

Sur la règle des signes

François Dubois *

La semaine des Maths au Kafemath !
jeudi 13 mars 2025

* créateur et animateur du Kafemath.

pas de nombres négatifs en comptabilité !

Luca Pacioli (1447 - 1517)

“Summa de arithmetica, geometria,
de proportioni et de proportionalita” (1494)



mécanisme de l'enregistrement en **partie double**

enregistrer toute opération dans deux comptes simultanément

une question

multiplication

$$2 \times 3 = 3 + 3 = 6$$

$$3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$$

-1

température négative de un degré au dessous de zéro
dette de une unité vis à vis d'une autre partie

multiplier un nombre positif par -1

$$2 \times (-1) = (-1) + (-1) = -2$$

par extension, $(-1) \times 2 = 2 \times (-1) = -2$

mais quelle valeur donner à $(-1) \times (-1)$?

une première métaphore

José Clément [Institut Notre-Dame, Malmedy, Belgique]

La Feuille d'IF, numéro 8, juin 2004

les nombres positifs sont des cadeaux

et les nombres négatifs sont des punitions

Le premier signe + correspond à la marque de l'addition et
le premier signe - à la marque de la soustraction.

$+(+1) = +1$: ajouter un cadeau, c'est un cadeau

$+(-1) = -1$: ajouter une punition, c'est une punition

$-(+1) = -1$: retirer un cadeau, c'est une punition

$-(-1) = +1$: retirer une punition, c'est un cadeau

une autre métaphore

faire appel à des notions d'économie

recettes pour les nombres positifs

dépenses pour les nombres négatifs

quel effet d'une augmentation ou d'une diminution sur nos avoirs ?

$+(+1) = +1$: augmenter les recettes, c'est augmenter ses avoirs

$+(-1) = -1$: augmenter les dépenses, c'est diminuer ses avoirs

$-(+1) = -1$: diminuer les recettes, c'est diminuer ses avoirs

$-(-1) = +1$: diminuer les dépenses, c'est augmenter ses avoirs

les nombres négatifs correspondent à des **dettes**...

$+(-1) = -1$: augmenter ses dettes, c'est négatif pour nos finances

$-(-1) = +1$: diminuer ses dettes, c'est positif pour nos finances

“Qui paye ses dettes s'enrichit !”

une troisième métaphore

les nombres positifs sont des amis

et les nombres négatifs des ennemis

$+.+ = +$: les amis de mes amis sont mes amis

$+.- = -$: les amis de mes ennemis sont mes ennemis

$-.+ = -$: les ennemis de mes amis sont mes ennemis

$-. - = +$: les ennemis de mes ennemis sont mes amis

Plus par plus donne plus.

Les amis de nos amis sont nos amis.

Plus par moins donne moins.

Les amis de nos ennemis sont nos ennemis.

Moins par plus donne moins.

Les ennemis de nos amis sont nos ennemis.

Moins par moins donne plus.

Les ennemis de nos ennemis sont nos amis.

un poème d'Hervé Bazin (1911 - 1996)

un long débat

Gert Schubring [historien des sciences, né en 1944 ; article de 1986]

Diophante d'Alexandrie

entre le premier et le troisième siècle après JC, écrit en Grec
 auteur de *Arithmetica*, grand traité de théorie des nombres
 parle de "quantités soustraites"

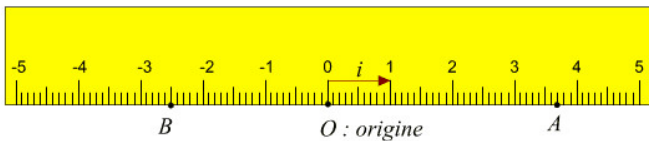
explique la règle des signes : $(-1) \times (-1) = +1$

en Inde [12ème siècle]

les nombres positifs sont appelés "propriétés" ou "biens"

les nombres négatifs sont nommés "dettes"

une valeur négative pour une partie d'une droite
 est associée à la direction opposée.



un long débat (ii)

pour les **mathématiciens chinois**

quantités négatives comme moyens intermédiaires
dans leurs calculs pour résoudre des problèmes
ces quantités n'étaient pas admises comme des solutions

Al-Khwârizmî (780 - 850)

“Abrégé du calcul par la restauration
et la comparaison” (820)

pas de quantités négatives !



