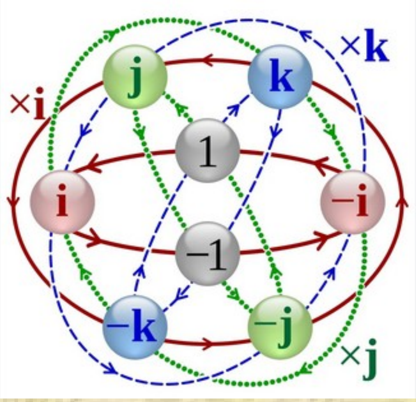
kafemath.fr



AVEZ-VOUS DES (HYPER) COMPLEXES ?

Hervé Stève, ingénieur mathématicien
cofondateur du KAFEMATH

herve.steve@hotmail.fr

Kafemath du 30/01/2025

Restaurant l'Aïre Ona

Plan

Les nombres réels

Les nombres complexes

Les hypercomplexes : quaternions et octonions

William Rowan Hamilton

Qu'est qu'un nombre ?

Selon le Larousse, en mathématiques :

1) Notion qui permet de **compter**, de **dénombrer** les choses ou les êtres, de **classer** les objets, de **mesurer** les grandeurs.

2) Symbole caractérisant une unité ou une collection d'unités : **un nombre est composé de chiffres**.

Exemples) -123,456789 ; (-1 , 10) pour un doublet

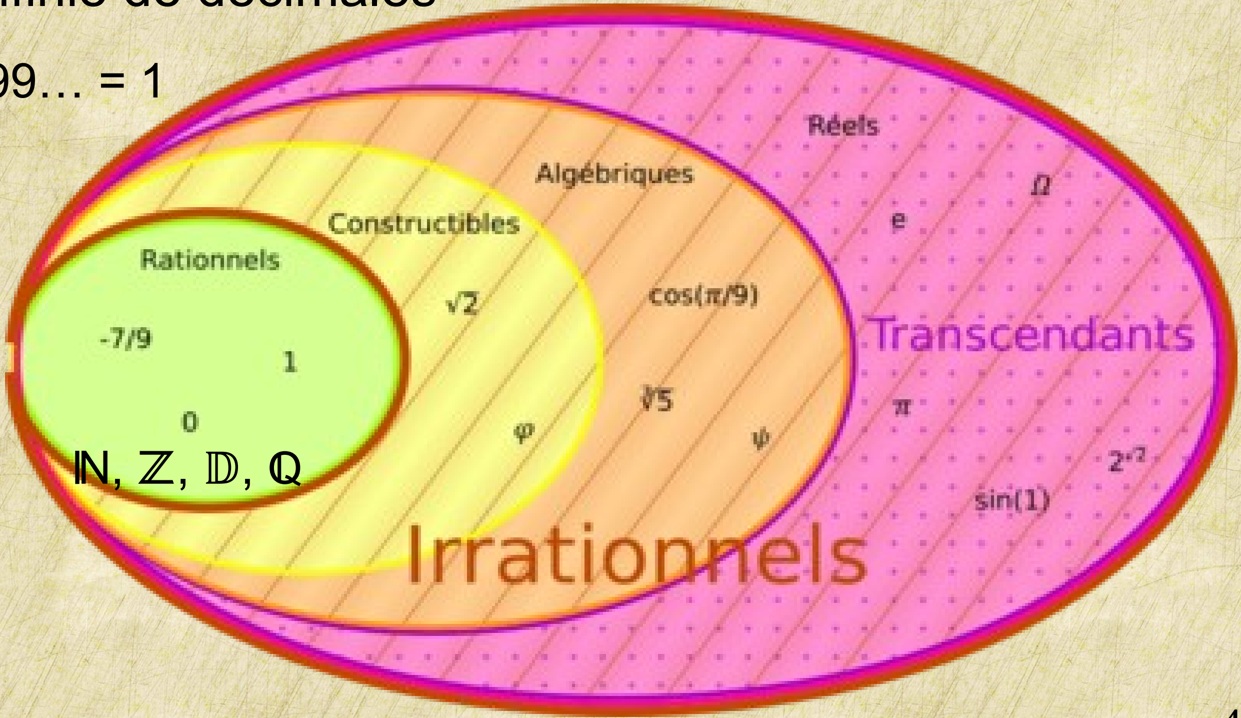
Élément d'un des ensembles infinis $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ensembles inclus les uns dans les autres par $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \ldots$

