Phénomènes insolites dans la structure multiplicative des entiers

Kafemath

Jean-Marie De Koninck

16 janvier 2025

Plan

Plan

1. Quel nombre premier apparait le plus souvent comme deuxième plus grand facteur premier ?

Plan

1. Quel nombre premier apparait le plus souvent comme deuxième plus grand facteur premier ?

2. Un deuxième plus grand facteur premier plutôt discret

Plan

1. Quel nombre premier apparait le plus souvent comme deuxième plus grand facteur premier ?

2. Un deuxième plus grand facteur premier plutôt discret

3. Le deuxième plus grand facteur premier fait bande à part

Plan

1. Quel nombre premier apparait le plus souvent comme deuxième plus grand facteur premier ?
2. Un deuxième plus grand facteur premier plutôt discret
3. Le deuxième plus grand facteur premier fait bande à part
4. Le trop longtemps négligé “facteur premier milieu”

Plan

1. Quel nombre premier apparait le plus souvent comme deuxième plus grand facteur premier ?
2. Un deuxième plus grand facteur premier plutôt discret
3. Le deuxième plus grand facteur premier fait bande à part
4. Le trop longtemps négligé “facteur premier milieu”
5. Une suite rebelle

I. Quel nombre premier apparait le plus souvent comme deuxième plus grand facteur premier?

La factorisation d'un entier

La factorisation d'un entier

Étant donné un entier $n \geq 2$, soit

$$\omega(n) := \sum_{p|n} 1 = \quad \text{le nombre de facteurs premiers distincts de } n$$

$$\Omega(n) := \sum_{p^a \| n} a = \quad \text{le nombre total de facteurs premiers de } n$$

comptant leur multiplicité

La factorisation d'un entier

Étant donné un entier $n \geq 2$, soit

$$\omega(n) := \sum_{p|n} 1 = \quad \text{le nombre de facteurs premiers distincts de } n$$

$$\Omega(n) := \sum_{p^a \| n} a = \quad \text{le nombre total de facteurs premiers de } n$$

comptant leur multiplicité

Ainsi, $\omega(12) = \omega(2^2 \cdot 3) = 2$ et $\Omega(12) = \Omega(2^2 \cdot 3) = 3$.

La factorisation d'un entier

Étant donné un entier $n \geq 2$, soit

$$\omega(n) := \sum_{p|n} 1 = \text{ le nombre de facteurs premiers distincts de } n$$

$$\Omega(n) := \sum_{p^a \| n} a = \text{ le nombre total de facteurs premiers de } n$$

comptant leur multiplicité

Ainsi, $\omega(12) = \omega(2^2 \cdot 3) = 2$ et $\Omega(12) = \Omega(2^2 \cdot 3) = 3$.
Tout entier $n \geq 2$ avec $k = \Omega(n)$ peut s'écrire sous la forme

