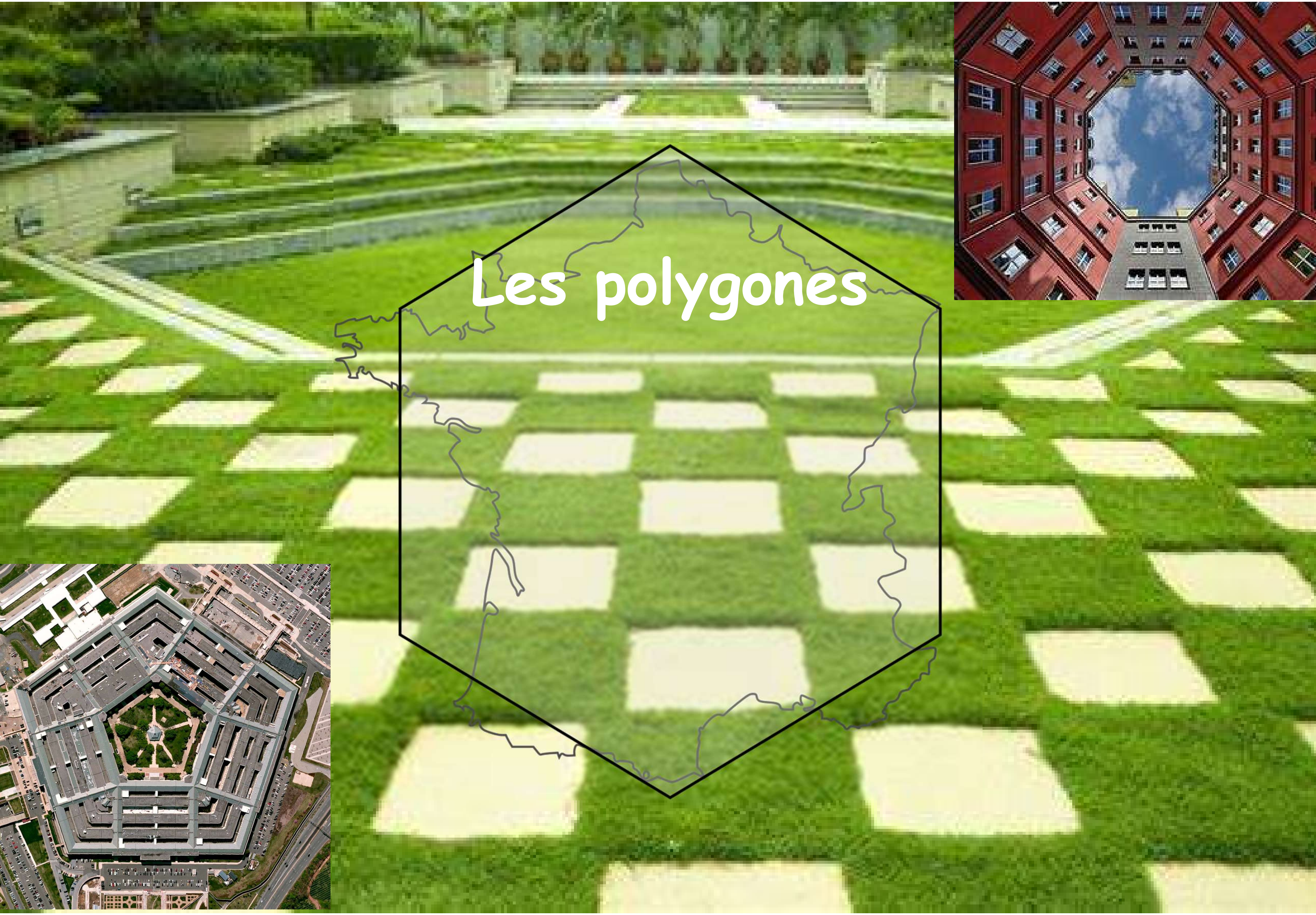
Les polygones



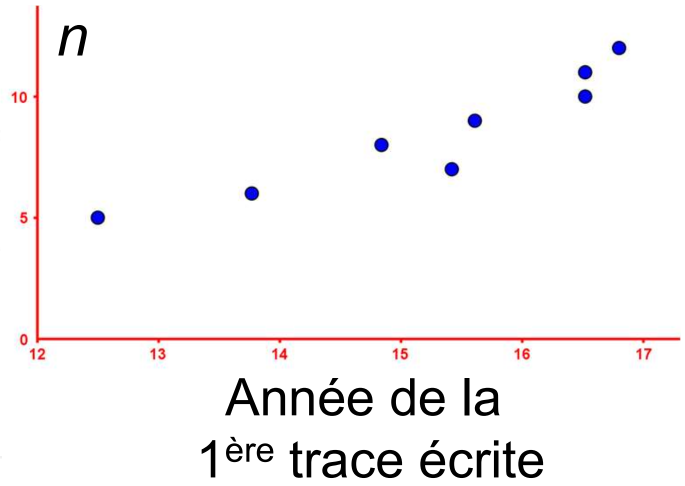
La nomenclature

Le nom d'un polygone n'est autre, en règle générale, que son « nombre d'angles » qu'il suffit donc d'ajouter au suffixe *gone*.

Nombre de côtés	Nom	Première trace écrite
5 πεντα = cinq	Pentagone	XIII^{e} siècle
6 εξα = six	Hexagone	1377, « *exagone* » chez Nicolas Oresme dans *Le livre du ciel et du monde*
7 επτα = sept	Heptagone	1542 chez Charles de Bouelles dans *Géométrie pratique*
8 οκτω = huit	Octogone	1484 chez Nicolas Chuquet dans *Géométrie*
9 εννε = neuf	Ennéagone	1561 chez Collage dans *Polygraphie*
10 δεκα = dix	Décagone	1652 chez Meynier dans *Géométrie*
11 ἐδεκα = onze	Hendécagone	1652
12 δωδεκα = douze	Dodécagone	1680
15 πενταδεκα = quinze	Pentadécagone	

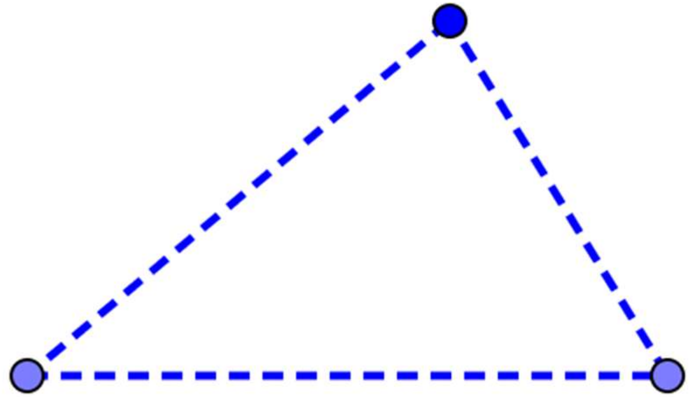
angle → Triangle

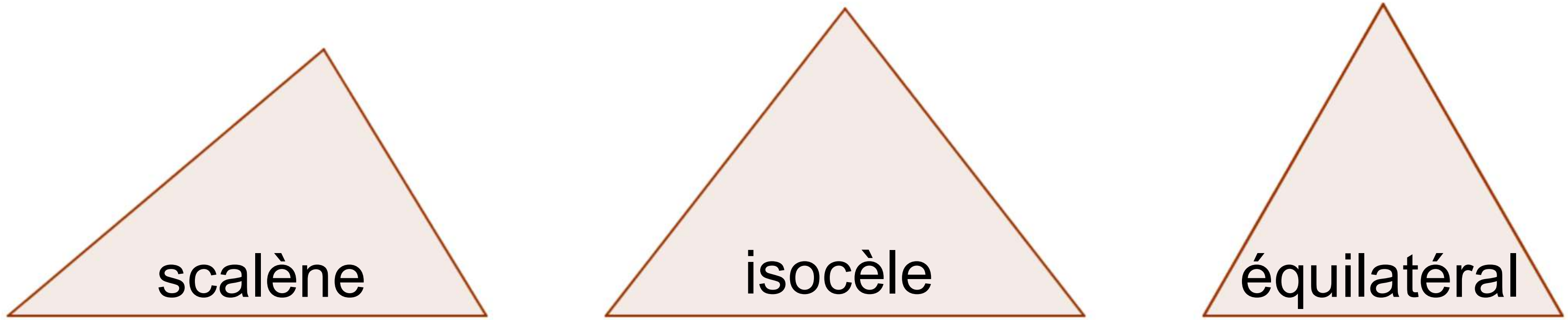
côté → Quadrilatère



Kafémath du 14 novembre 2013: « Trois points c’est tout! »

3 points = triangle unique





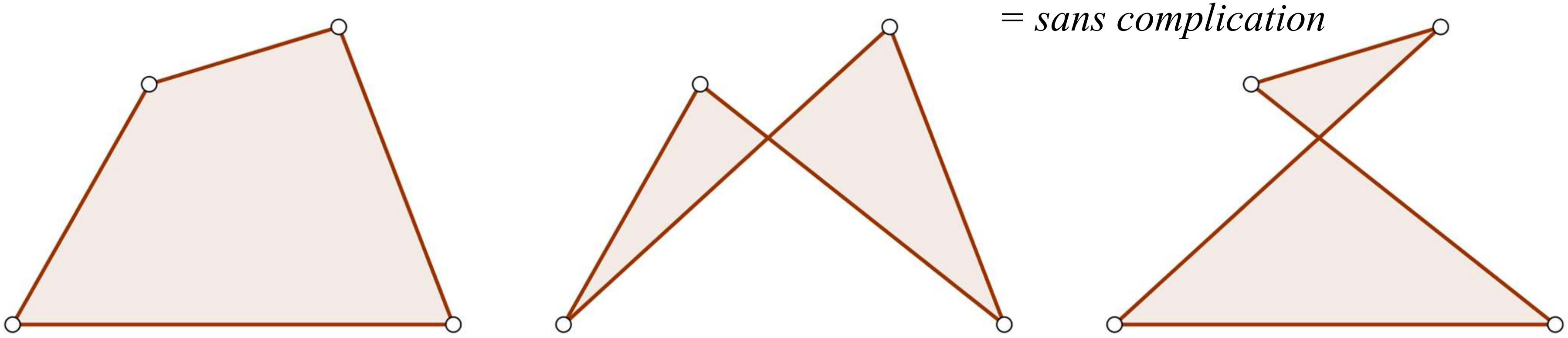
boîteux *jambes égales* *côtés égaux*

Les polygones

$n = 4$

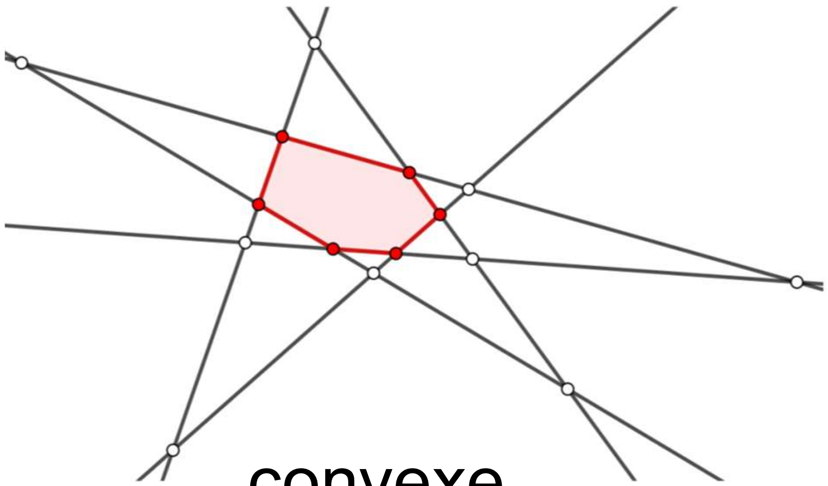
4 points donnés = trois quadrilatères (aploïques)

= sans complication

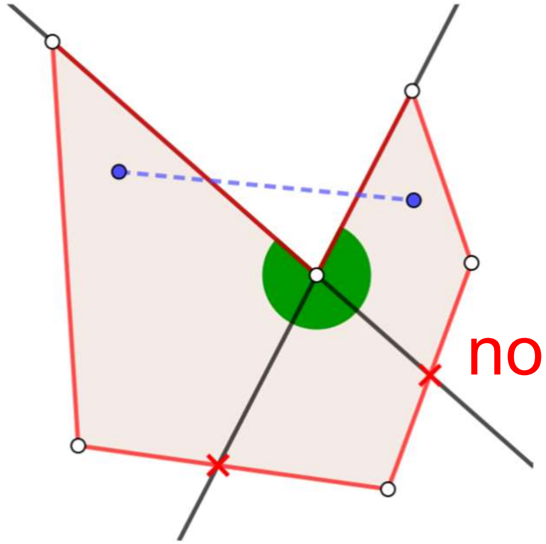


simple (acoptique) — croisé — croisé

= ne se coupe pas



convexe

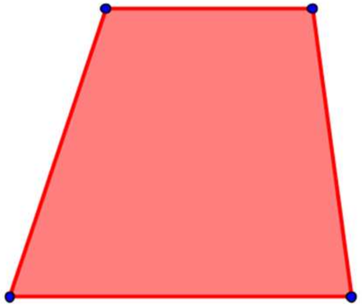


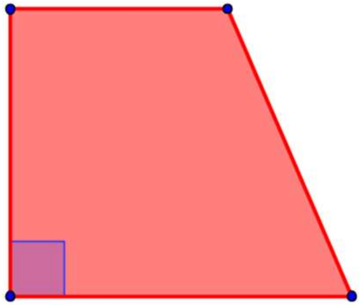
non convexe

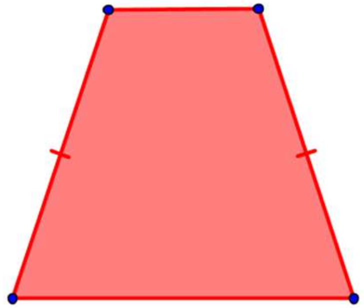
nombre de type de pentagones = 11

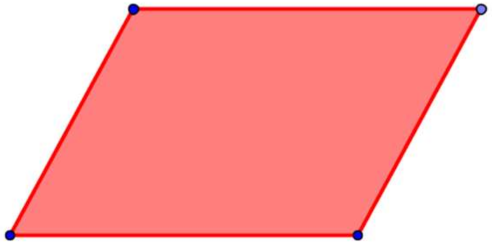
nombre de type d'hexagones = 73?

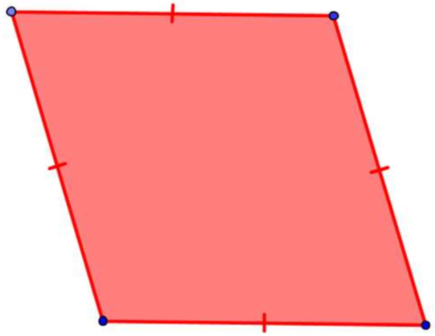
Les quadrilatères simples

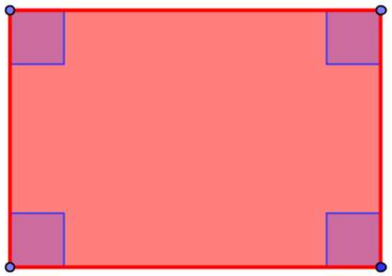

scalène

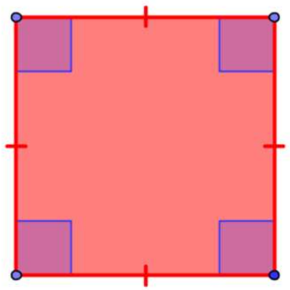

trapèze rectangle


isocèle


parallèlogramme


losange (rhombe)

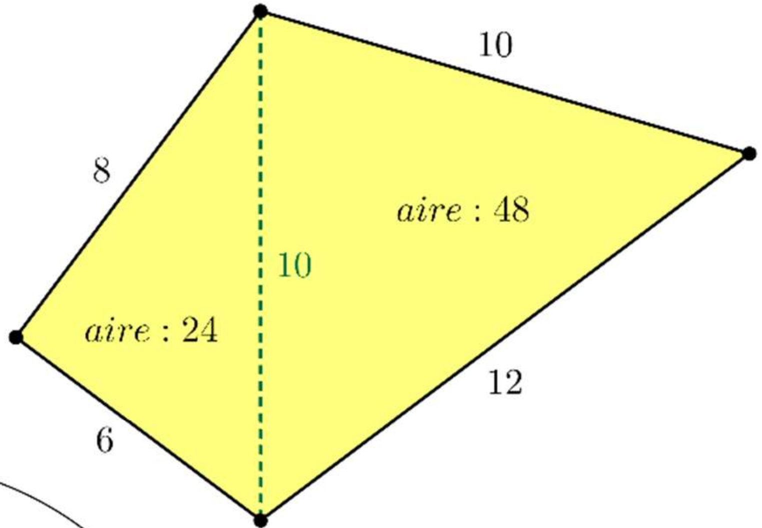

rectangle

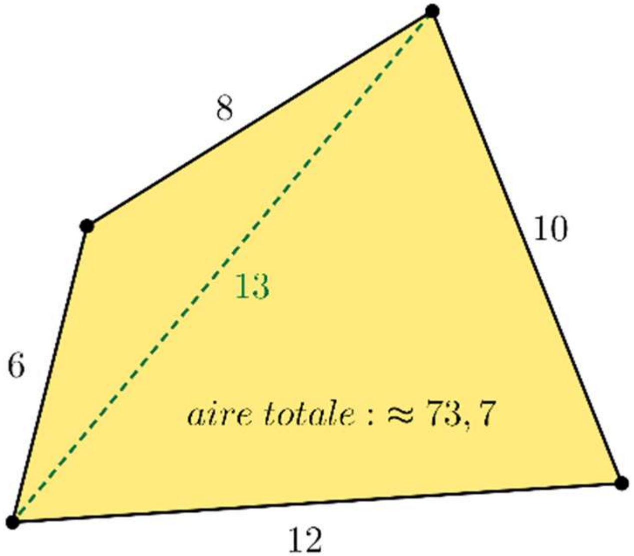

carré

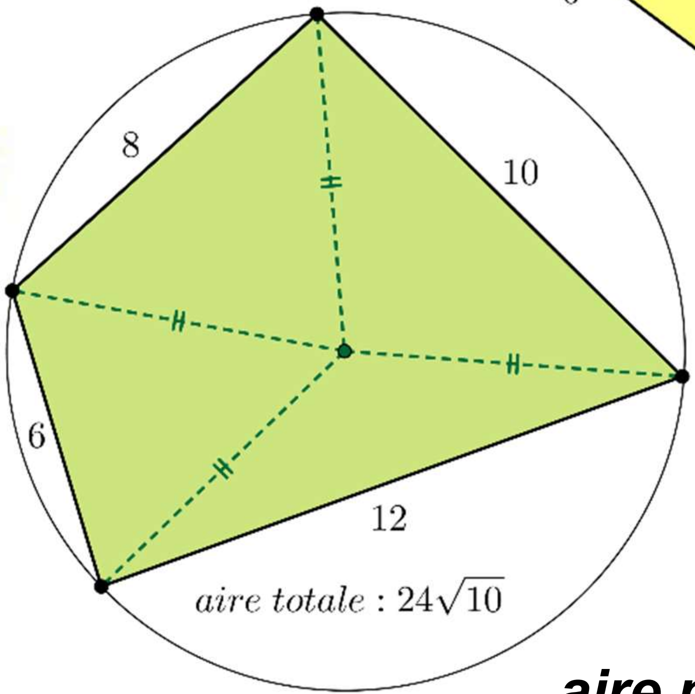
Les quadrilatères simples

problème pépère

Mêmes côtés, même aire?