Nombres réels

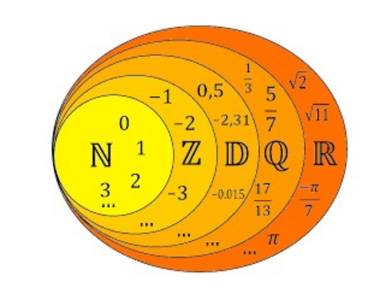
- **Géométrique** : ensemble noté ℝ qui sont tous les points de la droite réelle

- **Arithmétique** : nombre avec une partie entière suivie d'une liste finie ou infinie de décimales

NB : 0,9999… = 1



Algèbre des réels



Construction formelle par **Cantor**, **Meray** et **Dedekind** (1870)

Définition de Hilbert : « $\mathbb{R}$ est le dernier corps commutatif archimédien et il est complet.

- $\mathbb{R}$ **est un corps commutatif ou abélien** :
  - $\mathbb{R}$ groupe pour l'addition + : loi de composition interne (LCI), associatif (a+b)+c=a+(b+c), commutatif a+b=b+a, neutre 0 et symétrique d'un réel r est son opposé -r
  - $\mathbb{R}$ groupe pour multiplication x : LCI, associatif (ab)c=a(bc), commutatif ab=ba, neutre 1 et symétrique d'un réel r sauf 0 est son inverse 1/r
  - Distributivité de la multiplication / addition : a(b+c)=ab+ac

- $\mathbb{R}$ **est totalement ordonné** : a>b => a+c>b+c et ac>bc si c non nul
- $\mathbb{R}$ **est archimédien** : il existe n entier tq na>b pour a,b réels non nuls
- $\mathbb{R}$ **est complet** : toute suite de Cauchy est convergente ; pas de « trous »
- $\mathbb{R}$ **non dénombrable** : 2 infinis de Cantor (argument diagonal)
- $\mathbb{R}$ **n'est pas algébriquement clos** : pas de solutions réelles pour l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$!

Nombres complexes

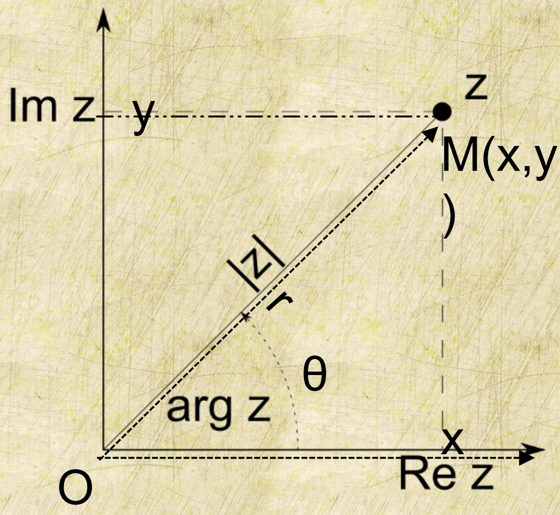
$i^2 = -1$

- Introduits au XVIème : **J. Cardan**, **R. Bombelli** et **Tartaglia** pour résoudre les équations polynomiales du 3ème degré

- Ensemble noté $\mathbb{C}$ qui est une extension de $\mathbb{R}$ en introduisant un nombre i dit imaginaire tq $i^2 = (-i)^2 = -1$.

  Un nombre complexe s'écrit $z = x + i\ y$ avec x et y réels.