$$n = P_k(n)P_{k-1}(n) \cdots P_3(n)P_2(n)P_1(n),$$

où $P_k(n) \leq P_{k-1}(n) \leq \cdots \leq P_3(n) \leq P_2(n) \leq P_1(n)$

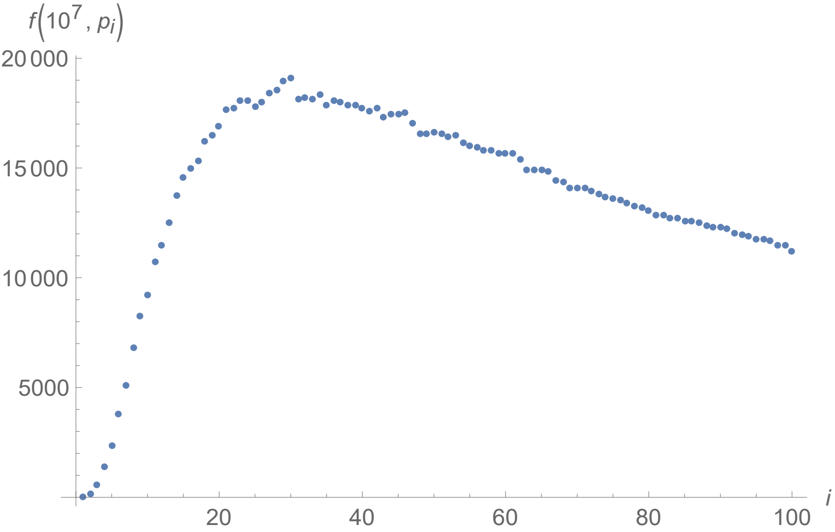
Le plus grand facteur premier

Soit $P(n) = P_1(n)$. Étant donné un grand entier N, considérons la suite des plus grands facteurs premiers des entiers de 2 à N:

$$P(2), P(3), P(4), P(5), P(6), \ldots, P(N)$$

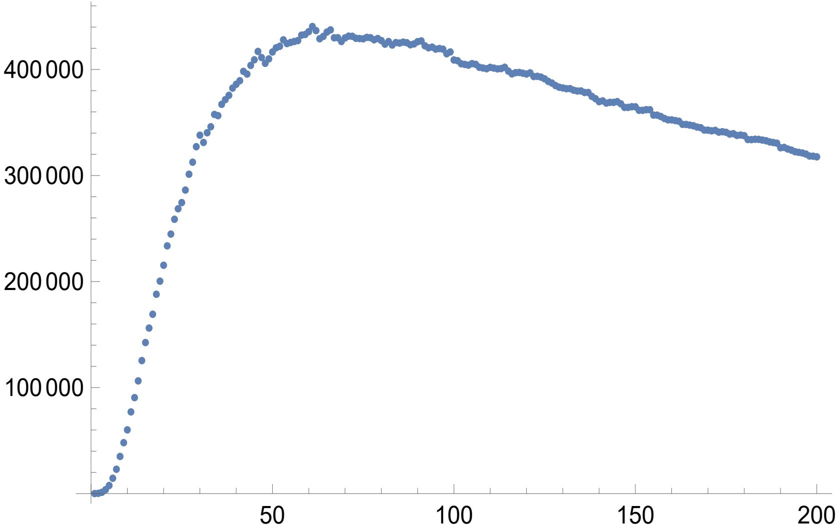
Quel nombre premier apparait le plus souvent dans cette suite finie de nombres ?

Soit $f(N, p) := \#\{n \leq N : P(n) = p\}$



Le graphe de $f(10^7, p_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, 100$

Maximum atteint avec $p_i = p_{30} = 113$



Le graphe de $f(10^9, p_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, 200$