Formules de surfaces:

Triangle : Formule de Héron d'Alexandrie

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

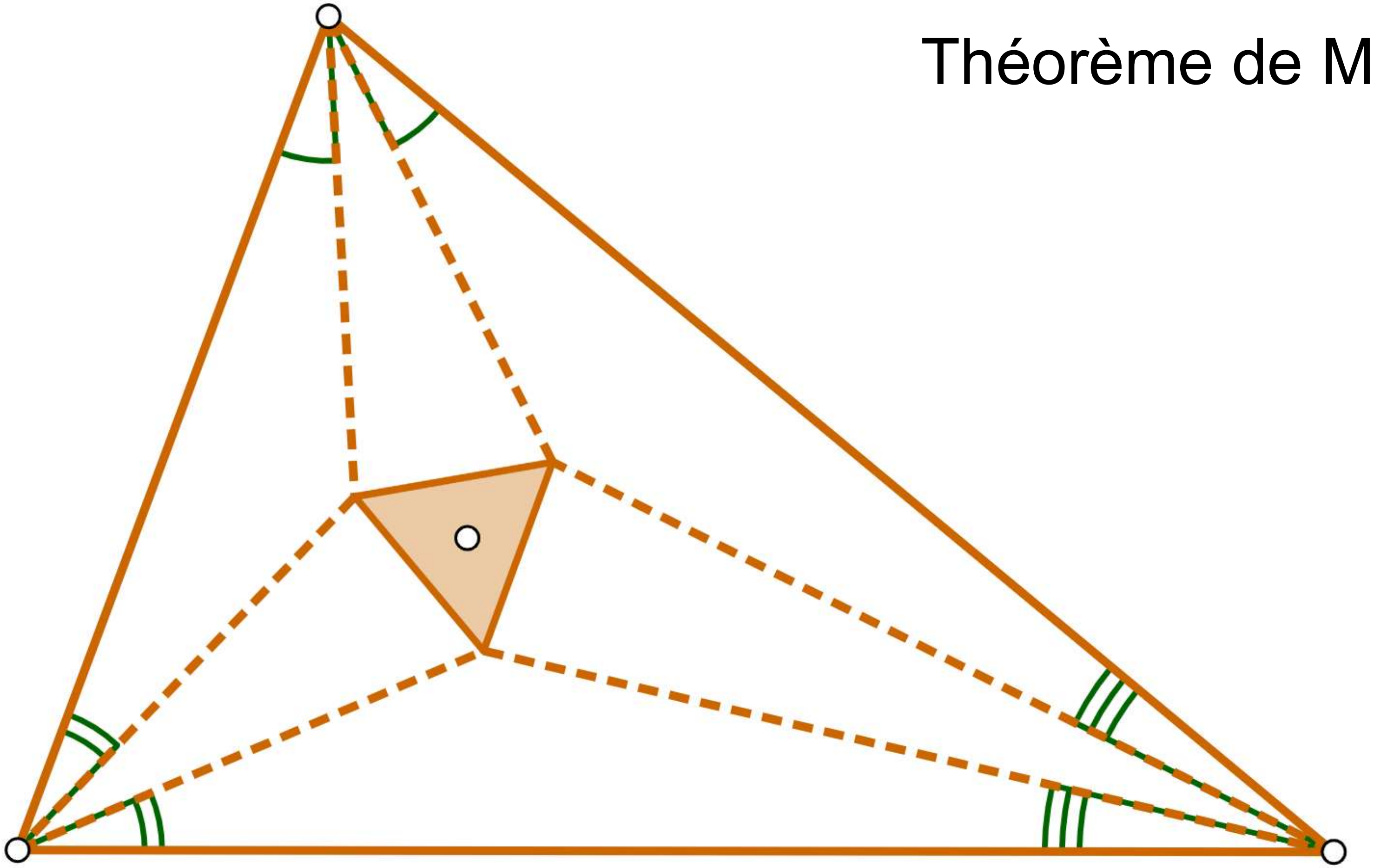
Quadrilatère inscriptible:

Formule de Brahmagupta (598-670)

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

aire maximale pour un quadrilatère inscriptible

Théorème de Morley



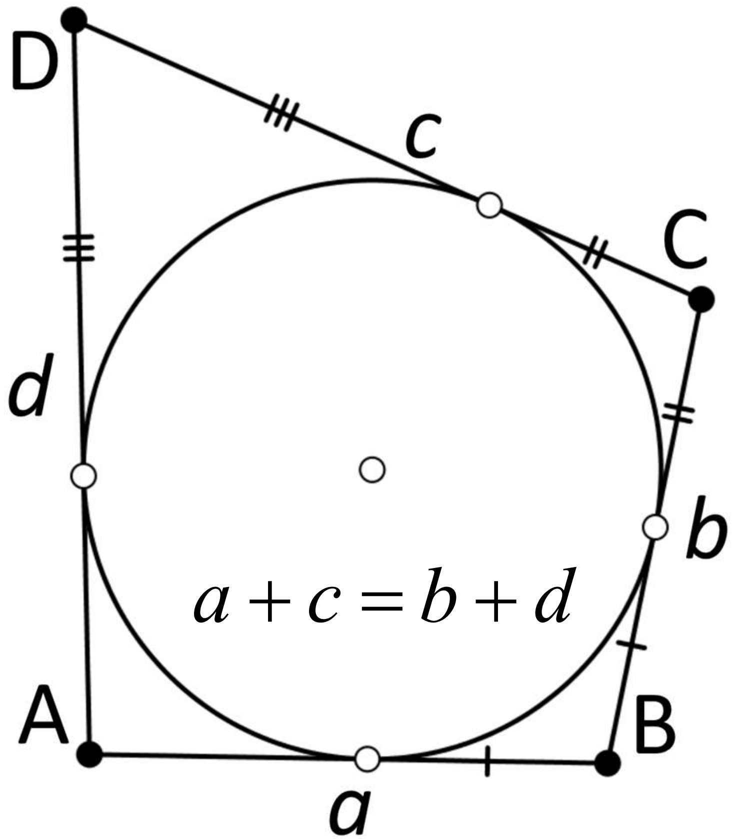
Quand l'ordre naît du désordre

Les polygones circonscrits

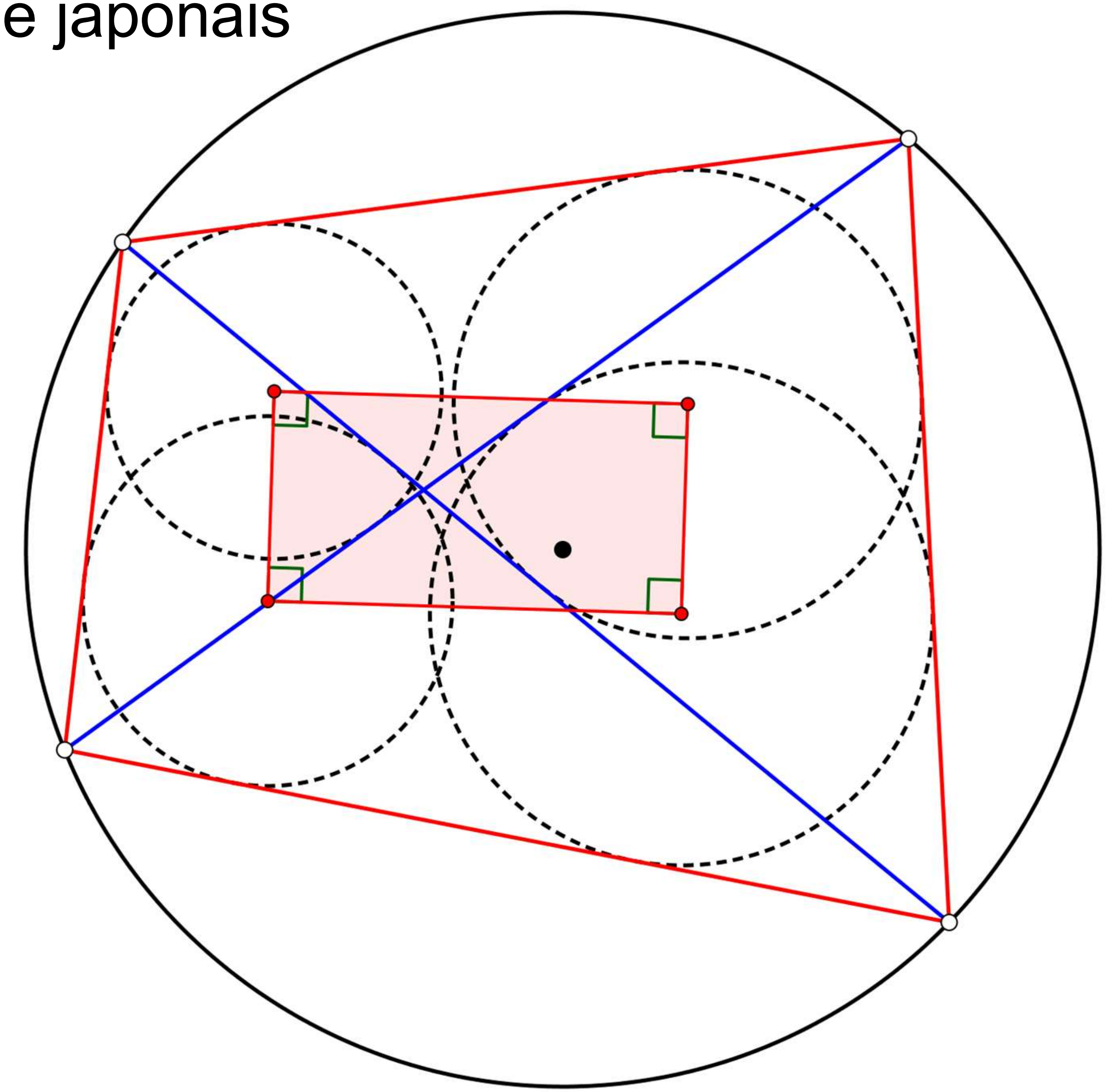
Henri Pitot (1695-1771) démontre en 1725 que :

Si un polygone $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ est circonscrit à un cercle, on a :

$$A_1A_2 + A_3A_4 + \ldots + A_{2n-1}A_{2n} = A_2A_3 + A_4A_5 + \ldots + A_{2n}A_1$$



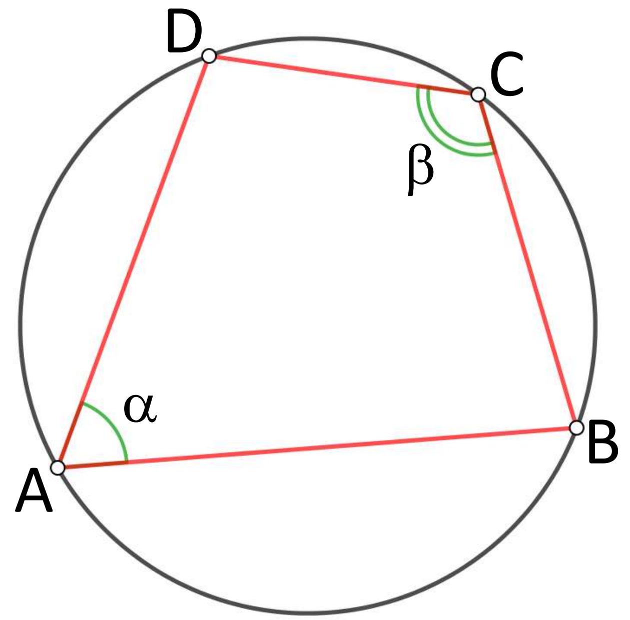
Théorème japonais



Quadrilatères inscriptibles

Ptolémée (~100, ~168)

Quadrilatère ABCD inscriptible: $\alpha + \beta = \pi$



$$\alpha = \operatorname{Arg}\left[\frac{d-a}{b-a}\right]$$

$$\beta = \operatorname{Arg}\left[\frac{b-c}{d-c}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d-a}{b-a}\cdot\frac{b-c}{d-c} \text{ réel } < 0$$

$$\left|(d-a)(c-b)+(b-a)(d-c)\right| = \left|(d-a)(c-b)\right| + \left|(b-a)(d-c)\right|$$

Tautologie : $(c-a)(d-b) = (b-a)(d-c) + (c-b)(d-a)$

Théorème de Ptolémée :

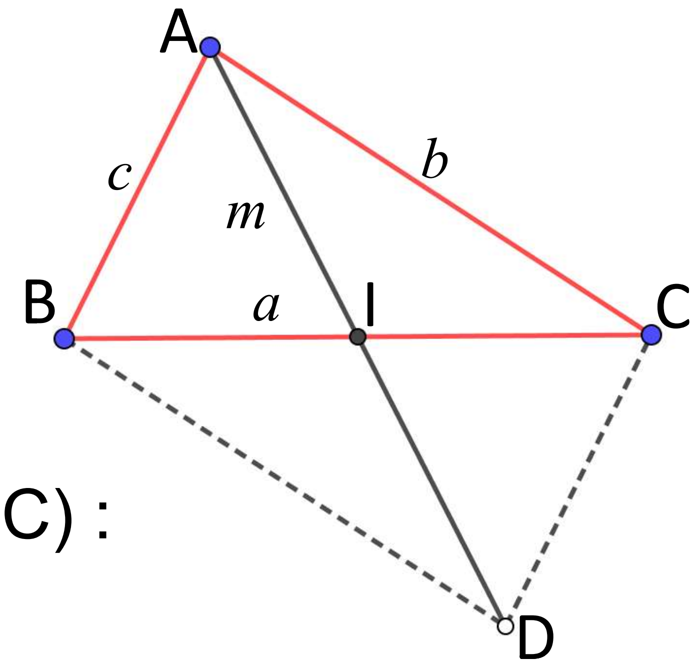
$$\boxed{\mathbf{AC.BD = AB.CD + BC.AD}}$$

Produit des diagonales = somme des produits des côtés opposés

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2+\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2=2(b^2+c^2)$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$$



Théorème de la moyenne (triangle ABC) :

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2/2 + 2m^2}$$

Egalité du parallélogramme ABCD : $\boldsymbol{2b^2 + 2c^2 = a^2 + (2m)^2}$

somme des carrés des longueurs des côtés

=

somme des carrés des diagonales

En 1748, généralisation d'Euler pour les quadrilatères convexes.

Tautologie: $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2$

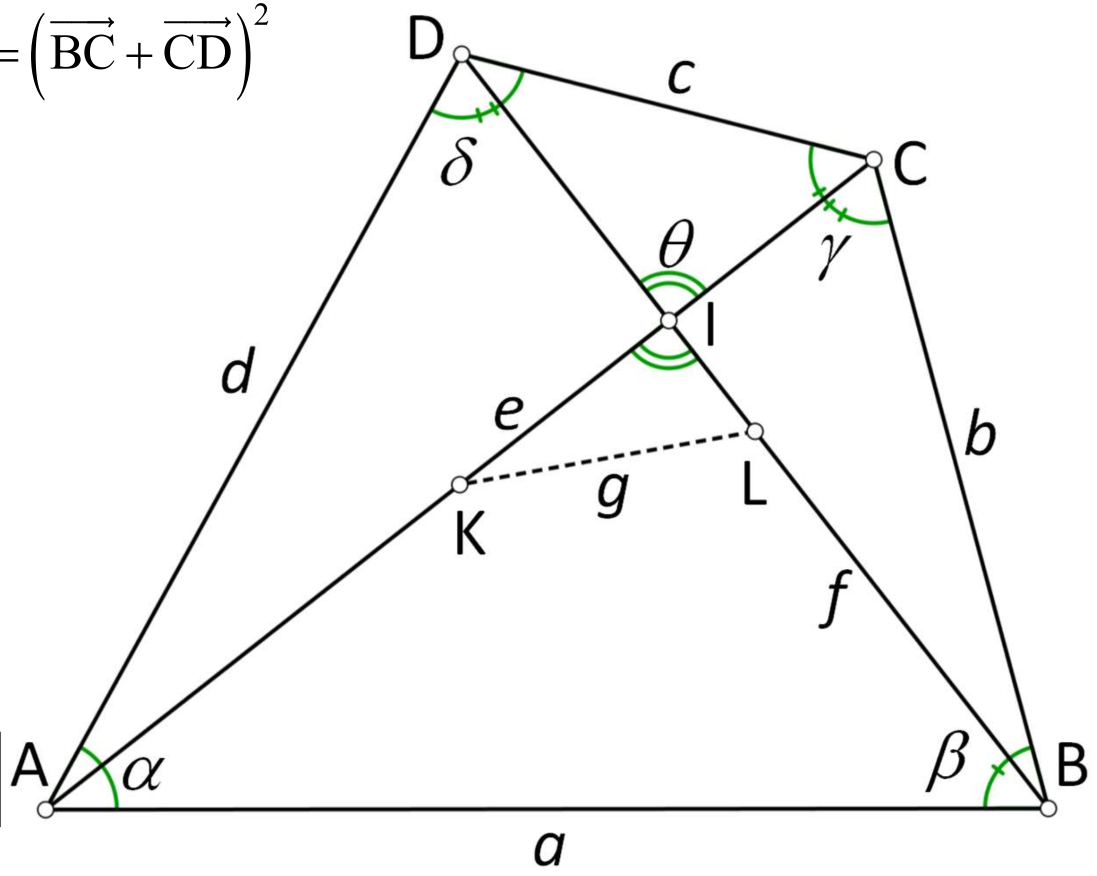
Diagonales: $e^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)^2$ $f^2=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)^2$

$$\left.\begin{aligned}2\overrightarrow{AK}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{AL}&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\end{aligned}\right\}\quad 2\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$$