- **Géométrie** : points dans le **plan complexe euclidien**



Forme cartésienne : x=Re z et y=Im z

module $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ et

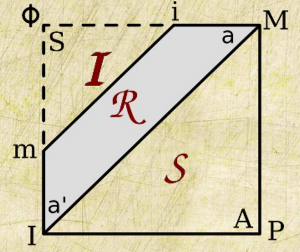
argument $\theta = \arg z = \arctan(y/x)$

Forme polaire : $z = r\cos\theta + i\, r\sin\theta = r\, e^{i\theta}$

Ex) $r=1$; $\theta=\pi/2 \Rightarrow z = \exp(i\pi/2) = i$

$\theta=\pi \Rightarrow$ $z = \exp(i\pi) = -1$: relation d'Euler

Algèbre des complexes



Modèle RSI lacanien

- **ℂ corps commutatif ou abélien :**
  - ✓ (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)
  - ✓ (a+ib) (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)
  - ✓ 1/(a+ib) = (a-ib) / (a²+b²) = a/(a²+b²) -ib/(a²+b²)

- **Conjugaison :** $z^* = \underline{z} = a - ib$; Re $z=(z+z^*)/2$; Im $z=(z-z^*)/2i$; $|z|^2=zz^*$
- **ℂ n’est pas totalement ordonné :** en effet $i^2=-1$ négatif mais $1^2=1$
- **ℂ est algébriquement clos :** ex) $x^2+1=0 \Rightarrow x=i$ ou $-i$

- **ℂ comme couple de réels :** W.R. Hamilton vers 1840 ℂ **~** ℝ²

(a , b) + (c , d) = (a+c ; b+d)

(a , b) x (c , d) = (ac-bd , ab+bc)

- **ℂ écriture matricielle* :** z = a + ib => z = $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ matrice de rotation

et i = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour a=0 et b=1

(*) mot « matrix » introduit vers 1850 par **J.J. Sylvester**

- **ℂ a pour base vectorielle** u=**1** et v=**i** : z = au +bv = a**1** + bi

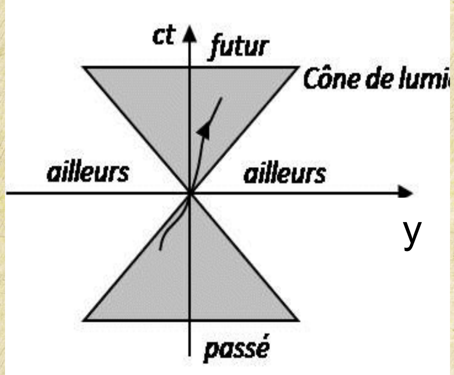
Complexes hyperboliques

- **Nombres complexes déployés dans le plan** :

$z = x + j\,y$ avec $j^2 = +1$, j étant un autre nombre imaginaire

$r = |z| = \sqrt{x^2 - y^2}$ => pseudo-norme lorentzienne

plan de Minkowski : $x = c_0\,t$ (c_0 vitesse de la lumière, t le temps) et y variable d'espace 1d



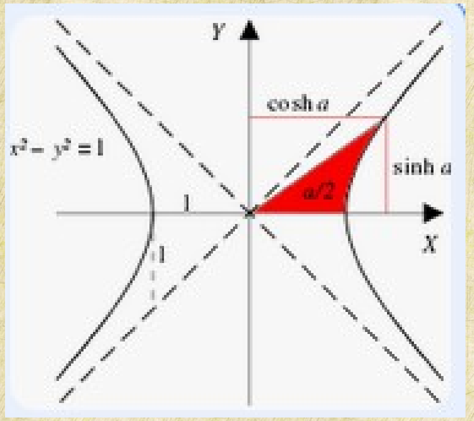
- **Algèbre** commutative, associative et distributive avec l'addition

N'est pas un corps car les éléments nuls (si x=+/-y, |z| =0)) ne sont pas inversibles : ex) $(1 + j)(1 - j) = 0$ => algèbre d'anneau commutatif