Maximum atteint avec $p_i = p_{61} = 283$

La valeur la plus fréquente du plus grand facteur premier

La valeur la plus fréquente du plus grand facteur premier

Pour N grand, le maximum de $f(N,p)$ est atteint pour

$$p = \exp\left\{(1+o(1))\sqrt{(1/2)\log N \log\log N}\right\},$$

La valeur la plus fréquente du plus grand facteur premier

Pour N grand, le maximum de $f(N,p)$ est atteint pour

$$p = \exp\left\{(1+o(1))\sqrt{(1/2)\log N \log\log N}\right\},$$

auquel cas

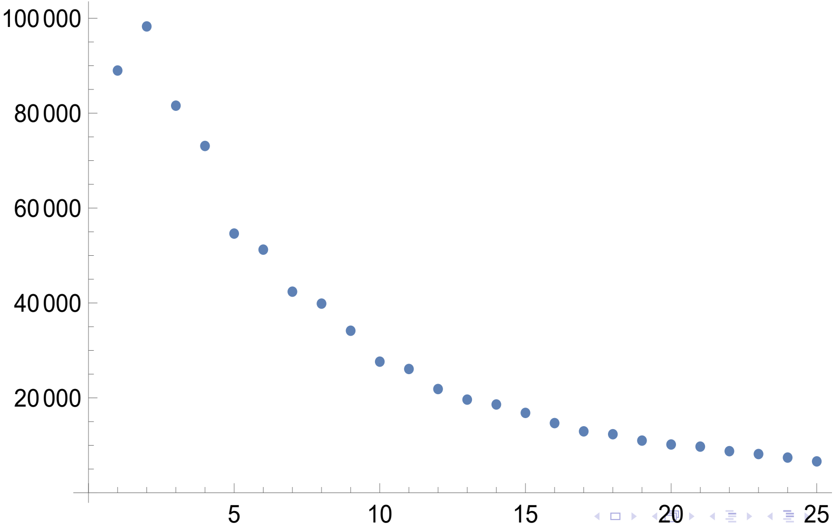
$$f(N,p) = \frac{N}{\exp\left\{(1+o(1))\sqrt{2\log N \log\log N}\right\}}$$

Factorisation typique

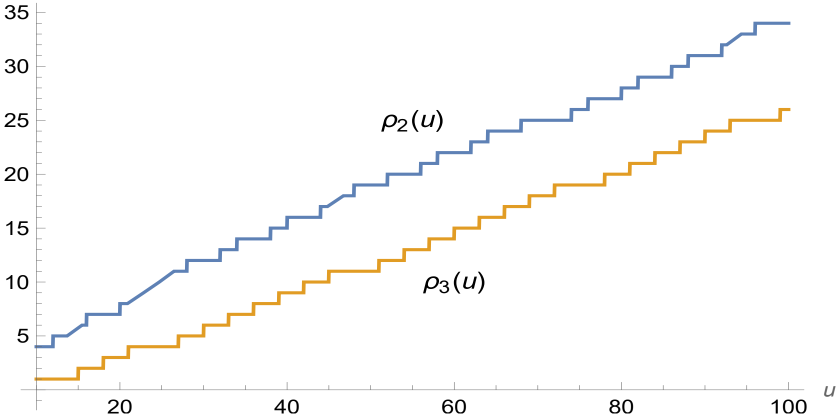
$$
\begin{aligned}
265\,830\,119 &= 809 \times 328591 \\
265\,830\,120 &= 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 47 \times 5237 \\
265\,830\,121 &= 19 \times 3299 \times 4241 \\
265\,830\,122 &= 2 \times 17 \times 1427 \times 5479 \\
265\,830\,123 &= 3 \times 13 \times 6816157 \\
265\,830\,124 &= 2^2 \times 7 \times 29 \times 443 \times 739 \\
265\,830\,125 &= 5^3 \times 11 \times 103 \times 1877 \\
265\,830\,126 &= 2 \times 3 \times 37 \times 1197433 \\
265\,830\,127 &= 113 \times 2352479 \\
265\,830\,128 &= 2^4 \times 43 \times 386381
\end{aligned}
$$