$a=\overrightarrow{AB}$ $b=\overrightarrow{BC}$ $c=\overrightarrow{CD}$

$$a+b+c=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$

$$\boxed{e^2+f^2+4g^2=a^2+b^2+c^2+d^2}$$



$g = 0$ => égalité du parallélogramme

$$\Sigma_{\text{ABD}} = \text{AI} \cdot f \cdot \sin(\theta) / 2$$

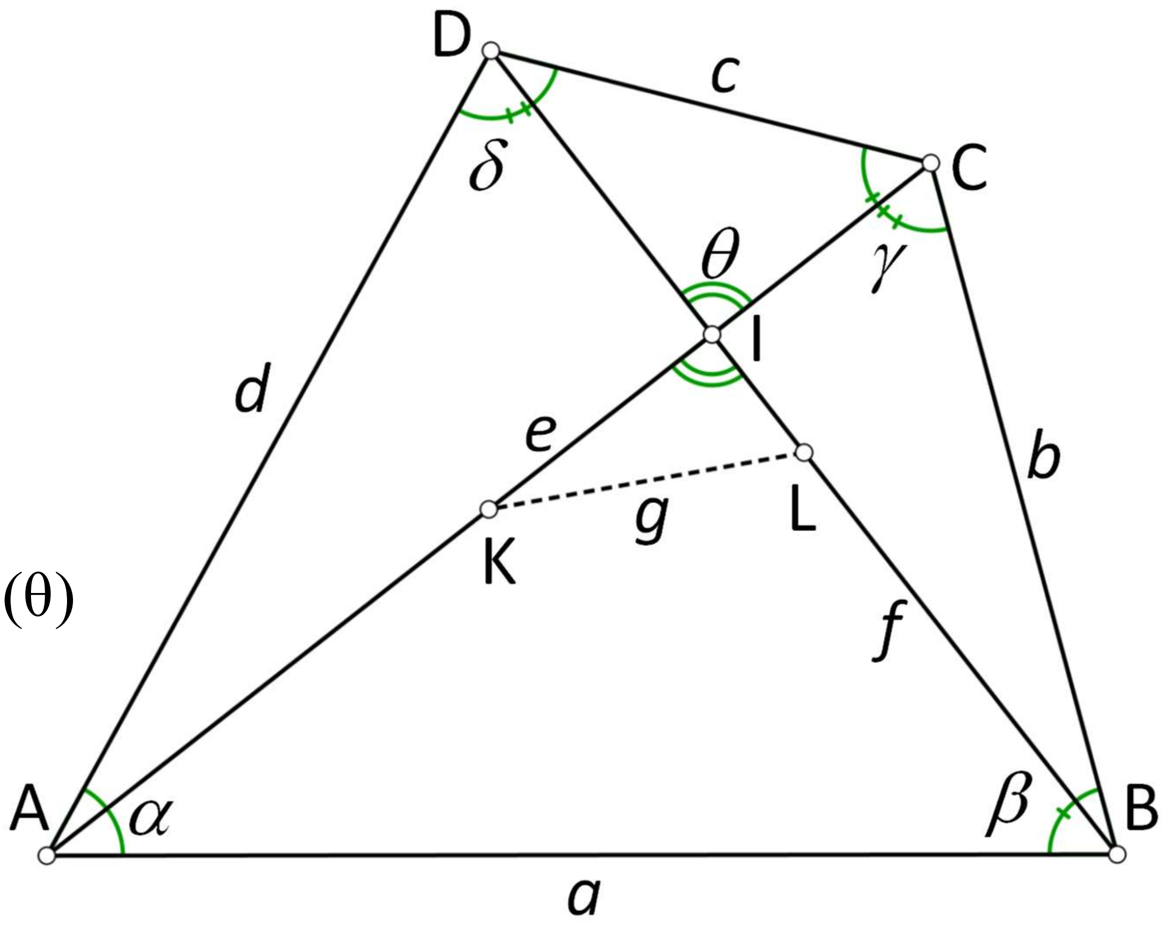
$$\Sigma_{\text{BCD}} = \text{IC} \cdot f \cdot \sin(\theta) / 2$$

$$\Sigma_{\text{ABCD}} = \text{e} \cdot f \cdot \sin(\theta) / 2$$

Loi des cosinus:

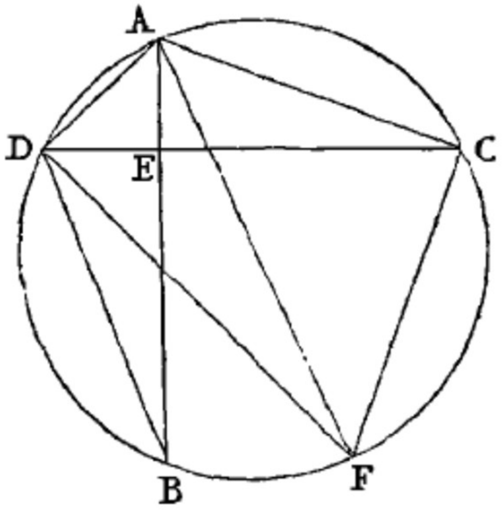
$$\left|a^2 - b^2 + c^2 - d^2\right| = 2ef\cos(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{4\Sigma_{\text{ABCD}}}{\left|a^2 - b^2 + c^2 - d^2\right|}$$



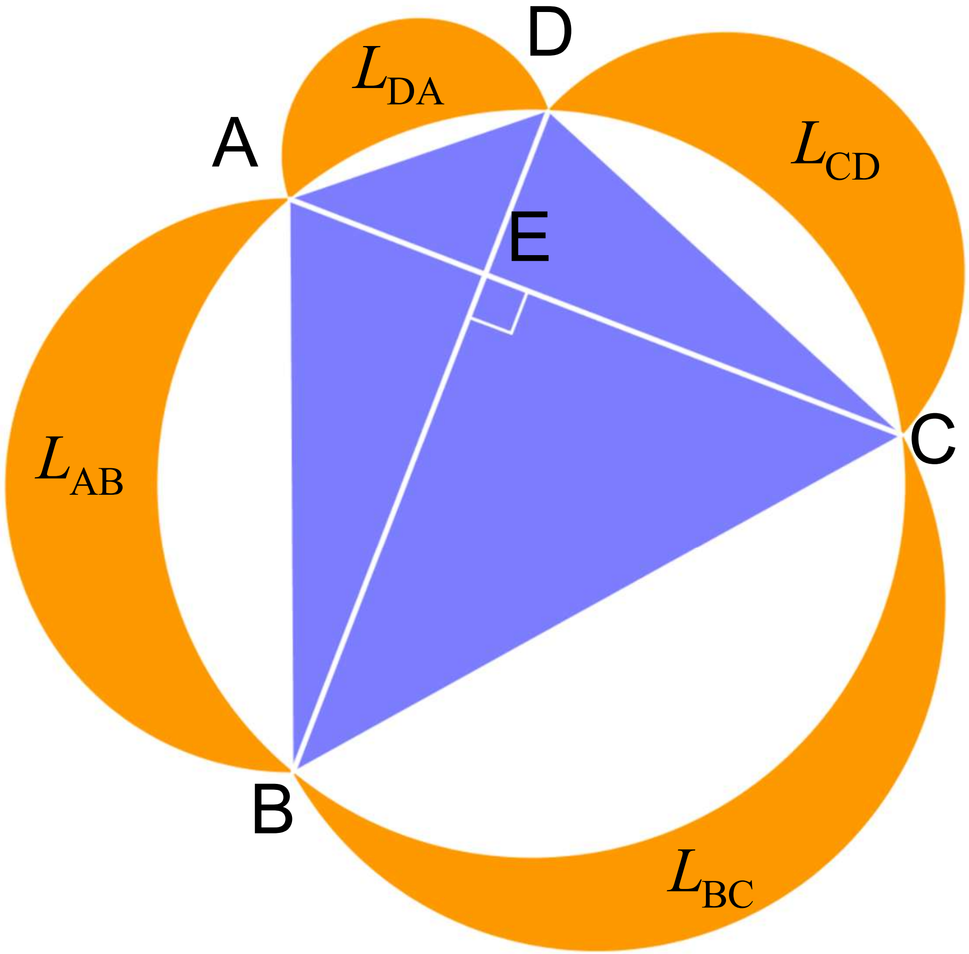
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = \text{AI}^2 + \text{BI}^2 + \text{CI}^2 + \text{DI}^2}$$



Généralisation des lunules d'Hippocrate

(*F. Sammarcelli*)



$$\Sigma_{ABD} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}$$

Quadrilatères convexes

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma = \mathrm{e}\cdot f\cdot\sin(\theta)/2\\&\left|a^2-b^2+c^2-d^2\right| = 2ef\cos(\theta)\end{aligned}\right\}\quad \Sigma = \frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2-\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)^2}$$

J. L. Coolidge (1932) $p=(a+b+c+d)/2$

$$\Sigma = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-\frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)}$$

C. Bretschneider (1842)

$$\Sigma = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

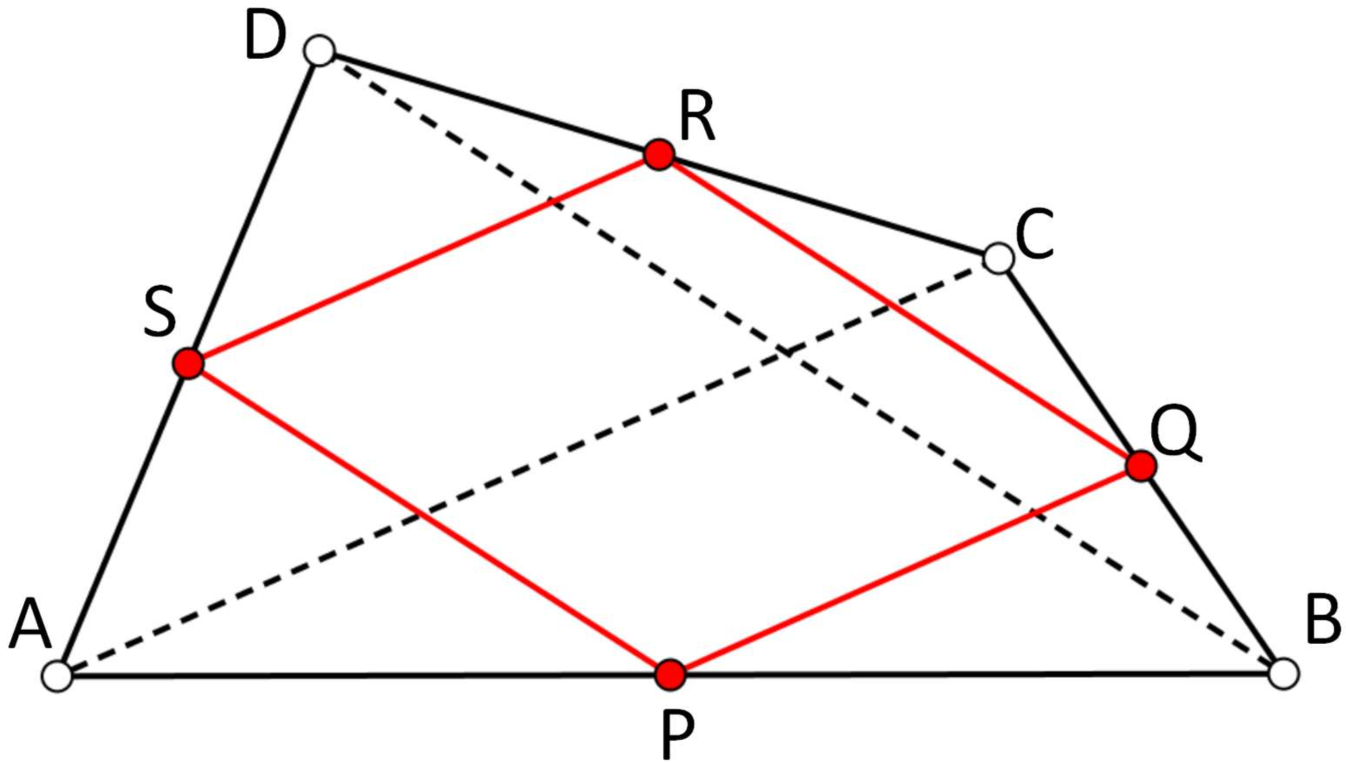
F. Sammarcelli (2024)

$$\Sigma = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{4}\right)}$$

$d=0 \Rightarrow$ Héron Quadrilatère inscriptible : $ac+bd=ef$ ou $\alpha+\gamma=\beta+\delta=\pi$

Pierre Varignon (1654-1722)

P, Q, R, S milieux des côtés



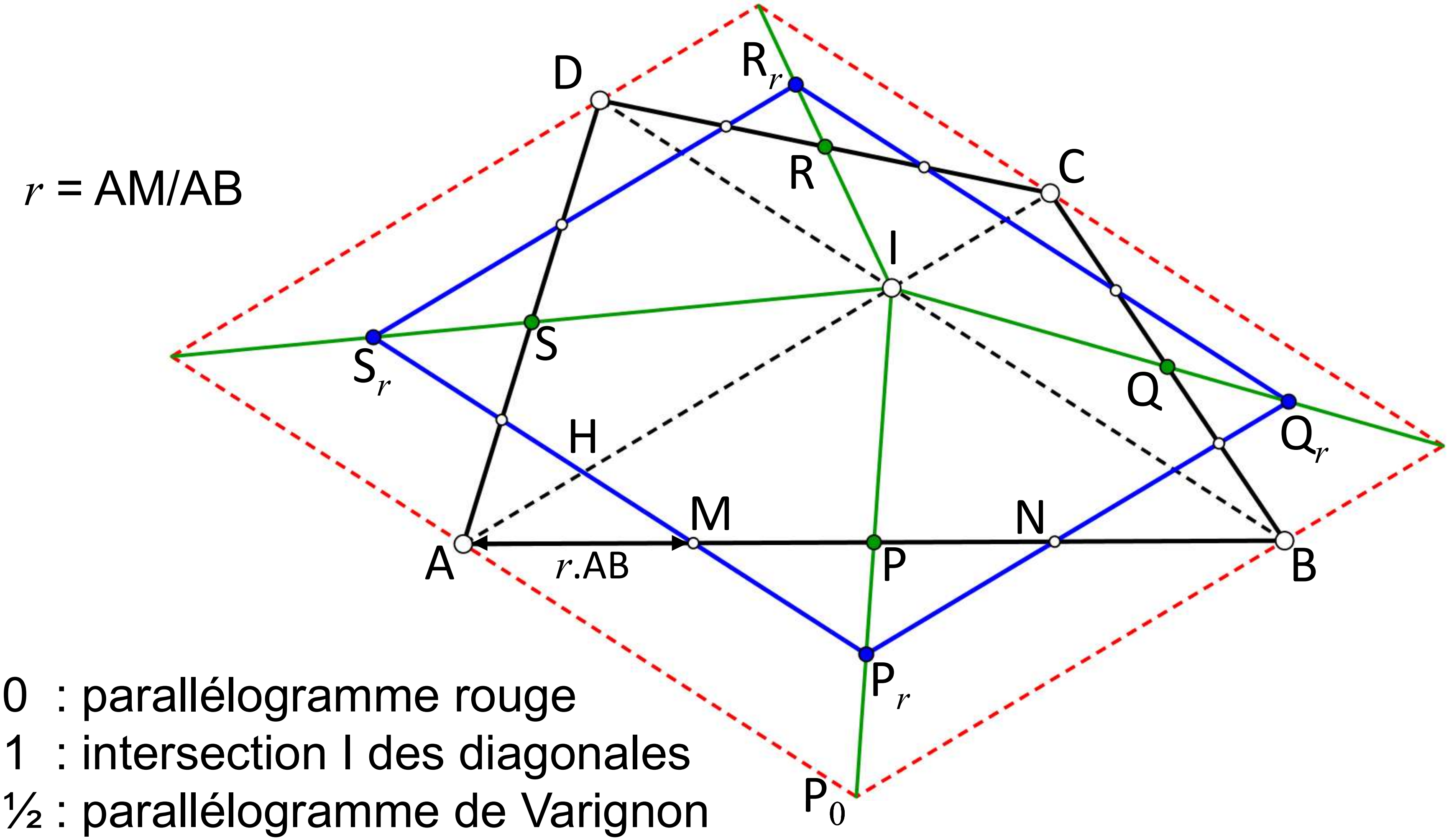
PQRS Parallélogramme

$$\Sigma_{PQRS} = \Sigma_{ABCD}/2$$

Généralisation de Varignon

P, Q, R, S milieux des côtés

Famille de parallélogrammes Π_r: côtés parallèles aux diagonales AC et BD



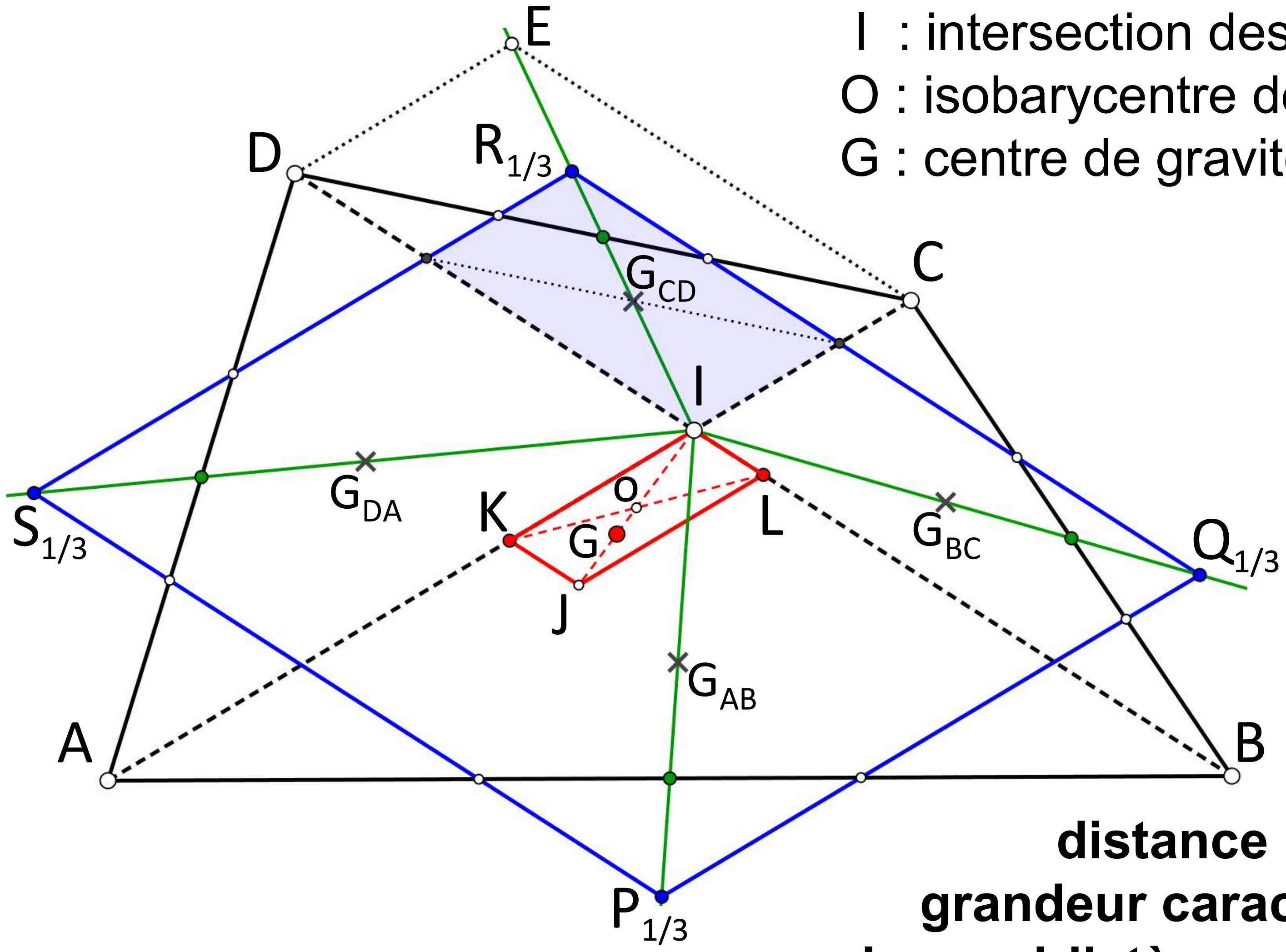
r = 0 : parallélogramme rouge

r = 1 : intersection I des diagonales

r = ½ : parallélogramme de Varignon

Quadrilatères convexes

Théorème de Wittenbauer (1857-1922) : $\Pi_{1/3}$



K, L : milieux des diagonales
I : intersection des diagonales
O : isobarycentre des sommets
G : centre de gravité de la plaque ABCD

