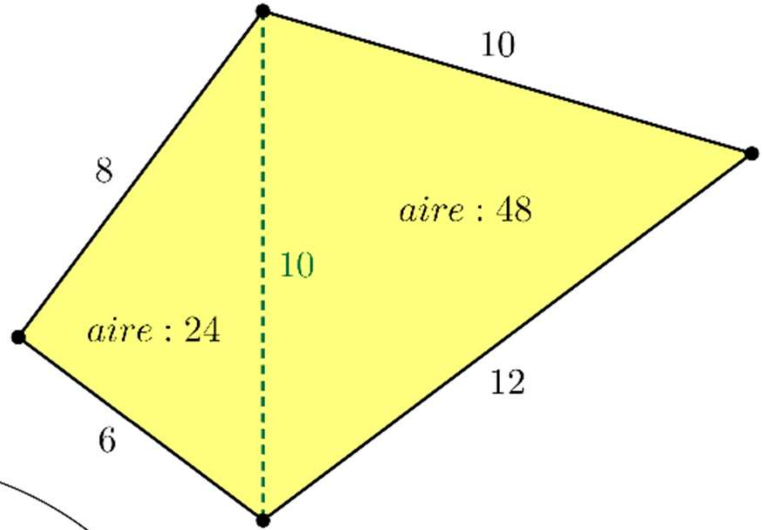
$$\left[a^2+(b^2+c^2)\right]^2 = 2\left[a^4+(b^2+c^2)^2\right]$$

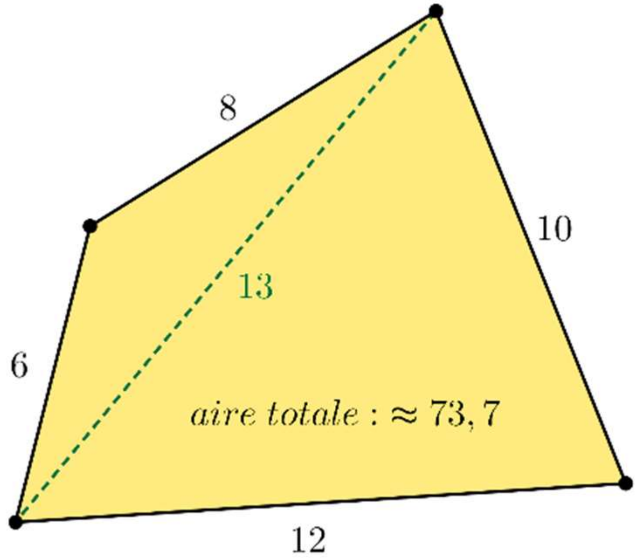
$$\left[a^2-(b^2+c^2)\right]^2 = 0$$ Pythagore

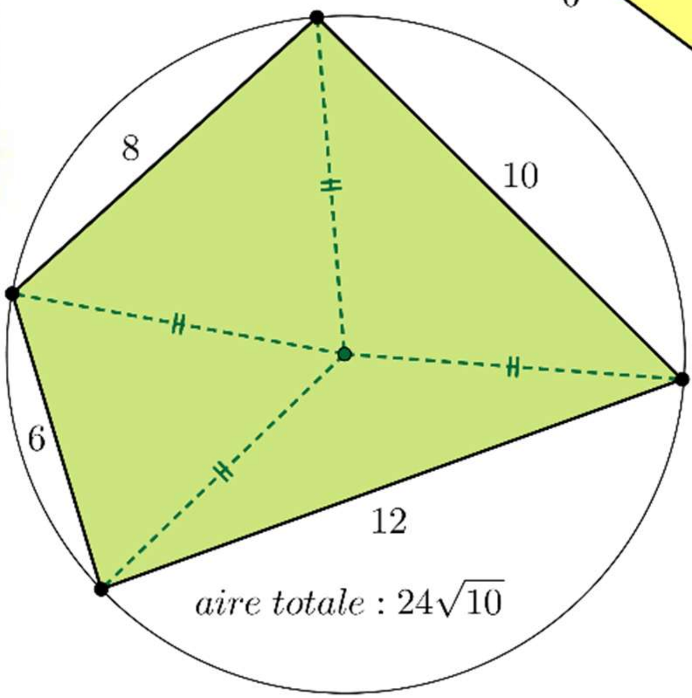
Les quadrilatères simples

problème pépère

Mêmes côtés, même aire?







aire maximale pour un quadrilatère inscriptible

Quadrilatère inscriptible (**unicité**)

Formule de Brahmagupta (598-670)

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$