La valeur la plus fréquente du 2^e plus grand facteur premier

La valeur la plus fréquente du 2^e plus grand facteur premier

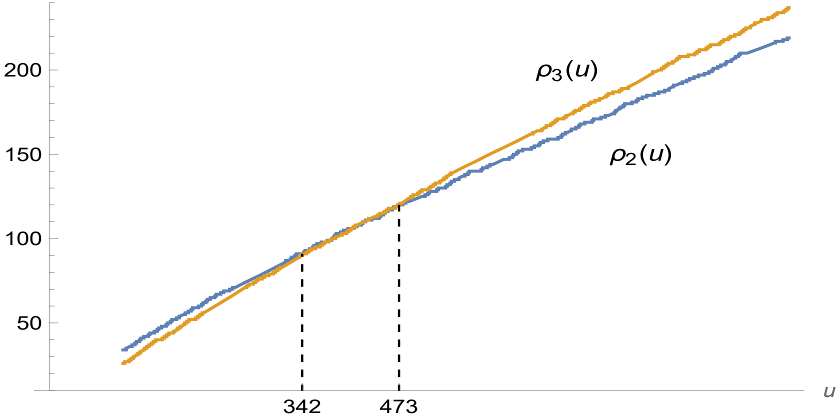


La valeur la plus fréquente du 2^e plus grand facteur premier



Graphes de $\rho_2(u) := \#\{n \leq u : P_2(n) = 2\}$ et de $\rho_3(u) := \#\{n \leq u : P_2(n) = 3\}$ pour $i = 10, 11, \ldots, 100$

La valeur la plus fréquente du 2^e plus grand facteur premier



Graphes de $\rho_2(u) := \#\{n \leq u : P_2(n) = 2\}$ et de $\rho_3(u) := \#\{n \leq u : P_2(n) = 3\}$ pour $i = 100, 101, \ldots, 1000$

Le combat féroce entre 2 et 3 pour la valeur du 2^e plus grand facteur premier

Le combat féroce entre 2 et 3 pour la valeur du 2^{e} plus grand facteur premier

En utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),$$

Le combat féroce entre 2 et 3 pour la valeur du 2e plus grand facteur premier

En utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),$$

on peut montrer que

$$\#\{n \leq x : P_2(n) = 2\} = \frac{x}{\log x} + (1 + 2\log 2)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^{5/2} x}\right),$$

Le combat féroce entre 2 et 3 pour la valeur du 2^e plus grand facteur premier

En utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),$$

on peut montrer que

$$\#\{n \le x : P_2(n) = 2\} = \frac{x}{\log x} + (1 + 2\log 2)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^{5/2} x}\right),$$

$$\#\{n \le x : P_2(n) = 3\} = \frac{x}{\log x} + (1 + \log 2 + \frac{3}{2}\log 3)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^{5/2} x}\right)$$

Le combat féroce entre 2 et 3 pour la valeur du 2e plus grand facteur premier

En utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),$$

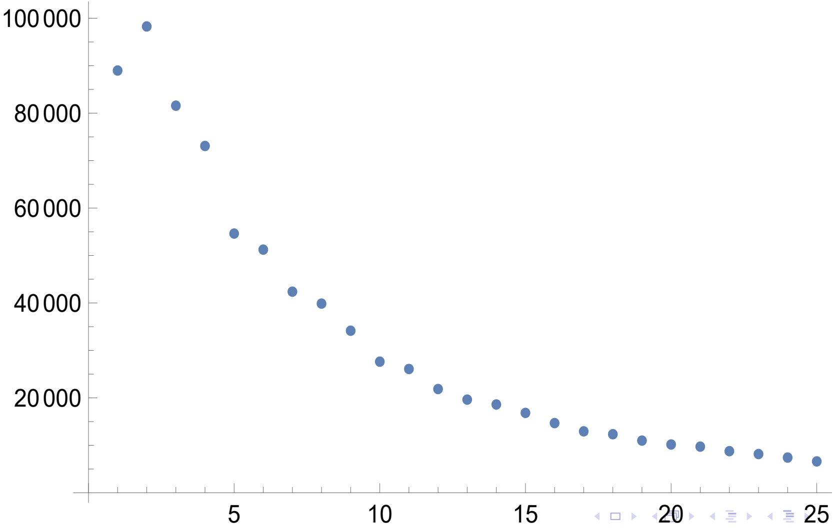
on peut montrer que

$$\#\{n \le x : P_2(n) = 2\} = \frac{x}{\log x} + (1 + 2\log 2)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^{5/2} x}\right),$$

$$\#\{n \le x : P_2(n) = 3\} = \frac{x}{\log x} + (1 + \log 2 + \frac{3}{2}\log 3)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^{5/2} x}\right)$$