OG = OJ/3

I, O et G alignés

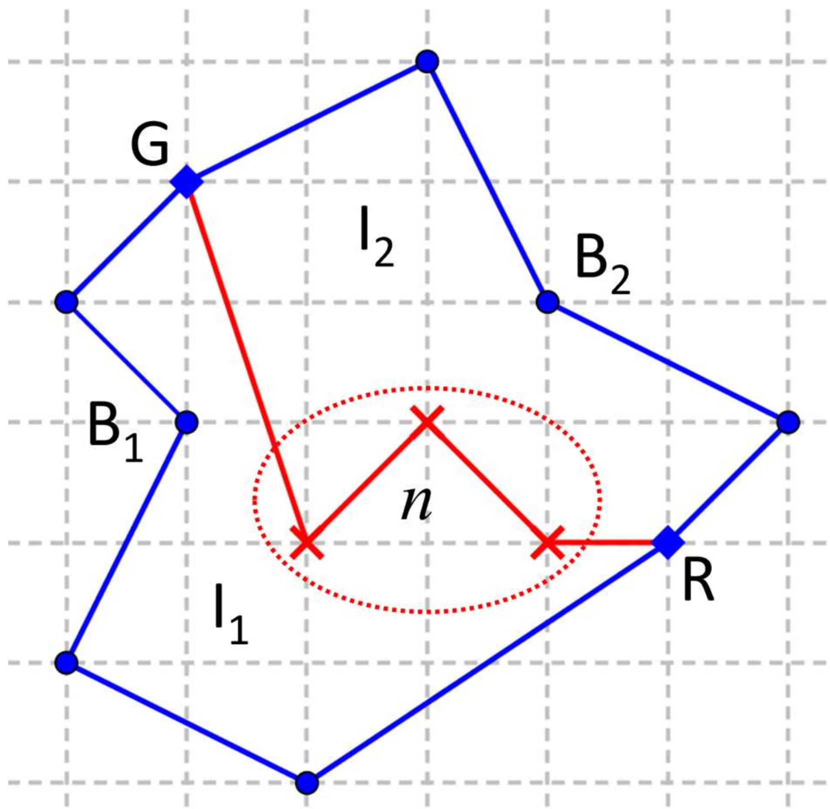
distance KL = grandeur caractéristique du quadrilatère convexe ABCD

Les polygones Georg PICK (1859-1942)

$P(B,I) \quad S(B,I)?$

$$B = B_1 + B_2 - 2(n+1)$$
$$I = I_1 + I_2 + n$$

$$S = S_1 + S_2$$



élimininiation de *n*:

$$B + 2I = B_1 + B_2 + 2I_1 + 2I_2 - 2$$

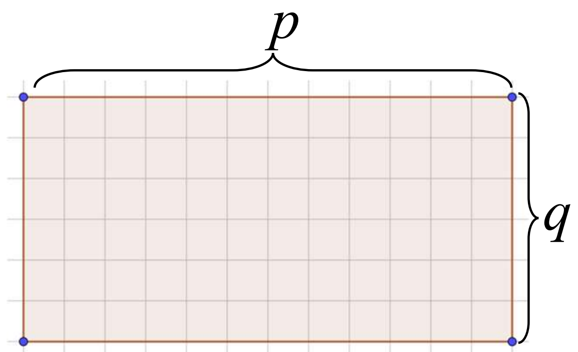
$$B + 2I - 2 = (B_1 + 2I_1 - 2) + (B_2 + +2I_2 - 2)$$

$$S = a(B + 2I - 2) \quad a = ?$$

$$T(3,0) = 1/2 \quad => \quad a = 1/2$$

$$\boxed{S = \frac{B}{2} + I - 1}$$

<u>Intuition-déduction:</u> $\left.\begin{array}{r} B = 2(p+q) \\ I = (p-1)(q-1) \end{array}\right\} => S = pq = \dfrac{B}{2} + I - 1$



On intuite le résultat, on le démontre ensuite…

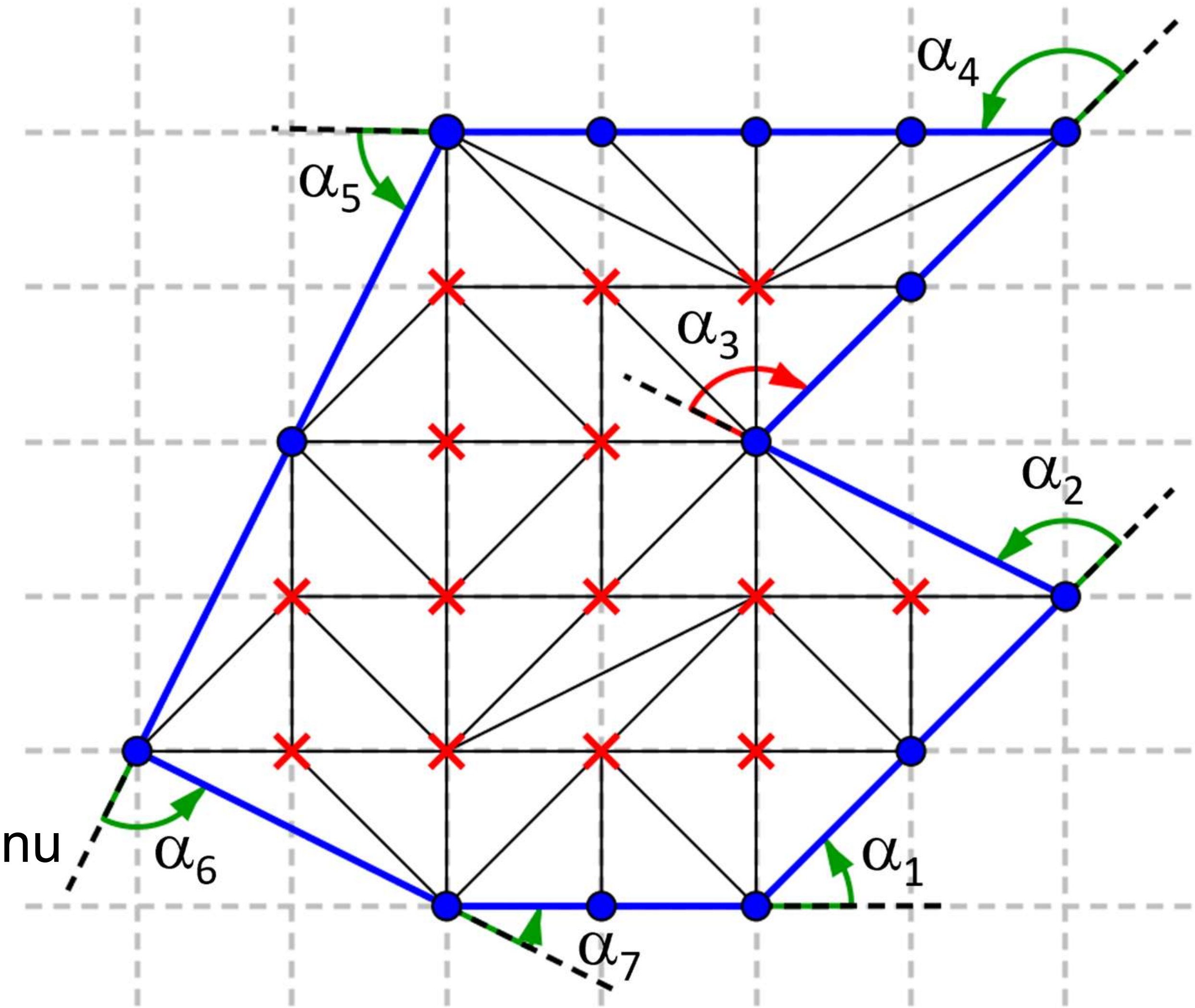
Triangulation par N triangles de surface ½ : S = N/2

Calcul de la somme des angles des triangles de 2 façons

$$\sum_{i=1}^{7} \alpha_i = 2\pi$$

$$N\pi = 2\pi I + \pi B - 2\pi$$

$$\boxed{S = \frac{B}{2} + I - 1}$$



Autre méthode

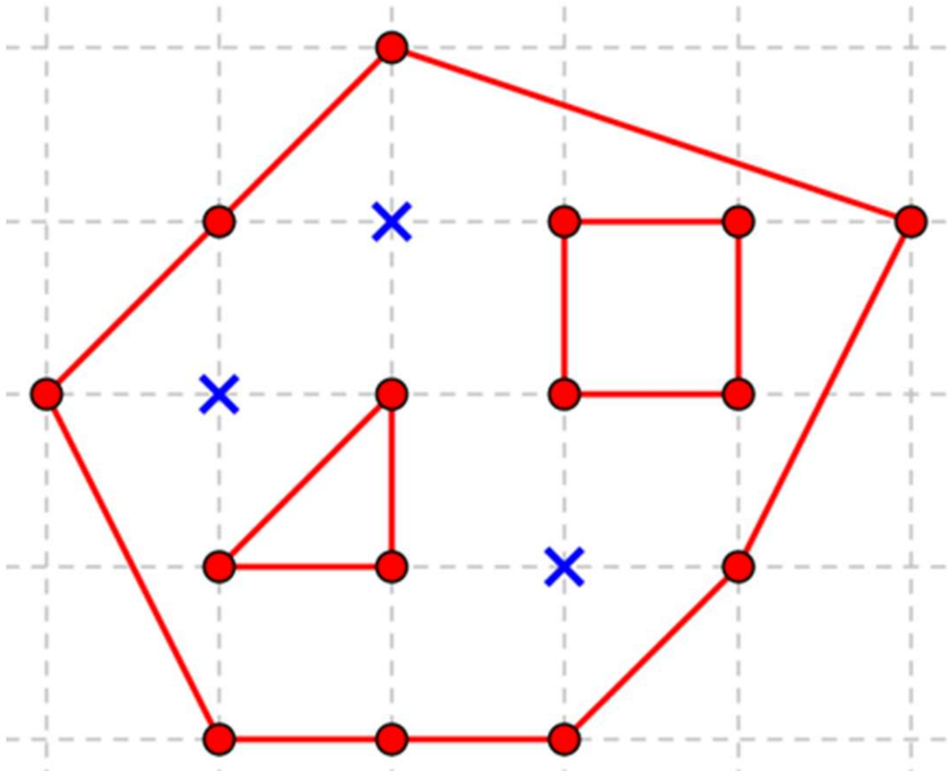
On élève les points intérieurs
et on applique au polyèdre obtenu
la formule d'Euler:

F – A + S = 2

Polygone à *n* trou(s)

Par récurrence:

$$\boxed{S_n = \frac{B}{2} + I + n - 1}$$



Les polygones

Théorème de Bolyai(-Gerwien) :

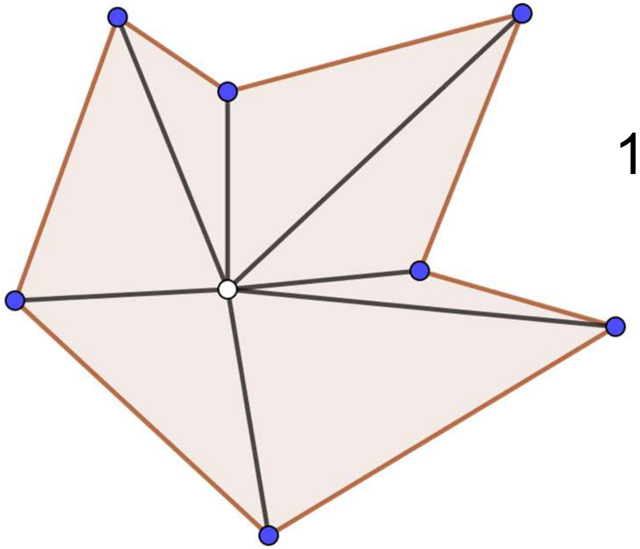
Deux polygones équivalents sont équidécomposables

Équivalent ⇔ même surface

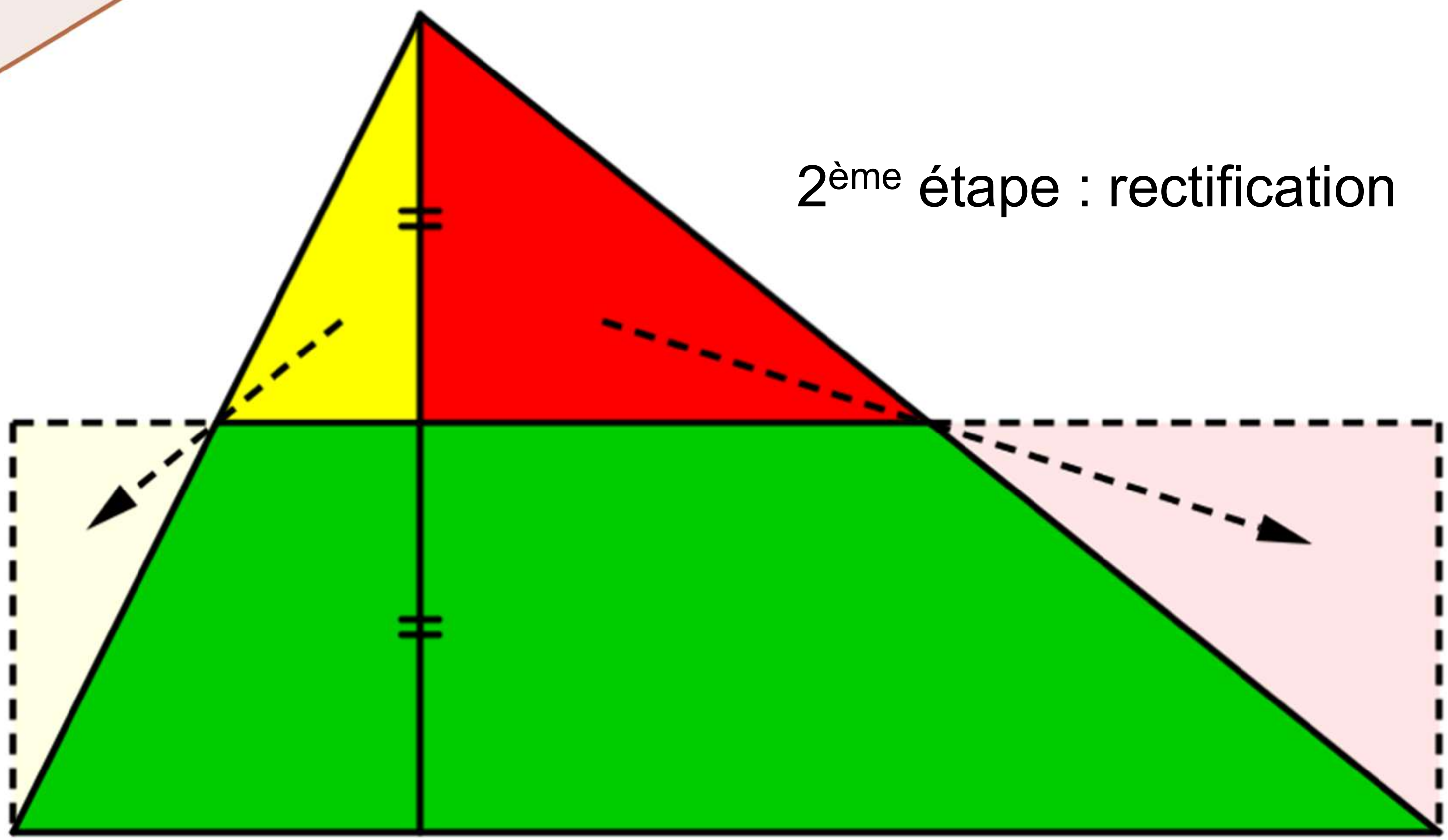
Problème posé par
Bolyai Farkas (1775-156)
en 1790

Démonstration :

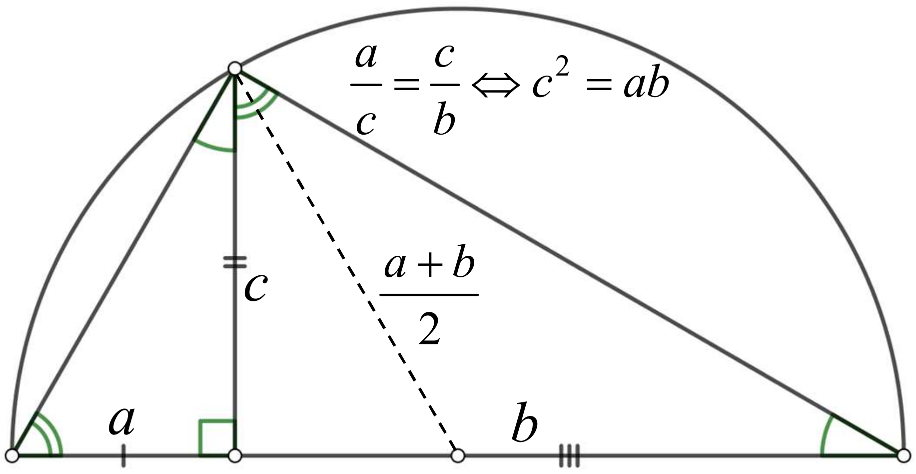
John Lowry : 1814
William Wallace : 1831
Bolyai farkas : 1832
Paul Gerwien : 1833