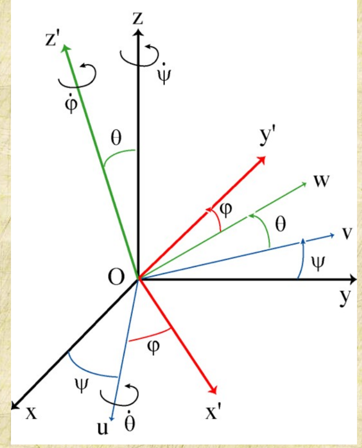
- **Nouvelle formule d'Euler** :

$z = r\cosh(\theta) + j\,r\sinh(\theta) = r\,e^{(j\theta)}$

avec θ l'angle hyperbolique et cosh/sinh cosinus/sinus hyperbolique



Hypercomplexes



- **Passage à $\mathbb{R}^3$:** PAS POSSIBLE Frobenius 1877

- **Coordonnées polaires :** d'un point M(x,y,z)

$x = r \cos\varphi \cos\theta$; $y = r \sin\varphi \cos\theta$; $z = r \sin\theta$

avec $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et φ,θ angles d'Euler (φ plan x,y et θ plan x,z)

Soit M : hypercomplexe **h** = x + **i**y + **j**z avec **i**² = **j**² = **-1** , mais que vaut **ij** ?

- **Écriture matricielle de h :**

i rotation de 90° plan x,y : $\mathbf{i}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **j** rotation de 90° plan x,z : $\mathbf{j}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors

$$\mathbf{ij}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ?x+yi+zj=\begin{pmatrix} x & -y & -z \\ y & x+z & 0 \\ x & 0 & x+z \end{pmatrix}$$

Impossible donc pas de LCI pour la multiplication des hypercomplexes de $\mathbb{R}^3$

- **Dimensions supérieures :** quaternions, octonions, … base 2^n

W. R. Hamilton

Sir **William Rowan Hamilton** (1805-1865) introduit l'ensemble des **quaternions H ~** $\mathbb{R}^4$ le 16 octobre 1843 avec la base {**1, i, j, k**} vérifiant $\mathbf{i^2=j^2=k^2=ijk}=-1$ avec **k=ij**

- Mathématicien, physicien et astronome irlandais
- Inventeur des quaternions, théorème de Cawley-Hamilton (algèbre matricielle), travaux sur l'optique (caustiques), principe variationnel (mécanique) : **opérateur hamiltonien** dans l'équation de Schrödinger …
- Son parrain fut **Archibald Rowan-Halmilton*** (1752-1834) : homme politique irlandais (United Irishmen)

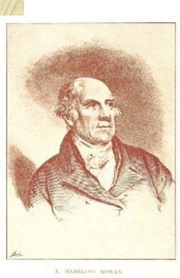
Pont de Broom à Dublin

(*) sa sœur adoptive est la grand-mère paternelle du mathématicien !

Généalogies* Hamilton

Branche irlando-écossaise noble

Killyleagh Castle, county Down



- Archibald HAMILTON & Rachel CARMICHAEL
  - Gawen HAMILTON †1703 & Jane HAMILTON
    - Archibald HAMILTON †1747 & Mary JOHNSTON
      - Gawen HAMILTON 1729-1805 &1750 Jane ROWAN 1727-ca 1793
        - William HAMILTON 1753 & ? ?
        - Sidney HAMILTON & Benjamin BERESFORD
        - Archibald ROWAN-HAMILTON 1752-1834 &1781 Sarah Anne DAWSON 1764-1834
        - ...