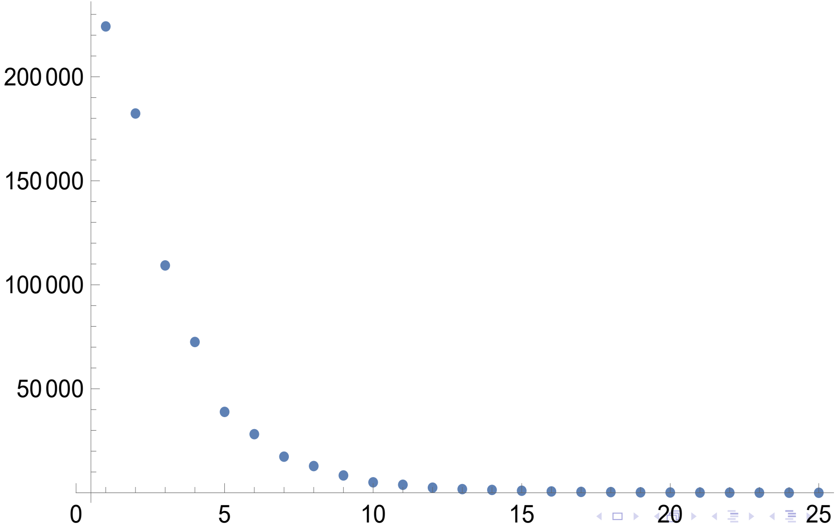
Or, $1 + \log 2 + \frac{3}{2}\log 3 > 1 + 2\log 2$.

La valeur la plus fréquente du 2^e plus grand facteur premier



La valeur la plus fréquente du 3^e plus grand facteur premier

La valeur la plus fréquente du 3^e plus grand facteur premier



II. Un deuxième plus grand facteur premier plutôt discret

La factorisation des grands nombres

La factorisation des grands nombres

Le plus souvent, une fois le plus grand facteur premier trouvé, la factorisation est complète.

La factorisation des grands nombres

Le plus souvent, une fois le plus grand facteur premier trouvé, la factorisation est complète.

Exemple: Tout facteur premier p d'un nombre de Mersenne $m = 2^q - 1$ est de la forme $p = 2qk + 1$. Ainsi, pour factoriser $m = 2^{239} - 1$, on peut procéder comme suit:

La factorisation des grands nombres

Le plus souvent, une fois le plus grand facteur premier trouvé, la factorisation est complète.

Exemple: Tout facteur premier p d'un nombre de Mersenne $m = 2^q - 1$ est de la forme $p = 2qk + 1$. Ainsi, pour factoriser $m = 2^{239} - 1$, on peut procéder comme suit:
On pose $n = m$. Pour chaque $p = 478k + 1$ diviseur de m, on calcule $n = n/p$; tant que n n'est pas premier, on vérifie si un autre $p = 478k + 1$ est diviseur de n. Ainsi, à la 5^e étape, on obtient

$$2^{239} - 1 = 479 \cdot 1\,913 \cdot 5\,737 \cdot 176\,383 \cdot 134\,000\,609 \cdot P_{49}$$

La factorisation des grands nombres

Le plus souvent, une fois le plus grand facteur premier trouvé, la factorisation est complète.

Exemple: Tout facteur premier p d'un nombre de Mersenne $m = 2^q - 1$ est de la forme $p = 2qk + 1$. Ainsi, pour factoriser $m = 2^{239} - 1$, on peut procéder comme suit:
On pose $n = m$. Pour chaque $p = 478k + 1$ diviseur de m, on calcule $n = n/p$; tant que n n'est pas premier, on vérifie si un autre $p = 478k + 1$ est diviseur de n. Ainsi, à la 5^e étape, on obtient

$$2^{239} - 1 = 479 \cdot 1\,913 \cdot 5\,737 \cdot 176\,383 \cdot 134\,000\,609 \cdot P_{49}$$

Somme toute, en général, le vrai défi est de trouver le plus grand facteur premier.