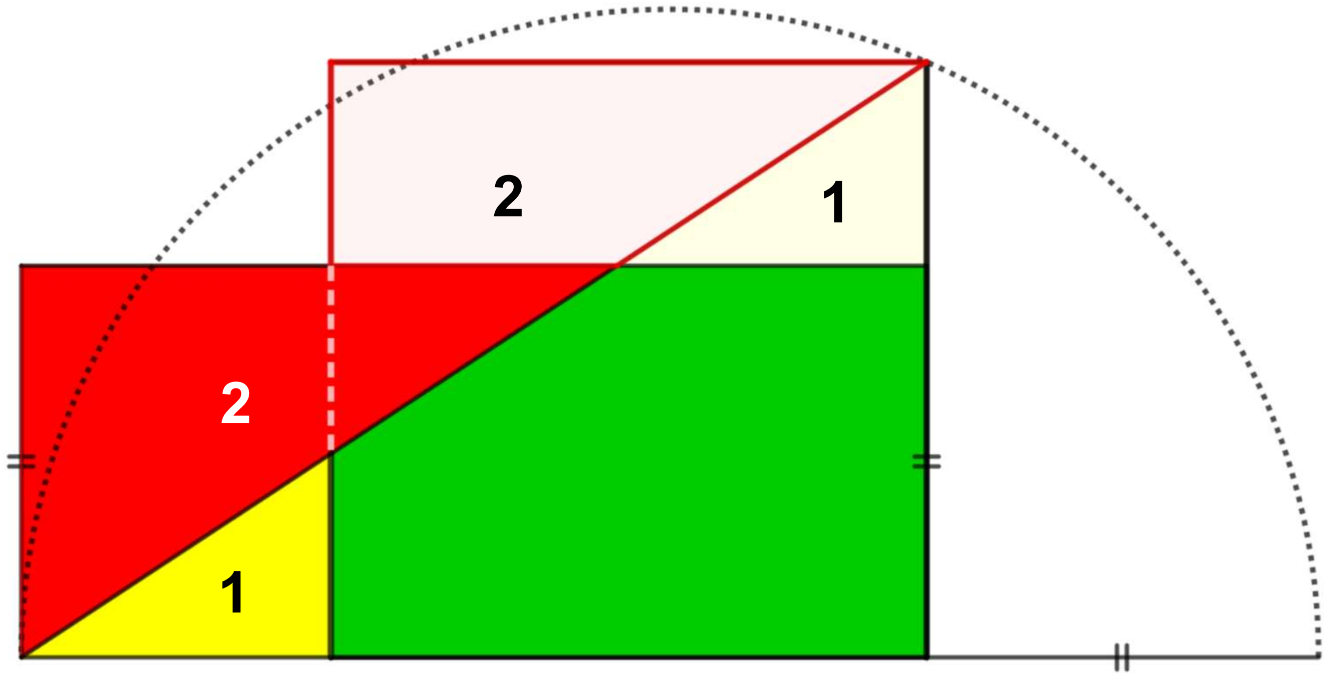
1ère étape: triangulation



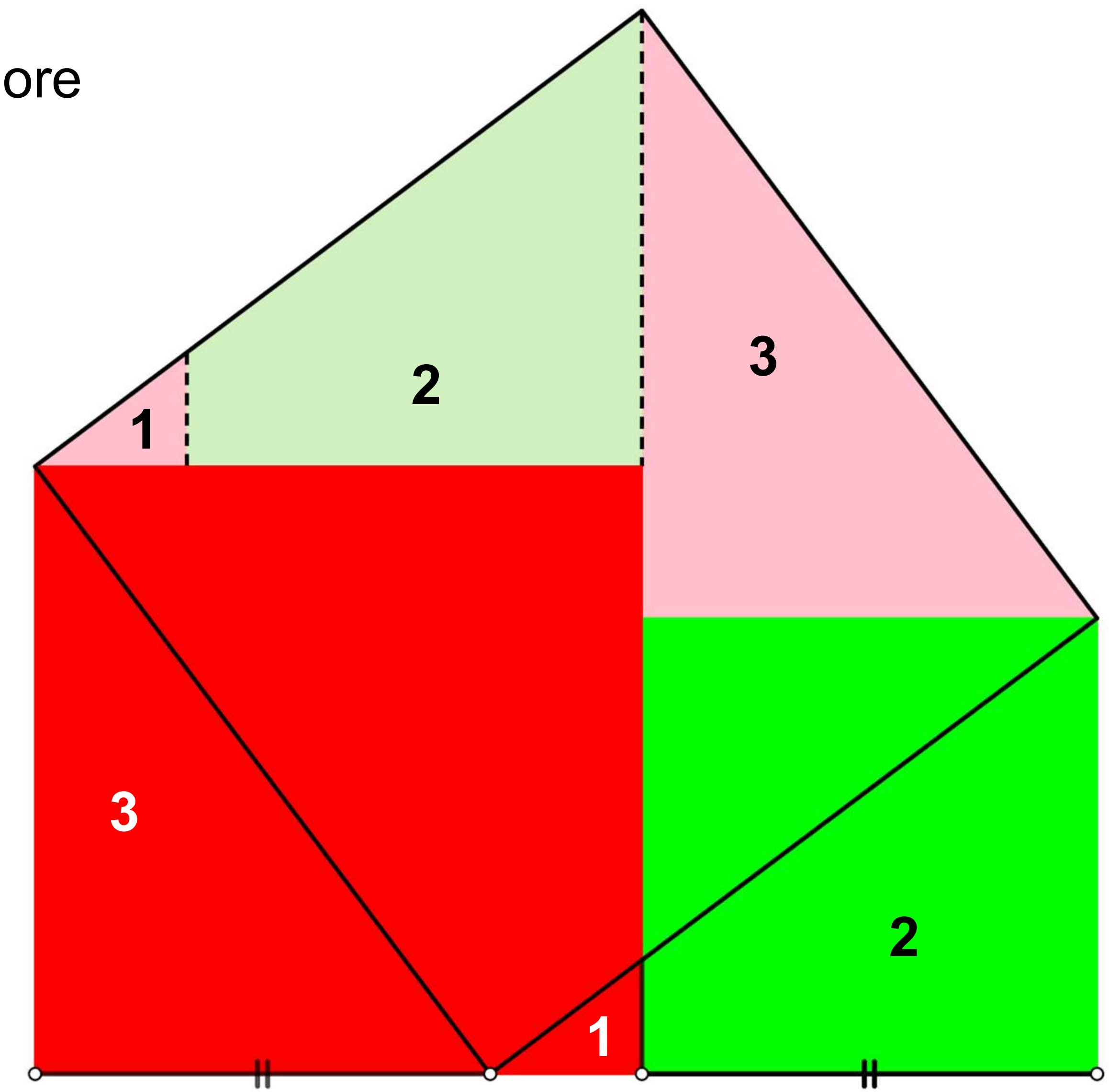
2ème étape : rectification

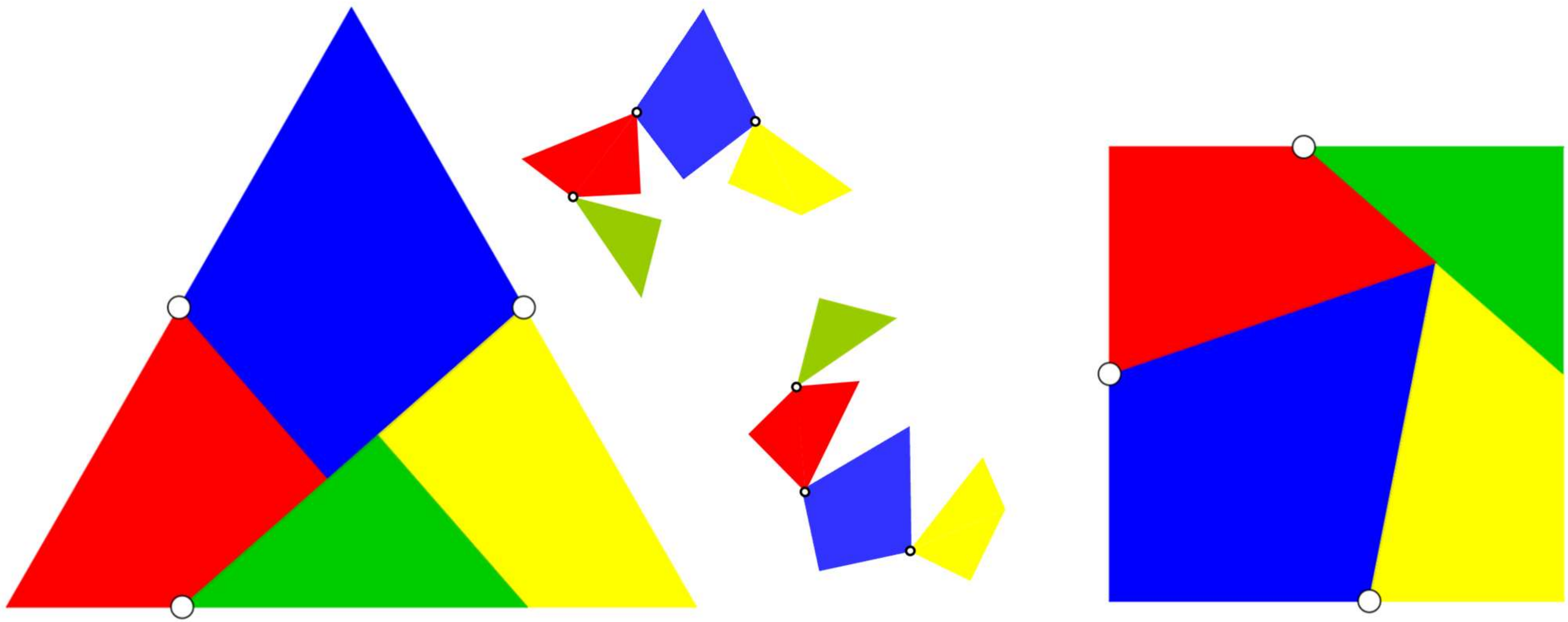


3ème étape : quadrature



4ème étape : Pythagore

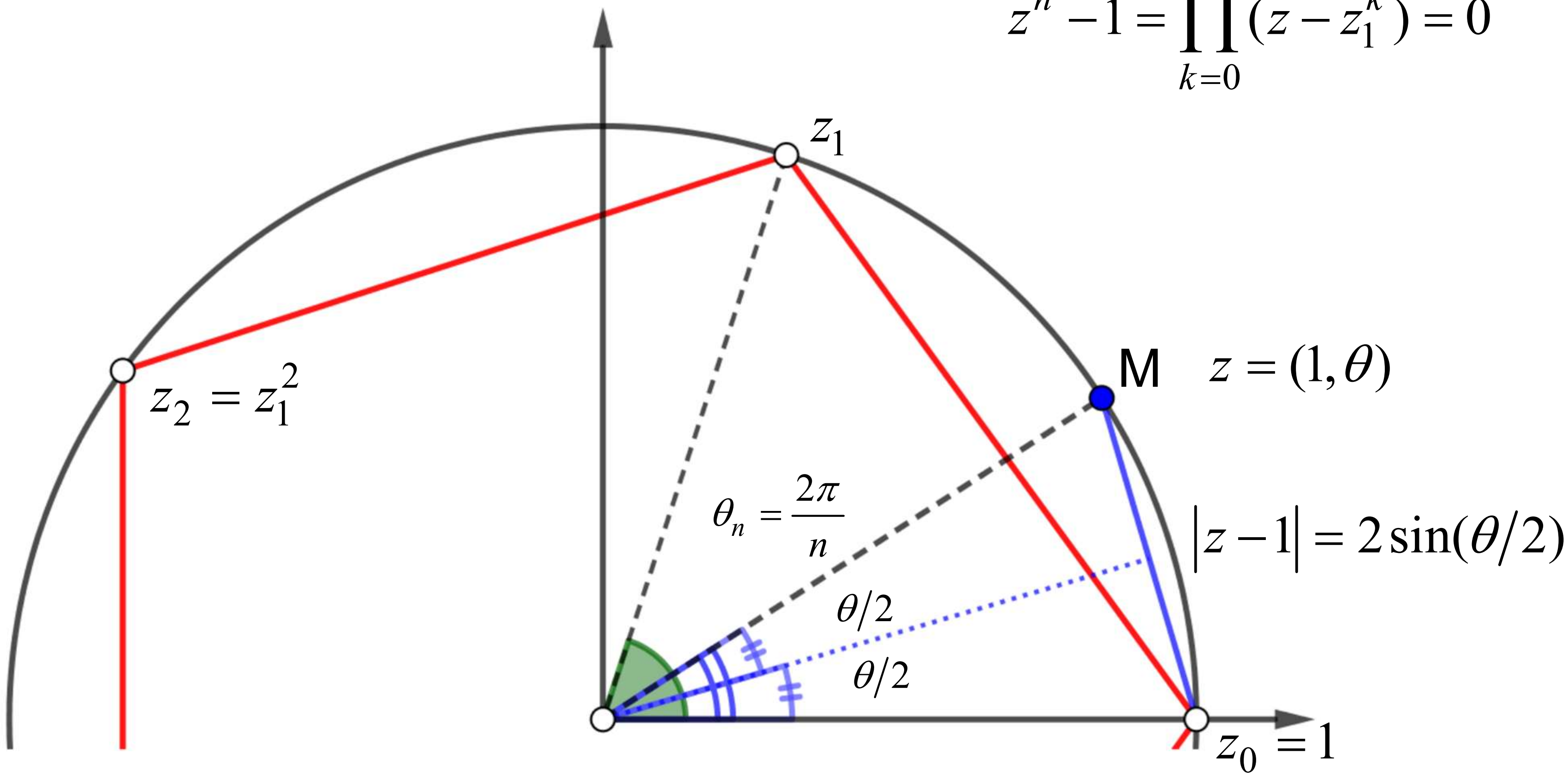




Erik Demaine : toujours possible!

n-gone régulier, sommets d'affixe $z_k = z_1^k$ racines n*ième* de l'unité.

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_1^k) = 0$$



Point courant M. On pose : $\theta = x \cdot \theta_n = \dfrac{2\pi x}{n}$

Produit $\mathrm{P}_n(x)$ des distances de M aux n sommets.

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_1^k)$$

$$\theta = x \cdot \theta_n = \frac{2\pi x}{n}$$

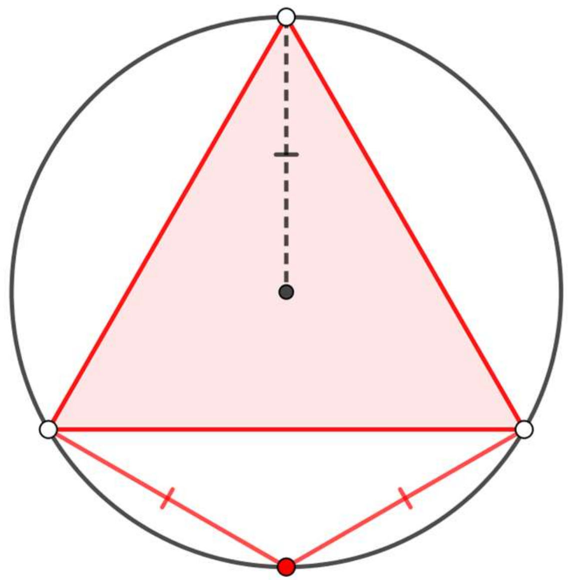
$$\mathrm{P}_n(x+1) = \mathrm{P}_n(x) = \mathrm{P}_n(1-x)$$

$$\mathrm{P}_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} d(\mathrm{M}, S_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \left| z - z_1^k \right| = \left| z^n - 1 \right|$$

$$\mathrm{P}_n(x) = 2\sin(n\theta/2) = 2\sin(\pi x)$$

$$\mathrm{P}_n(1/2) = 2$$

$$\mathrm{P}_n(x) = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} d(\mathrm{M}, S_k) = 1$$



$$Q_n = \prod_{k=1}^{n-1} d(S_0, S_k) \qquad Q_n = \left.\frac{dP_n(x)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{n}{2\pi}\left.\frac{dP_n(x)}{dx}\right|_{x=0} = n$$

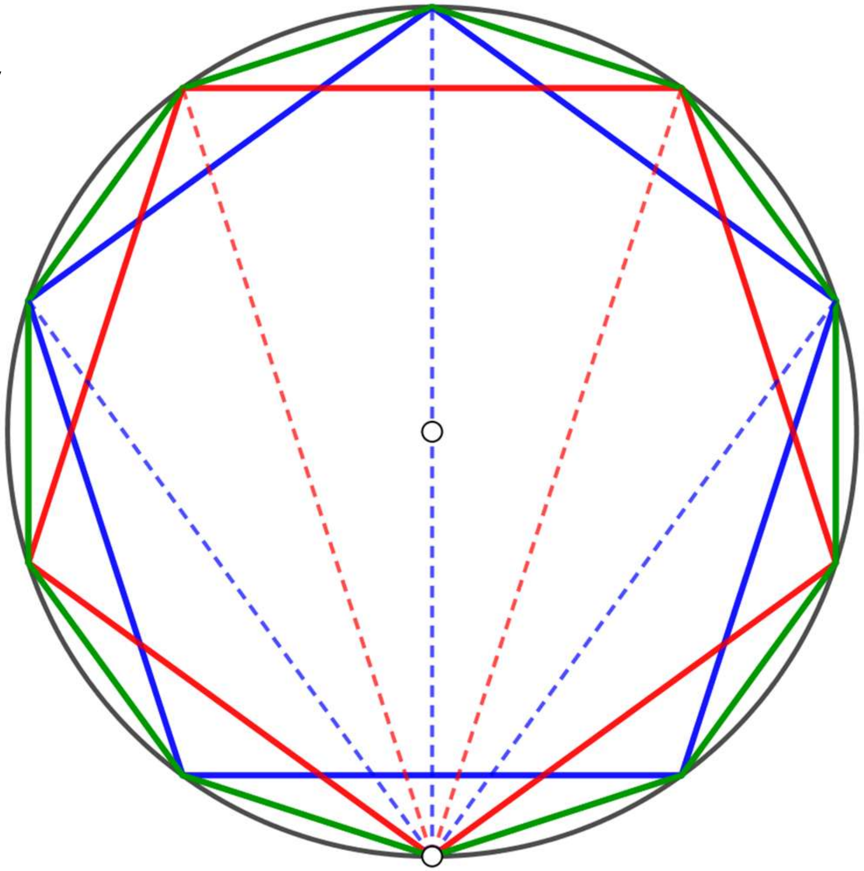
$$Q_{2n} = Q_n \cdot P_n(1/2) \qquad P_n(1/2) = \frac{Q_{2n}}{Q_n} = 2$$