administrateur

sœur par adoption

Branche irlandaise (Dublin)

parrain

Trim Castle, county Meath

- Francis HAMILTON & Margaret BLOOD /1711-1811
  - William HAMILTON †1783 &1774 Grace McFERRAND 1743-ca 1808
    - Arthur Rowan HAMILTON 1775
    - James HAMILTON 1776-1847 &1814 Elisabeth BOYLE
    - William HAMILTON 1776-1778
    - Archibald HAMILTON 1778-1819 &1800 Sarah HUTTON 1780-1817
      - Grace HAMILTON 1802-1846
      - William Rowan HAMILTON 1805-1865 &1833 Helen Maria BAILY 1804-1869
        - William Edwin HAMILTON 1834-1902
        - Archibald Henry HAMILTON 1835-1914
        - Helen Eliza Amelia HAMILTON 1840-1870 &1869 John O'REGAN 1817-1898
      - Elizabeth Mary HAMILTON 1807-1851
    - Jane Sidney HAMILTON 1779-1814
    - Robert HAMILTON ca 1780-1784
  - Francis HAMILTON
  - Margaret HAMILTON & J. COLLINS

Trinity College Dublin

(*) arbre geneanet « hervesteve » / arbre universel Roglo

Précurseurs

- **Identité des 4 carrés d'Euler** (1748) **puis Lagrange** (1770) :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) =$$
$$(ap+bq+cd+ds)^2 + (aq-bp-\varepsilon cs+\varepsilon dr)^2 + (ar+\varepsilon bs-cp-\varepsilon dq)^2 + (as-\varepsilon br+\varepsilon cq-dp)^2$$

avec $\varepsilon=+/-1$
ce qui exprime le fait qu'en dimension 4 dans un espace euclidien la norme du produit de 2 nombres (*quaternions*) est le produit de leur norme ...

- **Formule d'Euler-Rodrigues** (1840) : formule générale pour les rotations vectorielles en dimension trois, faisant intervenir quatre paramètres a,b,c,d tq $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ et sont les coefficients d'un *quaternion* :

$$\begin{bmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc-ad) & 2(bd+ac) \\ 2(bc+ad) & a^2+c^2-b^2-d^2 & 2(cd-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(cd+ab) & a^2+d^2-b^2-c^2 \end{bmatrix}$$

- **Gauss** aurait découvert en 1819 les *quaternions*, mais publication en 1900

Quaternions

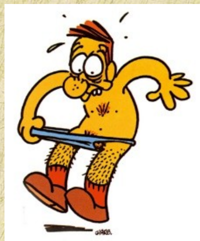


Table de multiplication

×	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	$-j$
j	j	$-k$	−1	i
k	k	j	$-i$	−1

- **H** est un corps non commutatif

avec **ij=k** et **ji=-k**

- **Matrice 4 x 4** : **q** = a**1** + b**i** + c**j** + d**k** = $\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$

Avec $\mathbf{i}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{j}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{k}=\mathbf{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matrice 2 x 2 de complexes** : q = z_1**1** + z_2**j** avec z_1 = a + ib et z_2 = c - id

Et ainsi $q=\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{pmatrix}$

- **Notation vectorielle** : W.R. Hamilton

q = s + **v** = scalaire/réel + vecteur/imaginaire

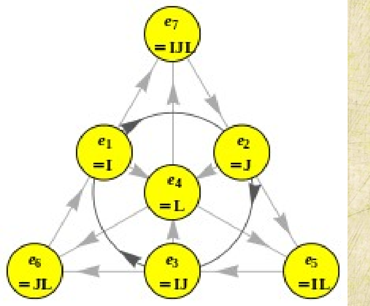
Re **q** = a et Im **q** = b**i** + c**j** + d**k**

conjugué **q*** = **q** = Re **q** – Im **q** ; module |**q**|² = **qq*** = a² + b² + c² + d²

Pour Hamilton b,c,d sont les variables d’espace et a la variable temporelle

=> modèle euclidien d’Espace-Temps

Octonions



Fano plane

- Extension dans $\mathbb{R}^8$ **non associative** des quaternions

découverts par J.T Graves (1843) et A. Cawley (1845)