Leonhard Euler (1707 - 1783)

“Vollständige Anleitung zur Algebra” (1766)



les nombres négatifs ont un statut d'êtres mathématiques véritables

la soustraction n'est pas restreinte au seul cas où le nombre à soustraire est plus petit que celui dont il est soustrait

Euler affirme sans réserve que $25 - 40 = -15$

les nombres négatifs sont plus petits que zéro

il considère les deux séries $\dots, -4, -3, -2, -1, 0$ et $0, 1, 2, 3, \dots$

pour les réunir sous un seul et même concept, celui de **nombres entiers**



d'Alembert (1717 - 1783)

article "négatif" de l'Encyclopédie (\simeq 1763)

"Ainsi les quantités négatives indiquent réellement dans le calcul des quantités positives, mais qu'on a supposées dans une fausse position.

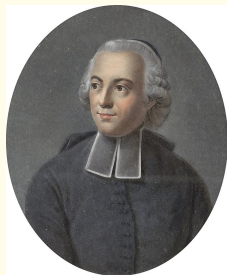
Le signe "moins" que l'on trouve avant une quantité sert à redresser et à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse [...]

[...] mais si je dis qu'un homme a donné à un autre -3 écus, cela veut dire **en langage intelligible**, qu'il lui a ôté 3 écus".

(*Encyclopédie*, volume 11, page 73)

Condillac (1714 - 1780)

“La langue des calculs” (1798)



réfutation de la critique de d'Alembert

développement d'une théorie des abstractions successives
à partir des notions empiriques

premier calcul : calcul avec les doigts

deuxième étape : passage aux noms

condition nécessaire à l'apparition de l'algèbre

passage des grandeurs aux nombres abstraits

troisième étape : invention de signes

les historiens sont encore au travail !

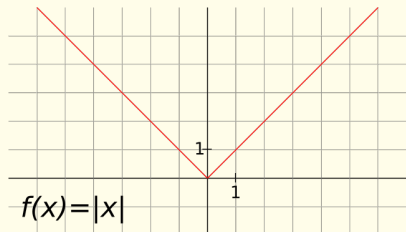
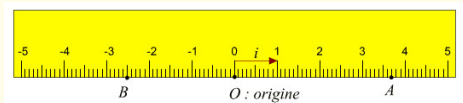
thèse de [André-Jean Glière \(2007\)](#) [directeur : Jean Dhombres]

Histoire et épistémologie des nombres négatifs

de d'Alembert à nos jours : le passage des quantités aux nombres

- 1) programme de d'Alembert [article "négatif" de l'*Encyclopédie*]
- 2) réponse de Lazare Carnot
- 3) réponse de Sylvestre-François Lacroix
avec les points de vue de Clairaut, de Bézout et de Lacroix
- 4) comment enseigner les quantités négatives sans théorie officielle ?
- 5) théorie pure des formes de Hermann Hankel
- 6) naissance de la mesure algébrique dans l'enseignement
compromis historique entre l'algèbre et la géométrie,
remis en question par la tempête formelle des années 1970

valeur absolue



wikipedia

introduire en même temps que les nombres négatifs
leur distance à zéro : la “valeur absolue”

$$|x| = x \quad \text{si } x \text{ positif}$$

$$|x| = -x \quad \text{si } x \text{ négatif}$$

la valeur absolue mesure la “longueur” du nombre

elle est toujours **positive**

elle vérifie $|xy| = |x| |y|$ pour tout x et pour tout y

mais elle pose d'autres difficultés !

merci de votre attention !

14