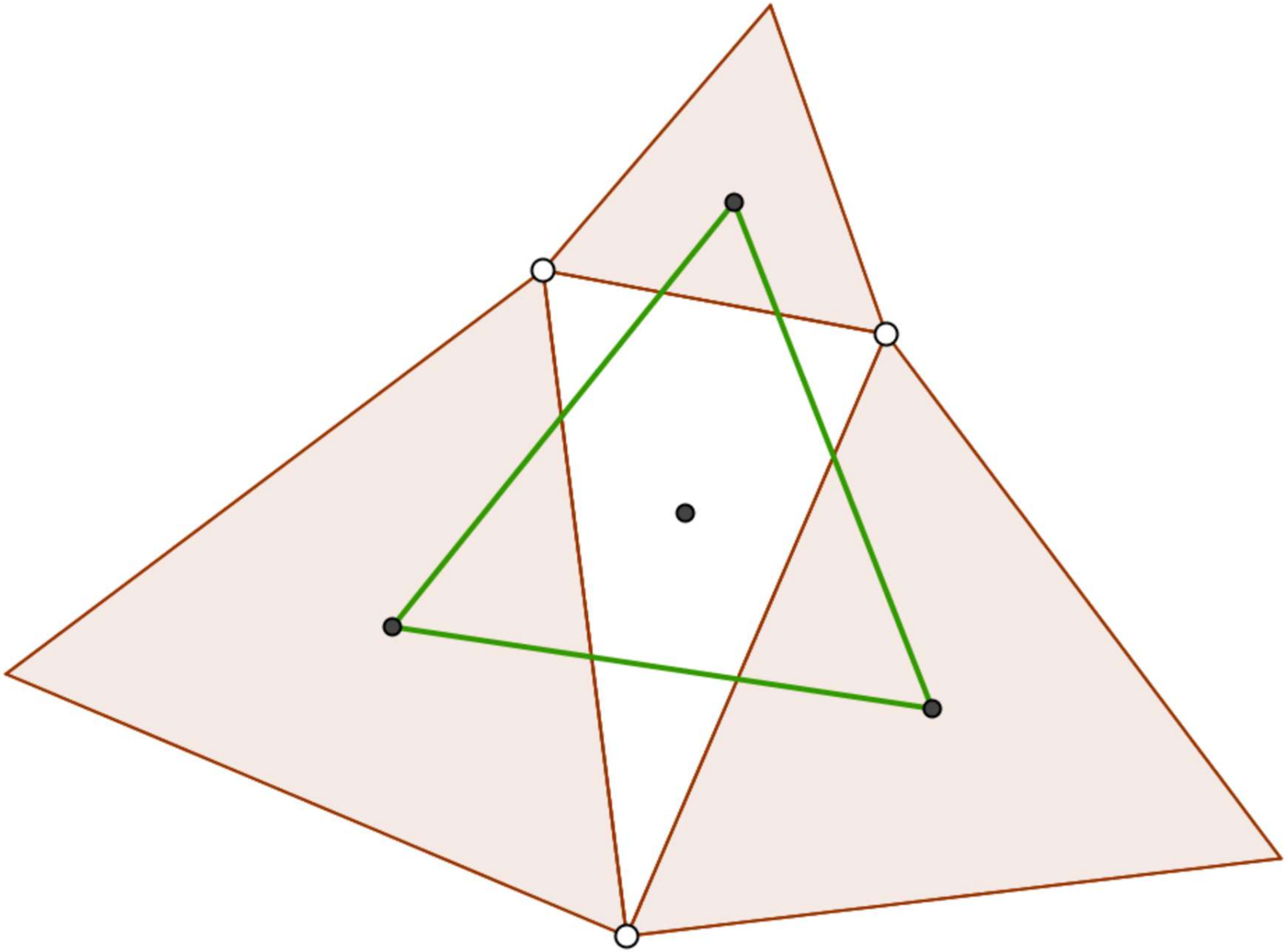
$$P_n(1/6) = P_n(5/6) = 1$$

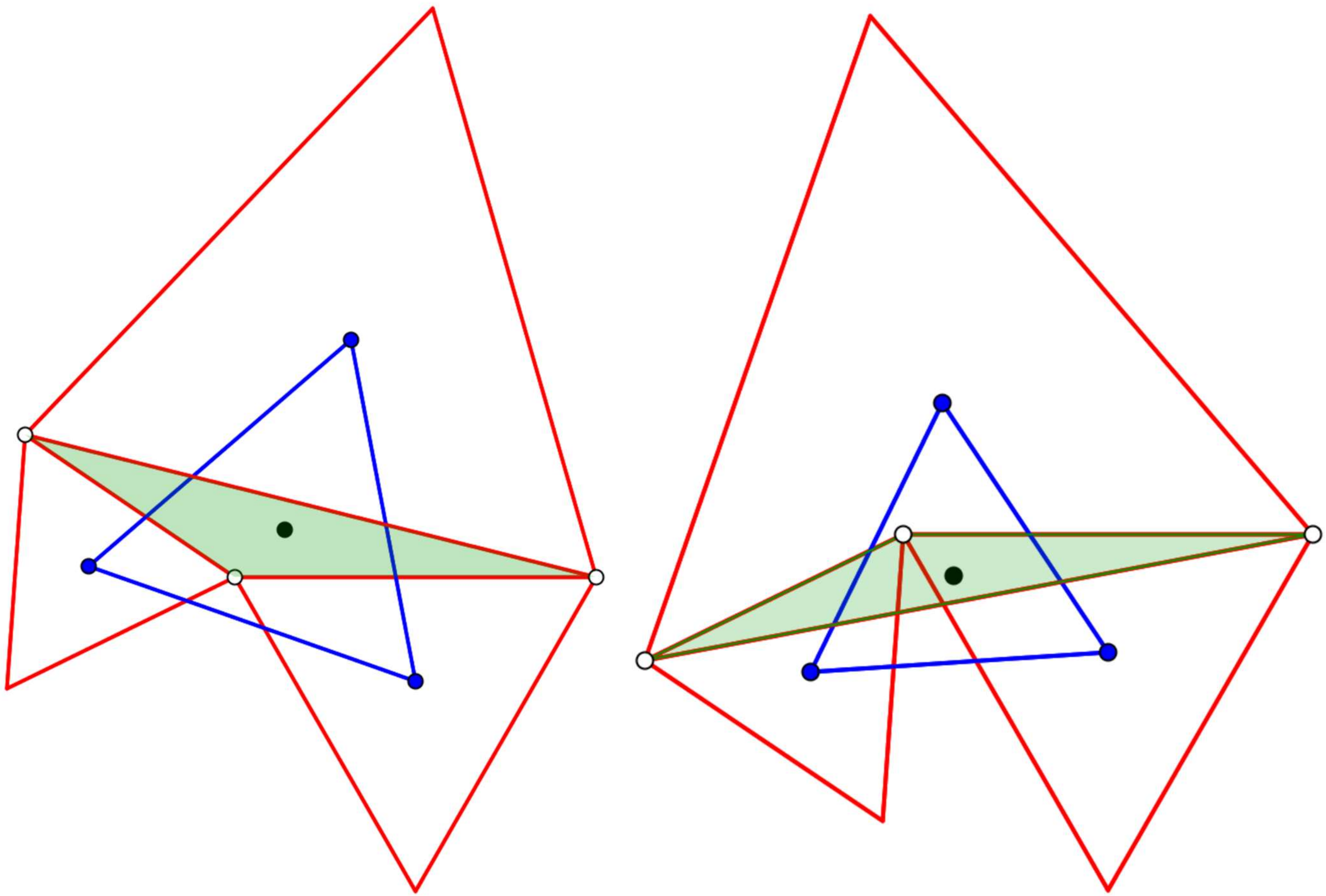
$$P_n(1/4) = P_n(3/4) = \sqrt{2}$$

$$P_n(1/3) = P_n(2/3) = \sqrt{3}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$



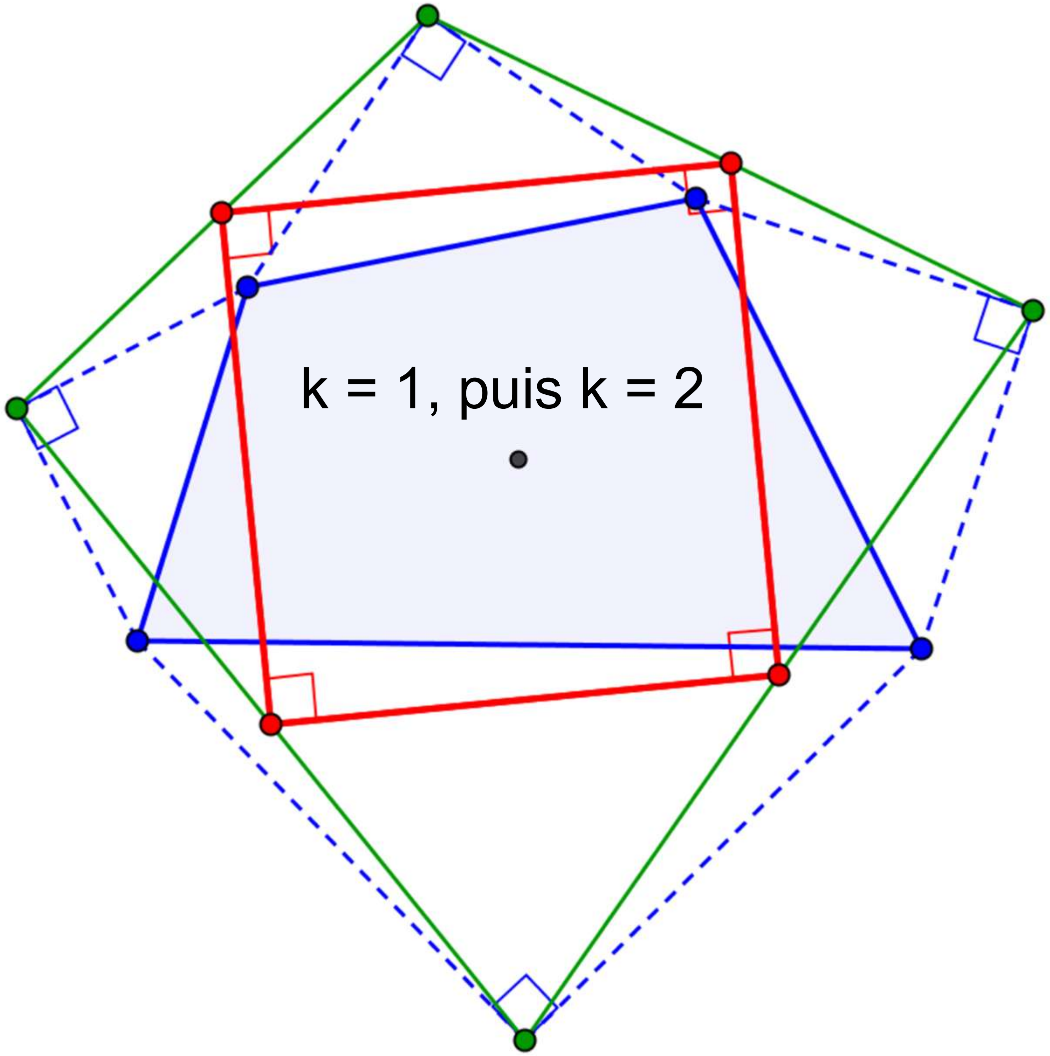




Théorème PDN:

Si des triangles isocèles d'angle au sommet $2k\pi/n$ sont élevés sur les côtés d'un n-gone quelconque P_0, et si ce processus est itéré avec le n-gone constitué par les sommets des triangles avec une valeur différente de k, jusqu'à ce que toutes les valeurs $1 \leq k \leq n-2$ soient utilisées, alors le n-gone P_{n-2} est régulier, et son centroïde coïncide avec celui de P_0.

Théorème de Petr-Douglas-Neumann Généralisation

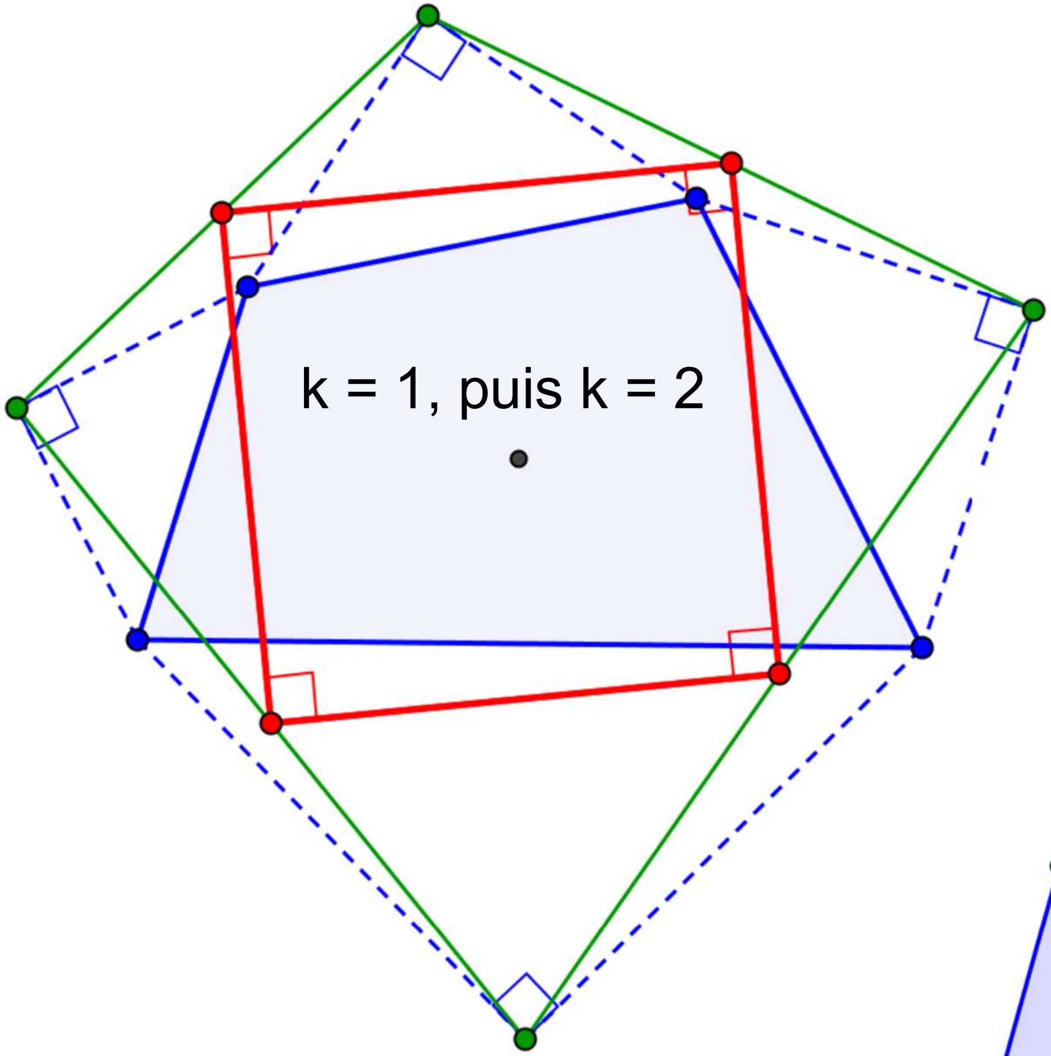


$n = 4$:

$2k\pi/4 = k\pi/2$

avec $1 \leq k \leq n-2=2$.

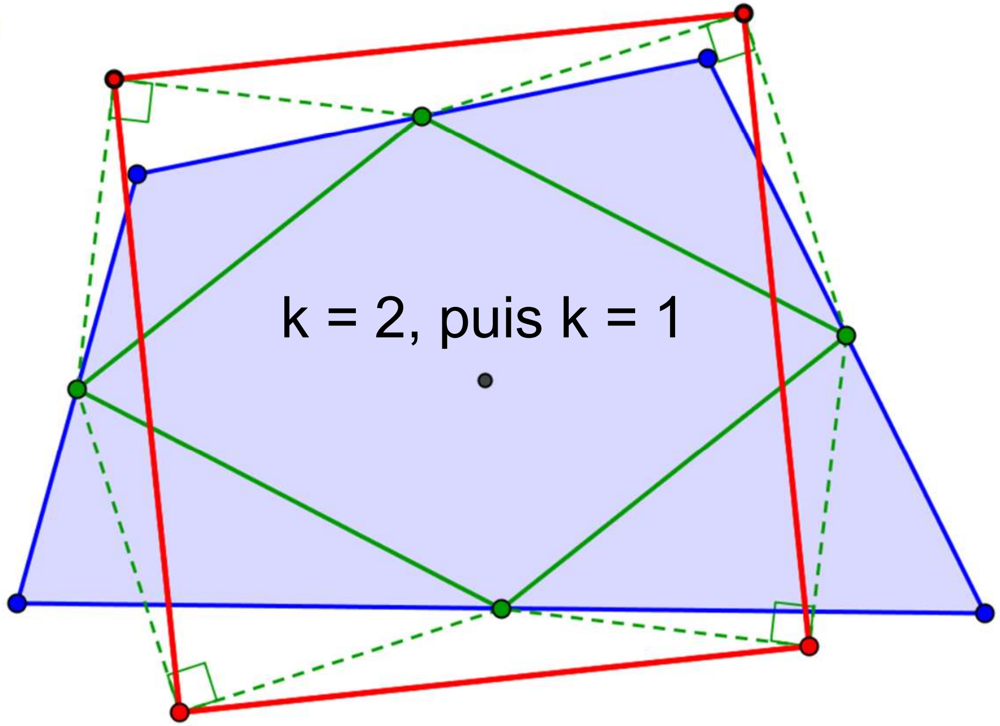
Théorème de Petr-Douglas-Neumann Généralisation



$n = 4$:

$2k\pi/4 = k\pi/2$

avec $1 \leq k \leq n-2=2$.



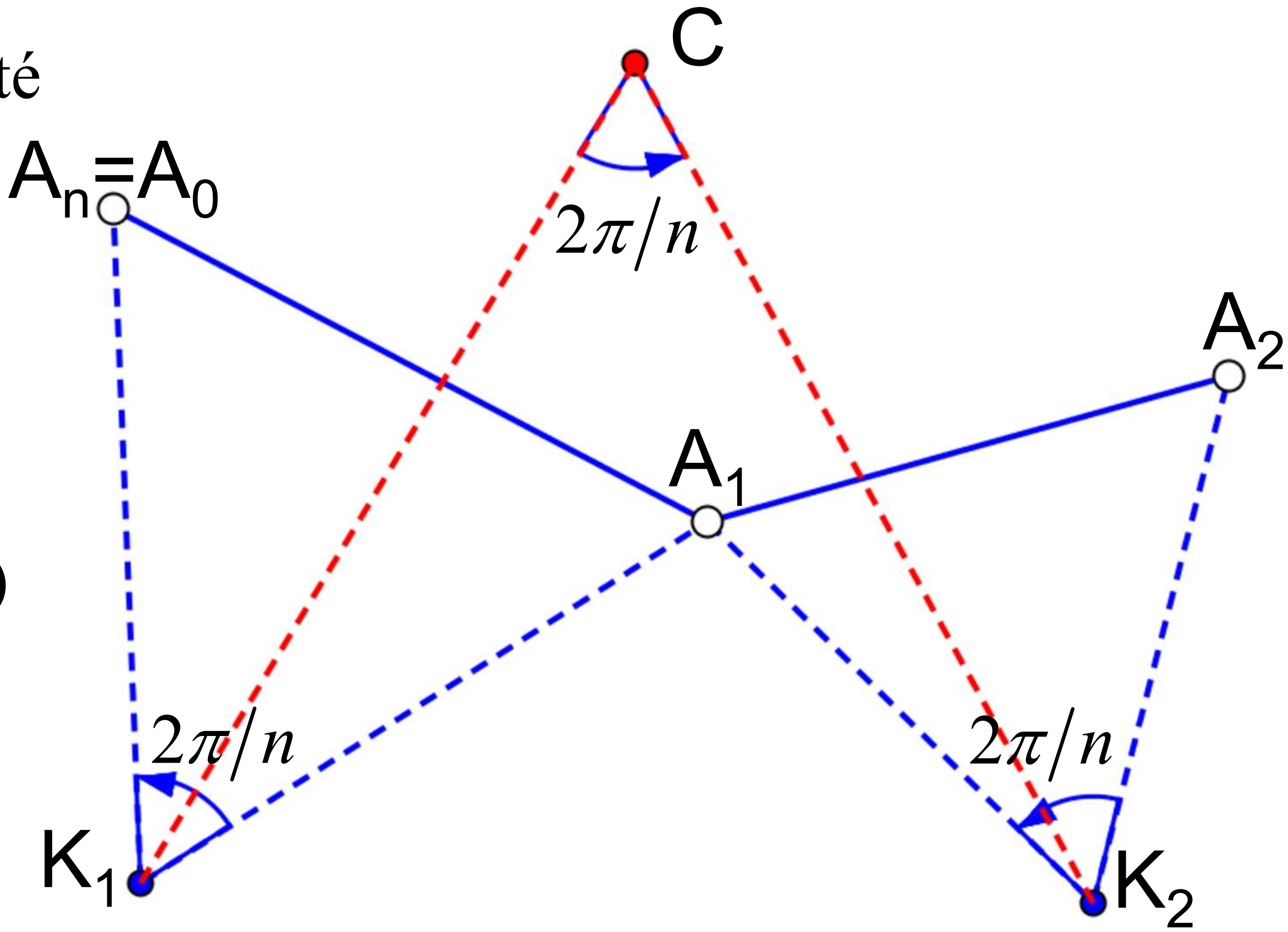
Théorème de Napoléon-Barlotti-Sammarcelli

e racine n^{ième} de l'unité

$$e^n = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} e^i = 0$$

$$\begin{cases} a_{i-1} - k_i = e \cdot (a_i - k_i) \\ k_{i+1} - c = e \cdot (k_i - c) \end{cases}$$



$$\boxed{c = \frac{1}{(1-e)^2}\left[-a_0 \cdot e + a_1 \cdot (1+e^2) - a_2 \cdot e\right]}$$

Théorème de Napoléon-Barlotti-Sammarcelli

$$\boxed{c = \frac{1}{(1-e)^2}\left[-a_0 \cdot e + a_1 \cdot (1+e^2) - a_2 \cdot e\right]}$$