- Espace **O** avec une base vectorielle = {**1, i, j, k, l, li, lj, lk**}

vérifiant **i²=j²=k²=l²=(li)²=(lj)²=(lk)²**=-1 avec **k=ij**

table de multiplication

	1	i	j	k	l	il	jl	kl
1	1	i	j	k	l	il	jl	kl
i	i	−1	k	−j	il	−l	−kl	jl
j	j	−k	−1	i	jl	kl	−l	−il
k	k	j	−i	−1	kl	−jl	il	−l
l	l	−il	−jl	−kl	−1	i	j	k
il	il	l	−kl	jl	−i	−1	−k	j
jl	jl	kl	l	−il	−j	k	−1	−i
kl	kl	−jl	il	l	−k	−j	i	−1

- **non commutavité** : ij = -ji
- non associativité mais **alternativité** :

(ab)b = a(bb)

et **associativité des puissances** :

ex) b(b(b(b))) = (((b)b)b)b = (bb)(bb)

- **normalisation** : |xy| = |x||y|
- **O** est **l'algèbre normée à division*** de plus haute dimension : $x^{-1} = |x|^{-2}\, x^*$

(*) tout élément non nul a un inverse

Hypercomplexes

Gio Fano (1871-1952)

e0 base réelle

e0,e1 base complexe

e0,..,e3 base quaternion

e0,..,e7 base octonion

Autres hypercomplexes

$q = a + i\,b + j\,c + k\,d$

- **Tessarines : Cockle (1848)**

avec $i^2=k^2=-1$ mais $j^2=+1$; $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$

$$|q|^2 = qq^* = a^2 + b^2 - c^2 + d^2$$

Anneau commutatif avec diviseurs de 0 : $(1 + j)(1 - j)=0$

Si $c=d=0$ =>nombres complexes (euclidiens)

Si $b=d=0$ => nombres complexes hyperboliques

Isomorphe aux **bicomplexes** $a + i_1 b + i_2 c + i_1 i_2 d$

×	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	−j
j	j	k	1	i
k	k	−j	i	−1

- **Coquaternions : Cockle (1849)**

avec $i^2=-1$ mais $j^2=k^2=+1$; $ij=k$, $jk=-i$, $ki=j$; $qq^* = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$

Anneau non commutatif avec diviseurs de 0

- **Quaternions hyperboliques : MacFarlane (1894)**

avec $i^2=j^2=k^2=ijk=+1$; $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$

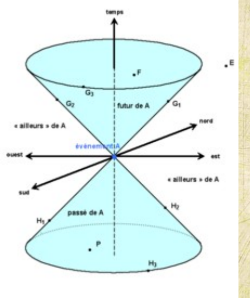
$$qq^* = a^2 - b^2 - c^2 - d^2$$

Non commutatif, non associatif avec diviseurs de 0

Application en physique relativiste (espace de Minkowski)

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	1	k	−j
j	j	−k	1	i
k	k	j	−i	1

Quelques applications



Biquaternions : dans $\mathbb{R}^8 = \mathbb{C} \times H$ (Hamilton)

- Quaternions à coefficients complexes : q = a**1** + b**i** + c**j** + d**k** avec **1, i, j, k** bases des quaternions

- Matrices de Pauli dans l'équation de Dirac :

$$\boldsymbol{\sigma_1} = \mathbf{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma_2} = \mathbf{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma_3} = \mathbf{-ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } i^2=-1 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma^2 = 1}$$

- Lorsque a réel et b, c, d imaginaires purs => quaternions hyperboliques pour le modèle espace-temps de Minkowski (c_0t,x,y,z) :

$|q|^2 = qq^* = (c_0t)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ avec $a=c_0t$, $b = ix$, $c = iy$, $d = iz$

c_0 la vitesse de la lumière dans le vide

Soit une vitesse v tq $v^2 = (x^2+y^2+z^2)/t^2$ alors $qq^* = (c^2_0-v^2)t^2 \Rightarrow v \leq c_0$

Octonions en mécanique quantique : L'équation de mouvement de Heseinberg ...

Fractale octonionique

Suite dans les octonions : $u_{n+1} = u^2_n + o$