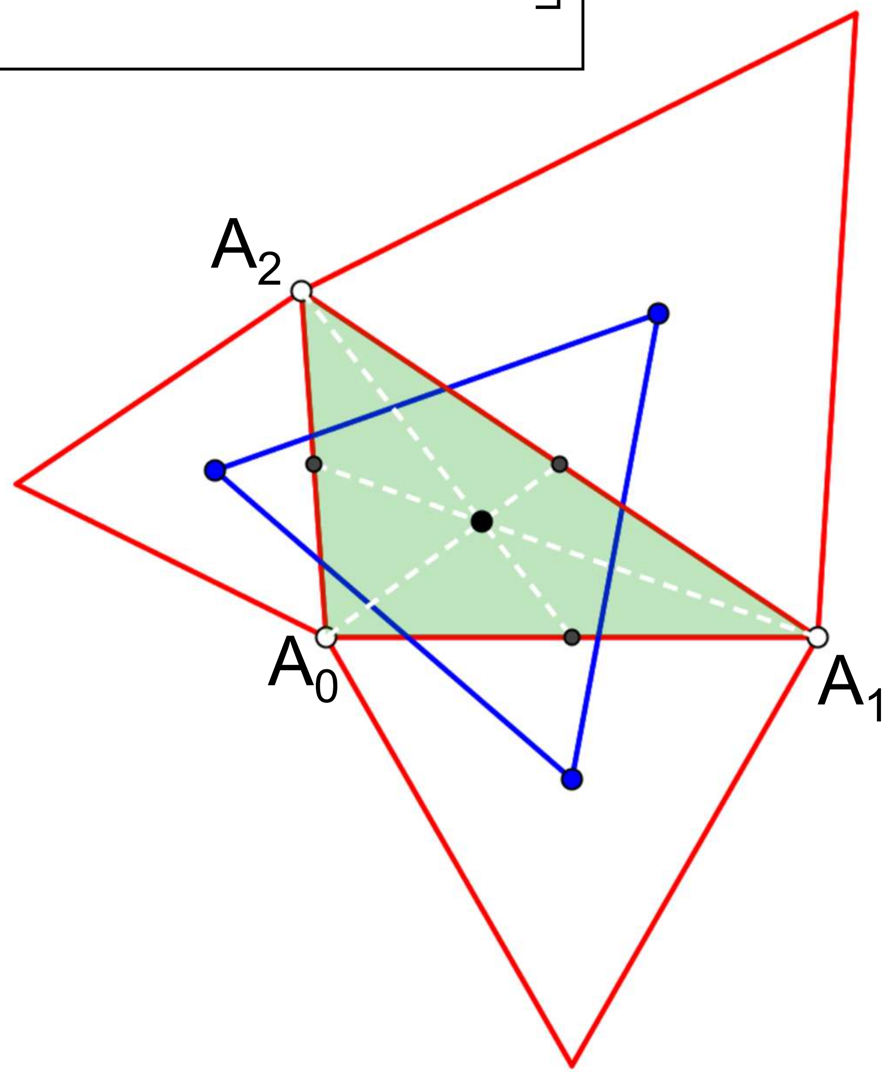
$$n = 3 : \quad e = j$$

$$1 + e^2 = -e$$

$$(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = -3e$$

$$c = \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}$$

$\Leftrightarrow$ Centre de gravité



Théorème de Napoléon-Barlotti-Sammarcelli

$$\boxed{c = \frac{1}{(1-e)^2}\left[-a_0 \cdot e + a_1 \cdot (1+e^2) - a_2 \cdot e\right]}$$

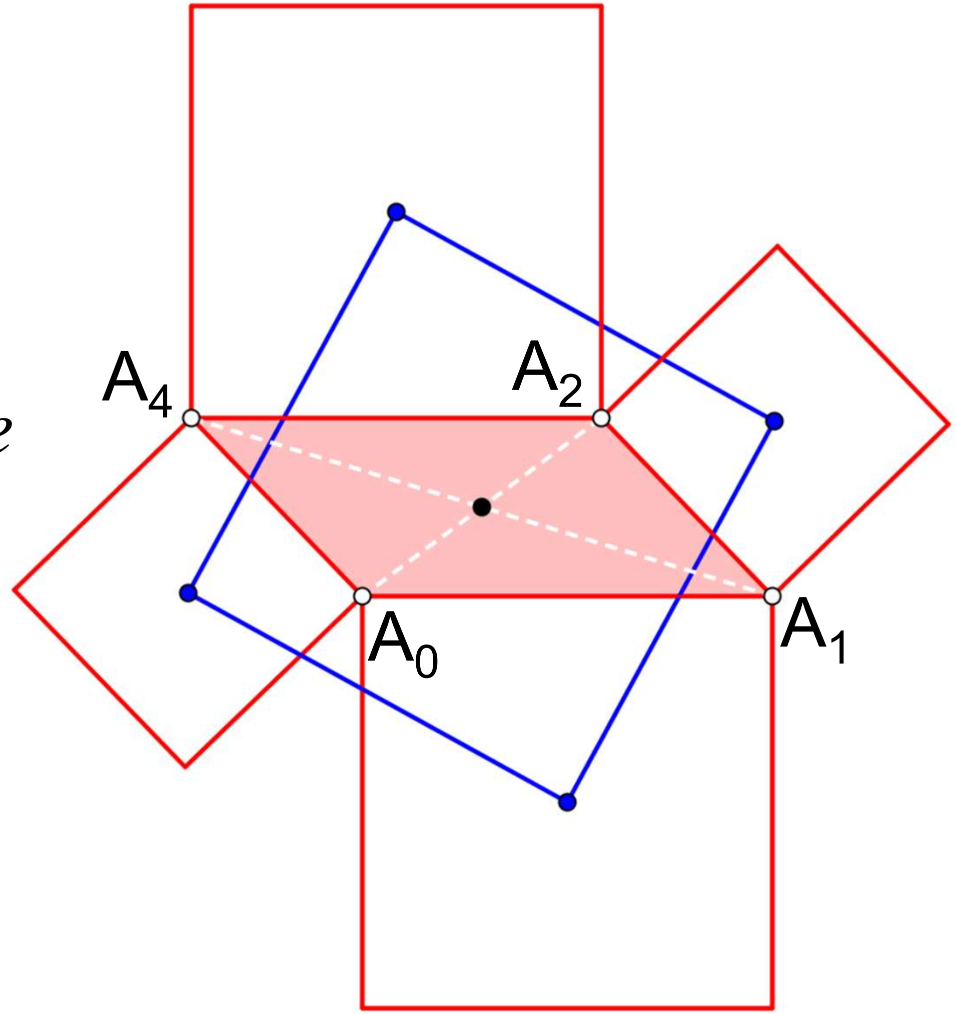
$$n = 4 : \quad e = i$$

$$1 + e^2 = 0$$

$$(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = -2e$$

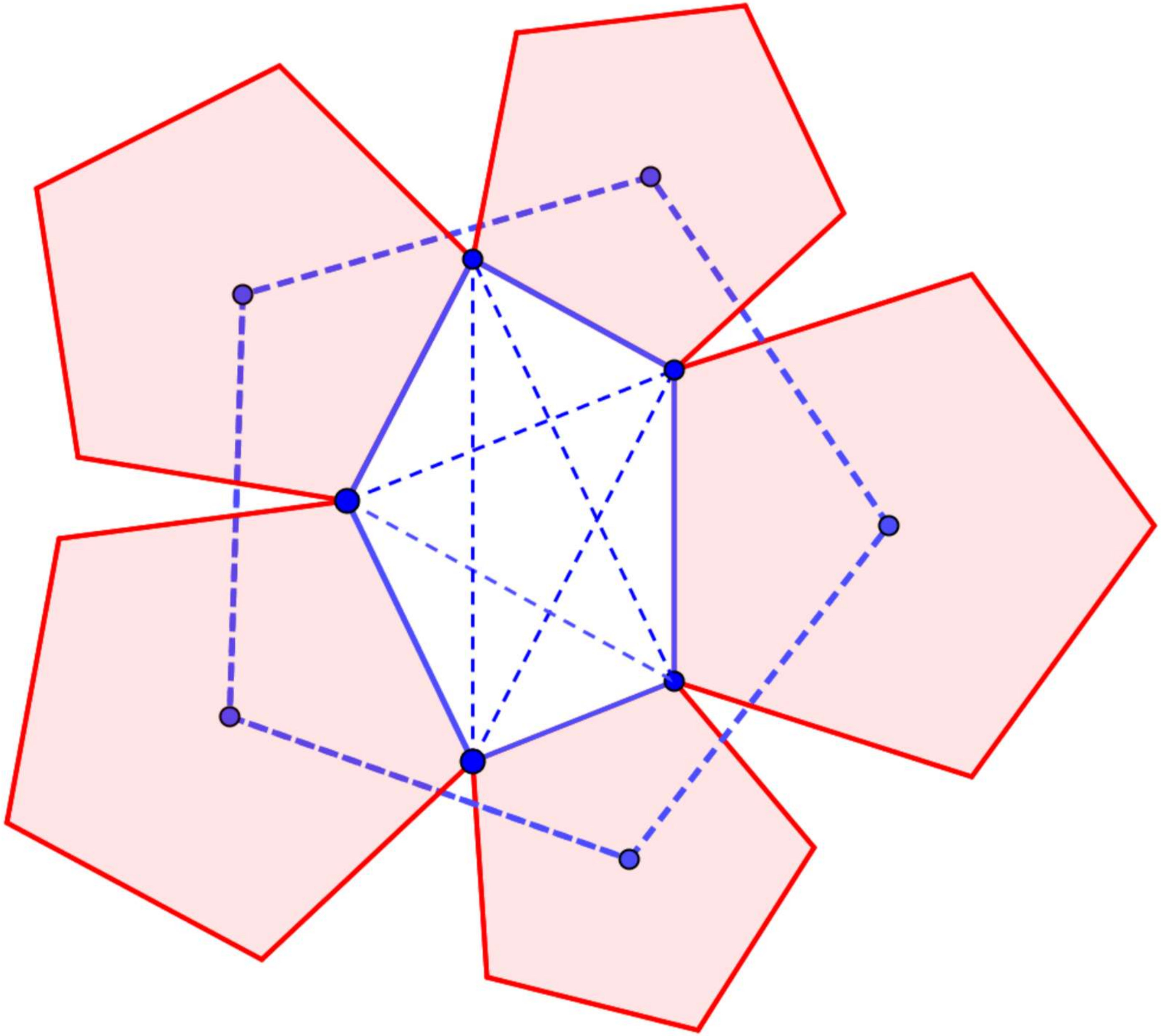
$$c = \frac{a_0 + a_2}{2}$$

$\Leftrightarrow$ Diagonales concourantes



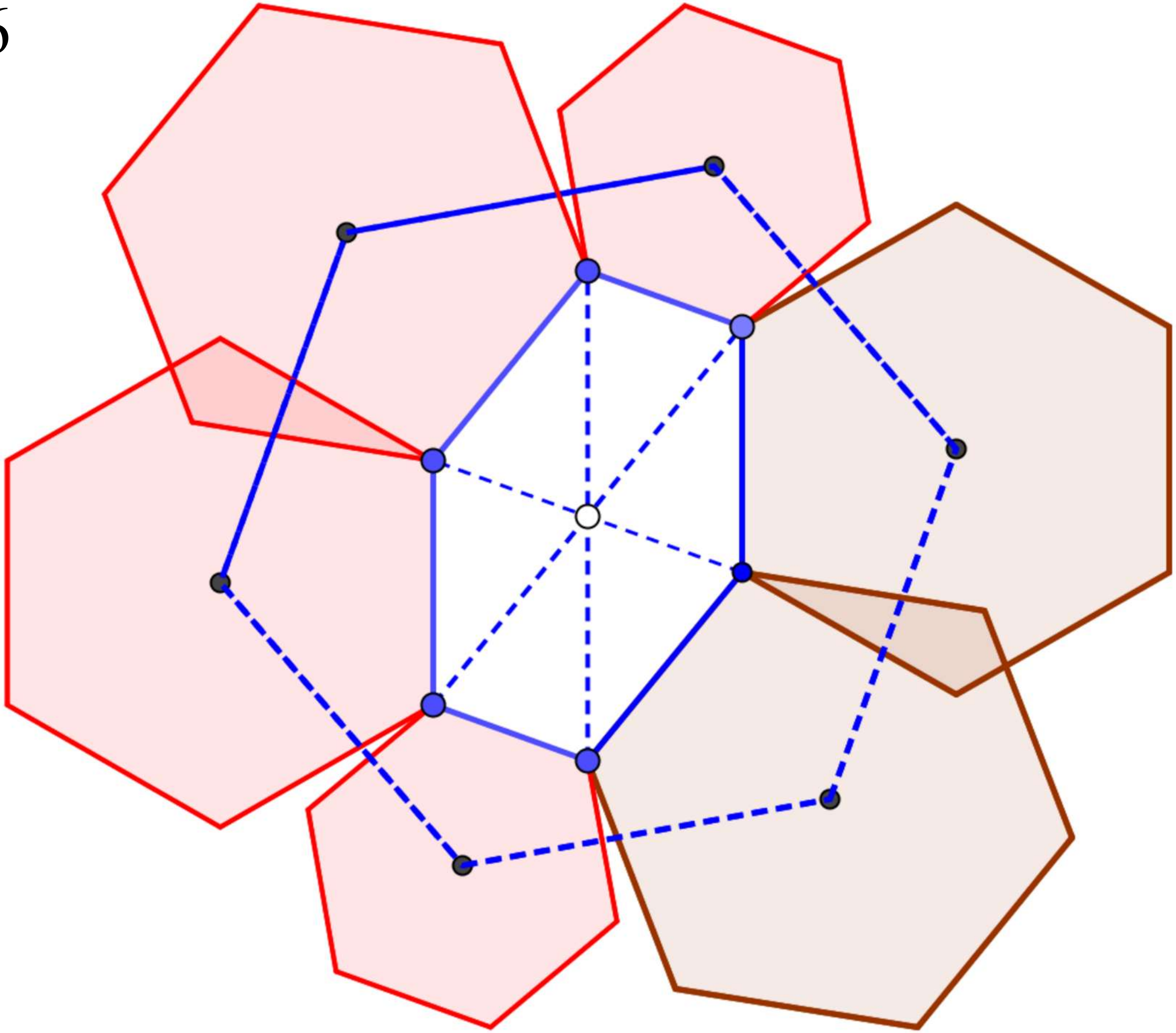
Théorème de Napoléon-Barlotti-Sammarcelli

$n = 5$



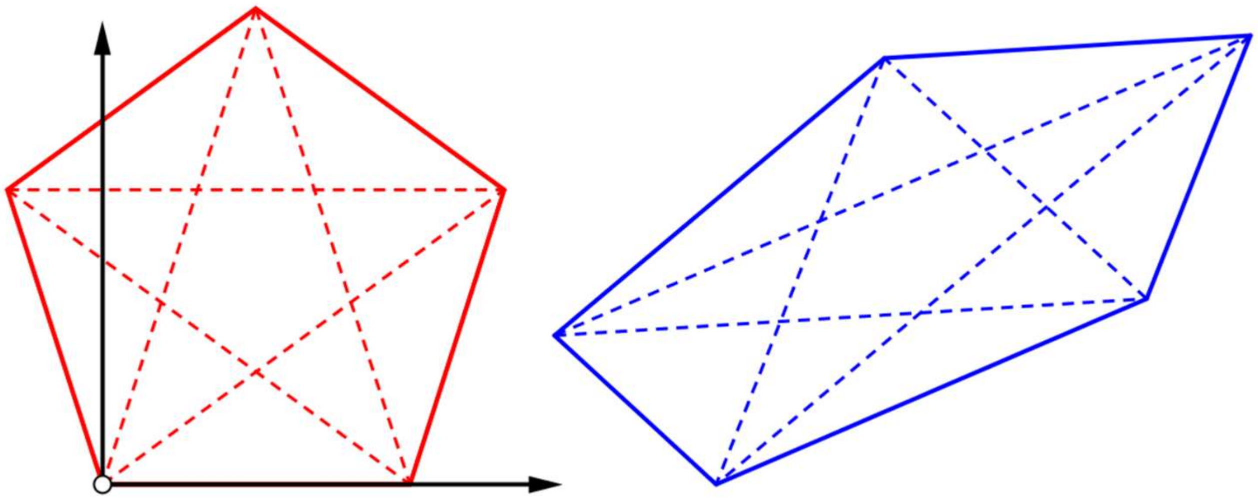
Théorème de Napoléon-Barlotti-Sammarcelli

$n = 6$

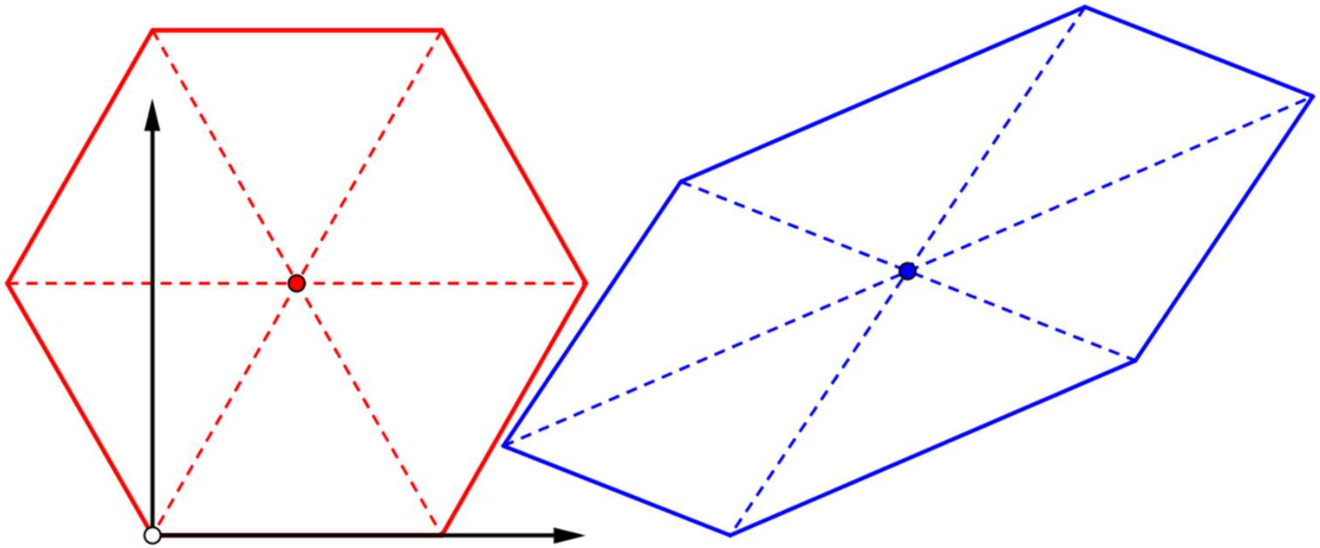


Le théorème s'applique pour tout polygone en correspondance affine avec un polygone régulier.

F. Sammarcelli



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 & -0.1 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

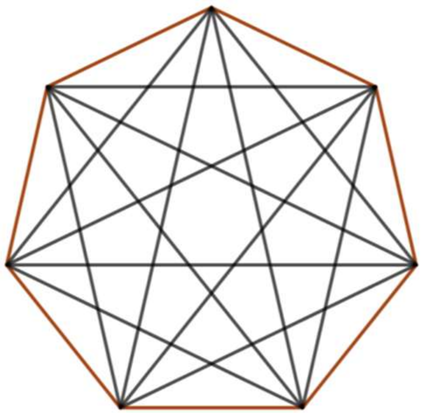


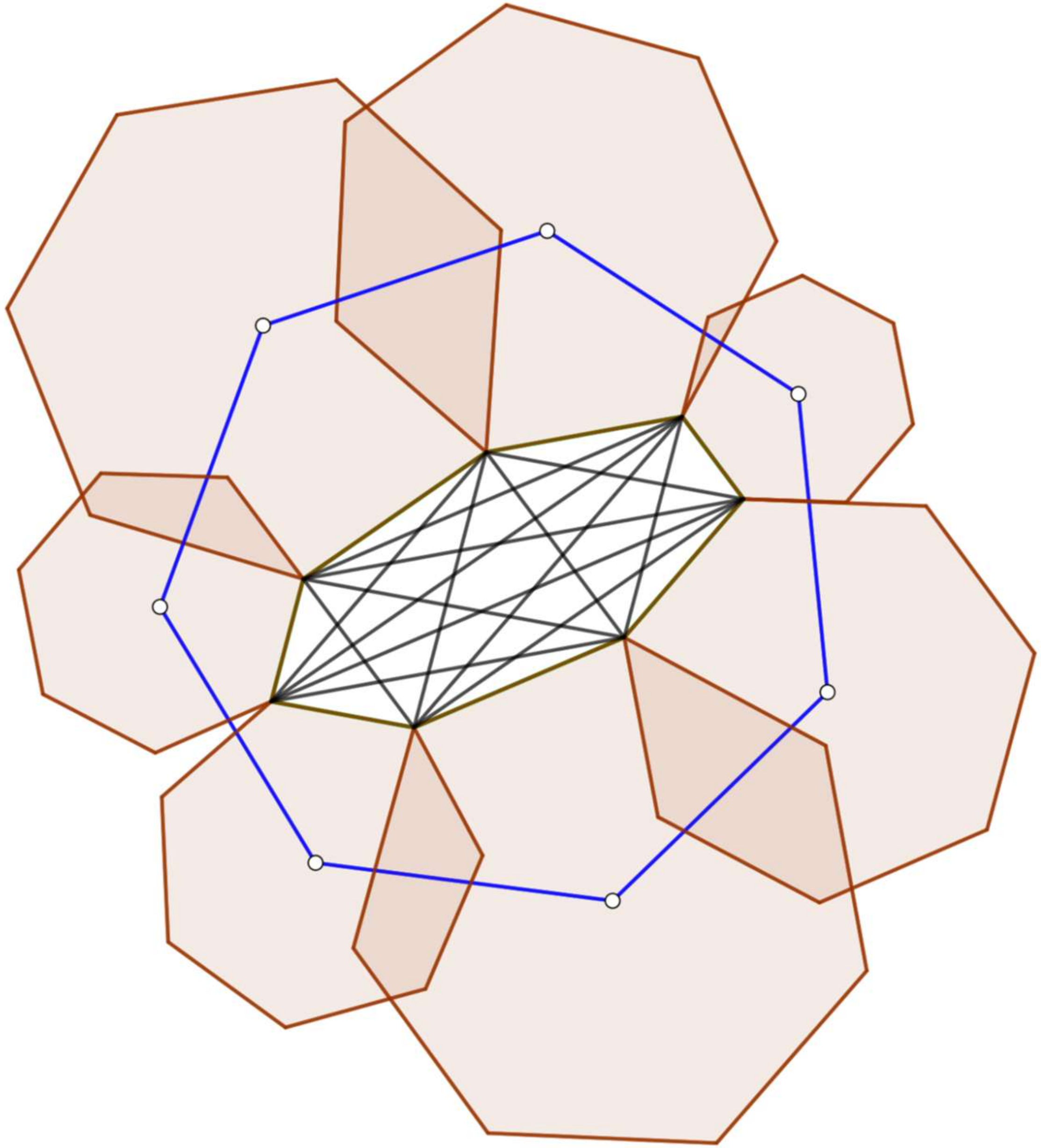
Tout triangle est l'image affine d'un triangle équilatéral

=>

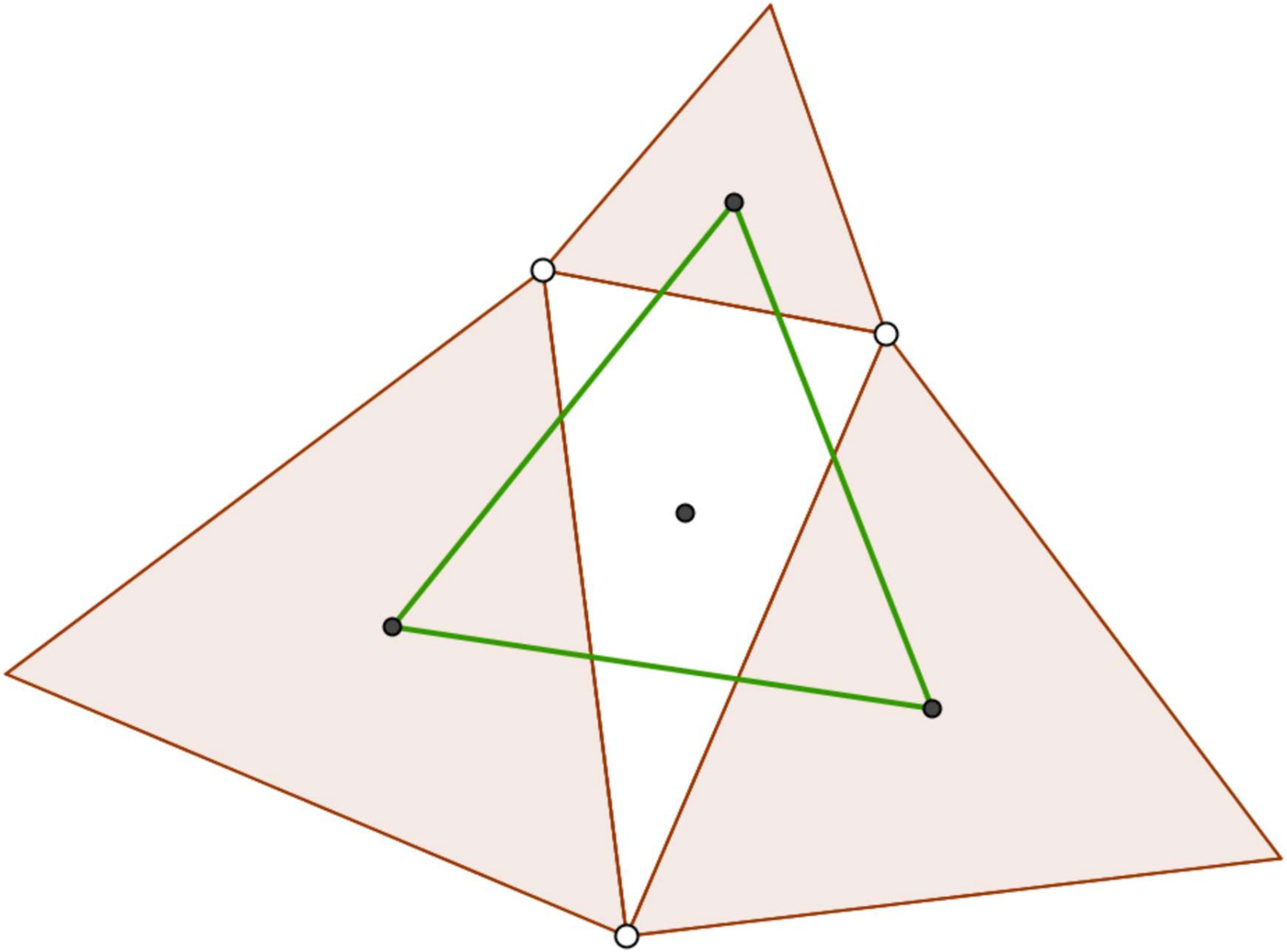
Théorème de Napoléon

$n = 7$

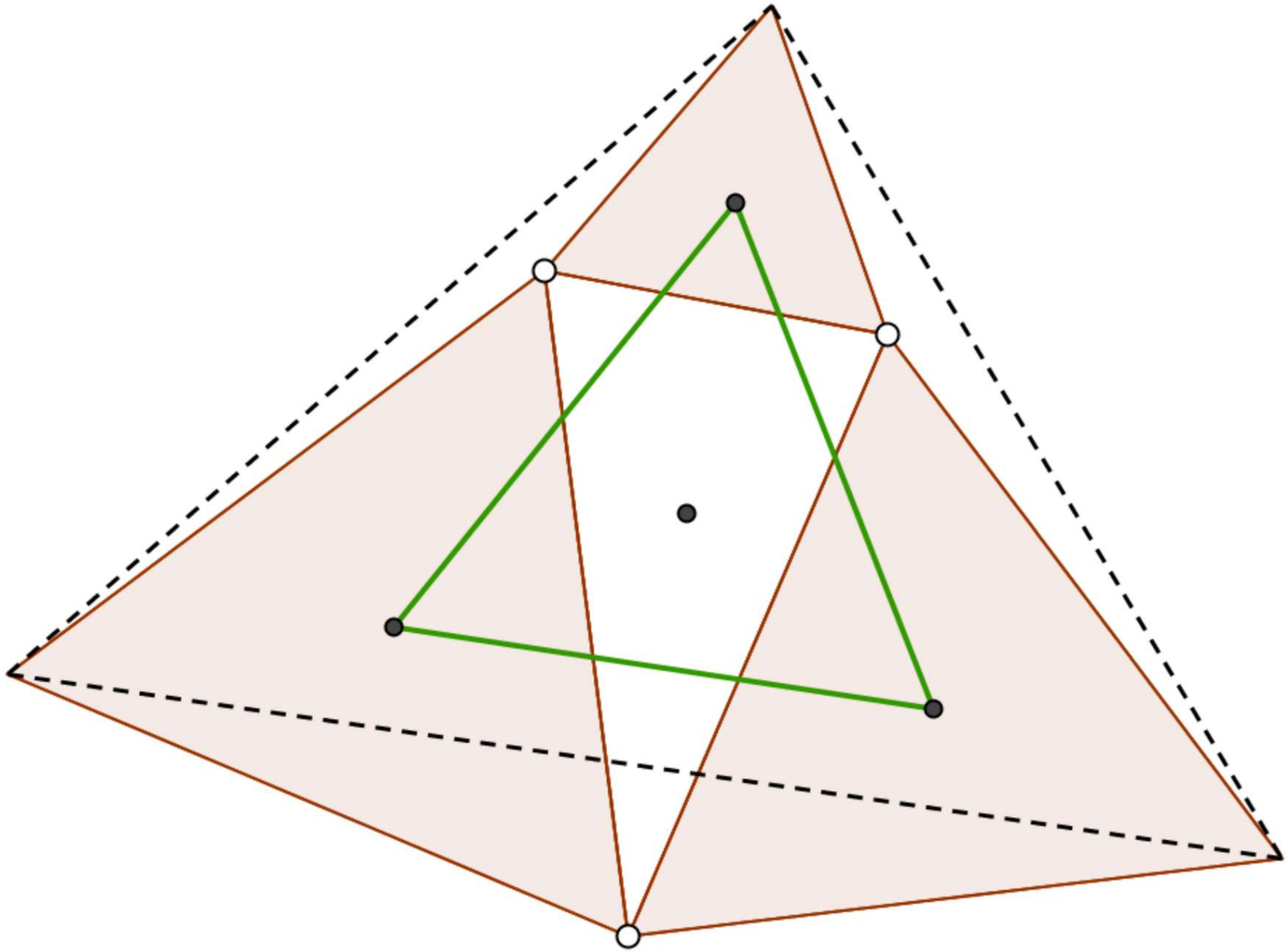




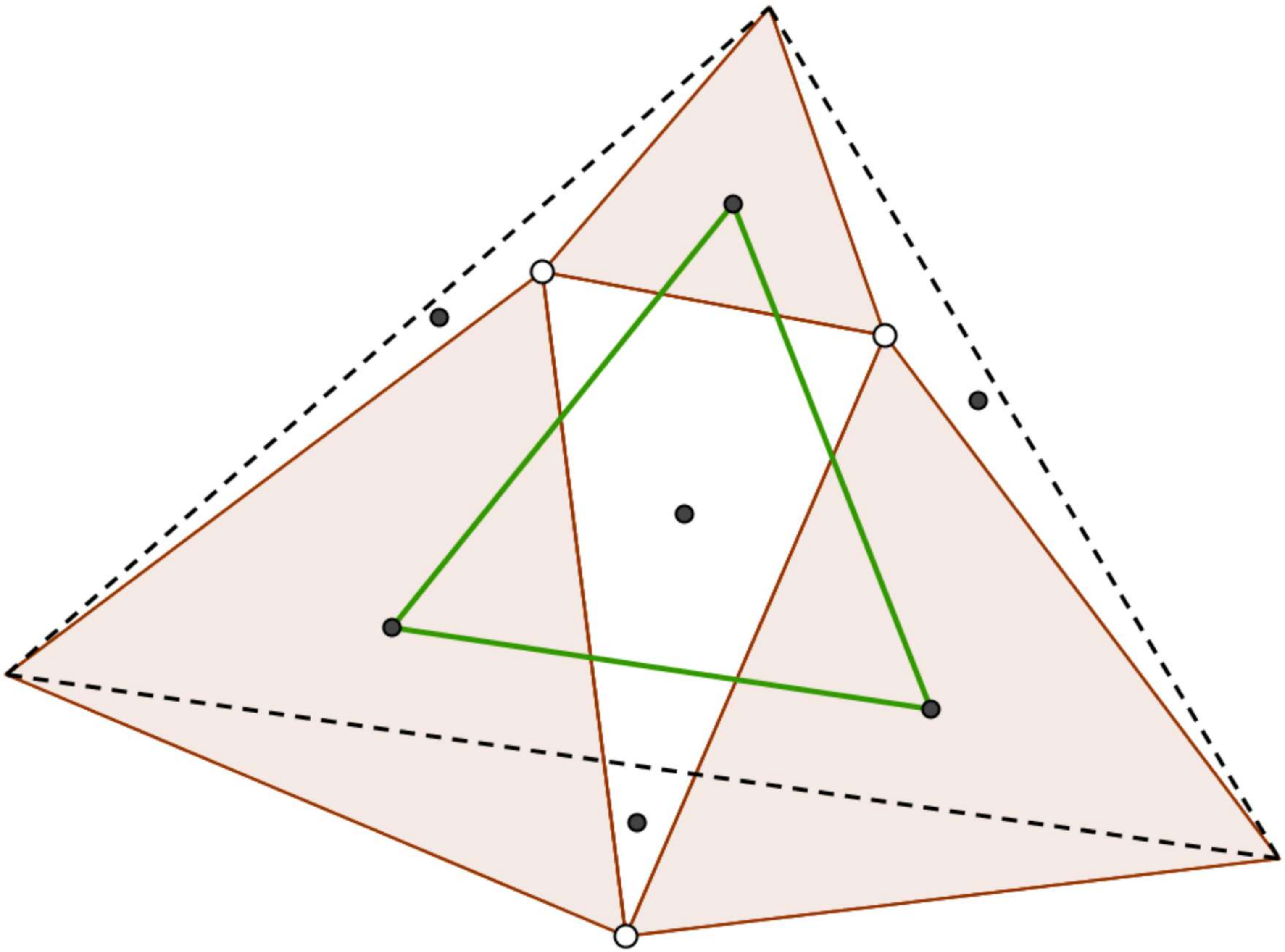
Hexagone de Napoléon



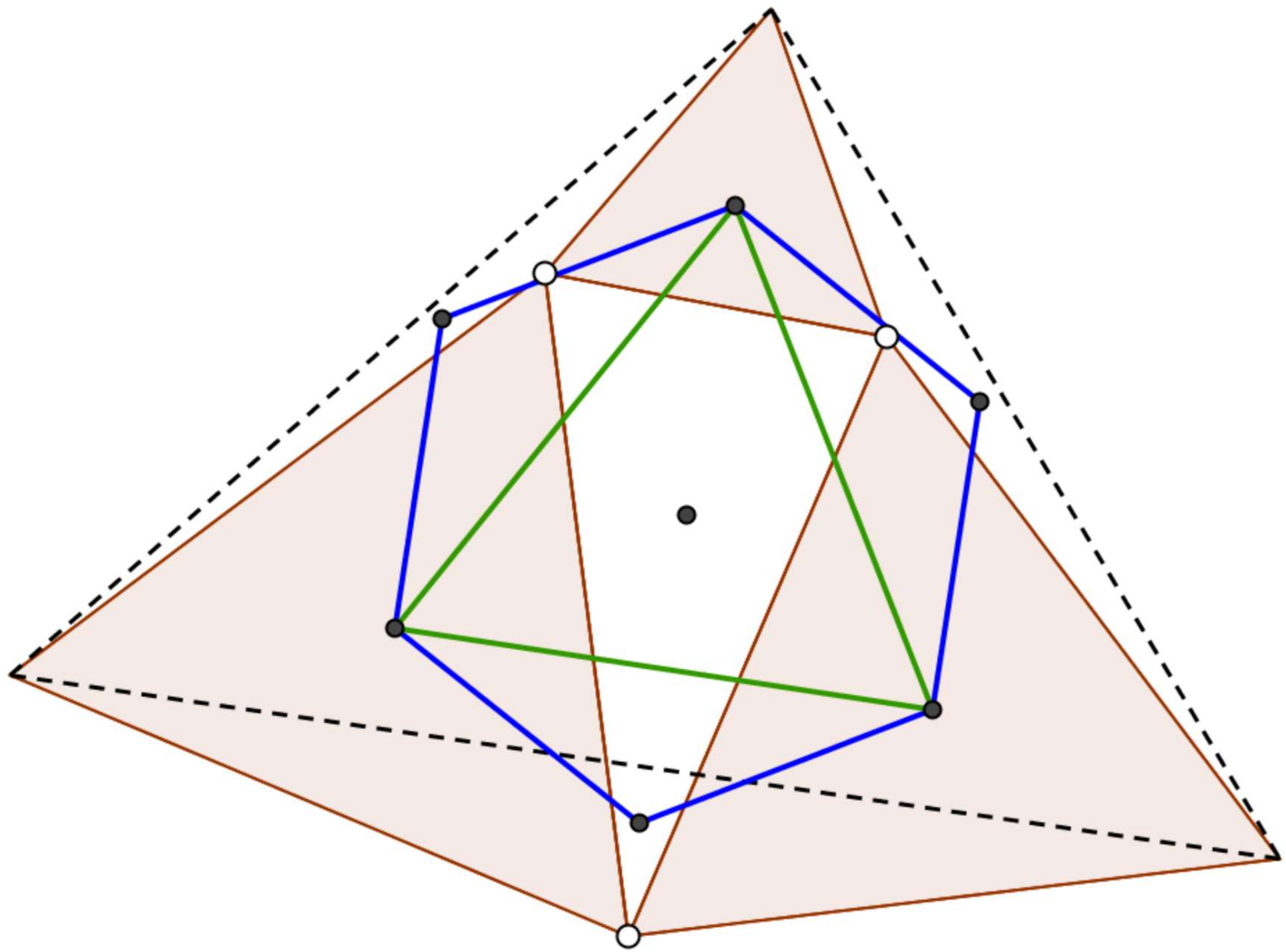
Hexagone de Napoléon



Hexagone de Napoléon



Hexagone de Napoléon




tangente
Hors série 92
tangente
l'aventure mathématique
LES TRÉSORS DES POLYGONES
Sous des angles méconnus
À la découverte des polygones étoilés
Définir, classer et autres problèmes inspirants
Un monde aux multiples côtés
Constructions et recherches de pointes
Questions de découpages