Le cas des nombres de Fermat $F_k = 2^{2^k} + 1$

.

Le cas des nombres de Fermat $F_k = 2^{2^k} + 1$

$$
\begin{aligned}
F_{10} &= 45592577 \cdot 6487031809 \\
&\cdot 4659775785220018543264560743076778192897 \cdot P_{252}
\end{aligned}
$$

Le cas des nombres de Fermat $F_k = 2^{2^k} + 1$

$$\begin{aligned}
F_{10} &= 45592577 \cdot 6487031809 \\
&\quad \cdot 4659775785220018543264560743076778192897 \cdot P_{252}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{11} &= 319489 \cdot 974849 \cdot 167988556341760475137 \\
&\quad \cdot 3560841906445833920513 \cdot P_{564}
\end{aligned}$$

Le cas des nombres de Fermat $F_k = 2^{2^k} + 1$

$$
\begin{aligned}
F_{10} &= 45592577 \cdot 6487031809 \\
&\quad \cdot 4659775785220018543264560743076778192897 \cdot P_{252} \\
F_{11} &= 319489 \cdot 974849 \cdot 167988556341760475137 \\
&\quad \cdot 3560841906445833920513 \cdot P_{564} \\
F_{16} &= 825753601 \cdot 188981757975021318420037633 \cdot C_{19694}
\end{aligned}
$$

Le cas des nombres de Fermat $F_k = 2^{2^k} + 1$

$$\begin{aligned}
F_{10} &= 45592577 \cdot 6487031809 \\
&\quad \cdot 4659775785220018543264560743076778192897 \cdot P_{252} \\
F_{11} &= 319489 \cdot 974849 \cdot 167988556341760475137 \\
&\quad \cdot 3560841906445833920513 \cdot P_{564} \\
F_{16} &= 825753601 \cdot 188981757975021318420037633 \cdot C_{19694} \\
F_{18} &= 13631489 \cdot 81274690703860512587777 \cdot C_{78884}.
\end{aligned}$$

Un 2^e plus facteur premier plutôt discret

Un 2^e plus facteur premier plutôt discret

Problème 34.26 dans *The Life of Primes in 37 Episodes*:

Un 2^e plus facteur premier plutôt discret

Problème 34.26 dans *The Life of Primes in 37 Episodes*:

Un nombre de 3426 chiffres:

$$\begin{aligned} 1123^{1123}+1 &= 2^2\cdot 281\cdot 105563\cdot 1966815463 \\ &\quad \cdot C_{1698}\cdot P_{1711} \end{aligned}$$

Un 2^e plus facteur premier plutôt discret

Problème 34.26 dans *The Life of Primes in 37 Episodes*:

Un nombre de 3426 chiffres:

$$1123^{1123}+1 = 2^2 \cdot 281 \cdot 105563 \cdot 1966815463 \cdot C_{1698} \cdot P_{1711}$$

Donc, pour ce nombre de 3426 chiffres, le vrai défi consiste à trouver son 2^e plus grand facteur premier.

Un 2^e plus facteur premier plutôt discret

Un 2^e plus facteur premier plutôt discret

Soit p un nombre premier de la forme $4k+3$. Alors le polynôme $\dfrac{(py^2)^p+1}{py^2+1}$ peut s'écrire comme une différence de deux carrés, de sorte que

$$\frac{(py^2)^p+1}{py^2+1} = Q_1(y) \times Q_2(y),$$

où chaque $Q_i(y)$ est de degré $p-1$.

Un 2^e plus facteur premier plutôt discret

Soit p un nombre premier de la forme $4k+3$. Alors le polynôme $\dfrac{(py^2)^p+1}{py^2+1}$ peut s'écrire comme une différence de deux carrés, de sorte que

$$\frac{(py^2)^p+1}{py^2+1} = Q_1(y) \times Q_2(y),$$

où chaque $Q_i(y)$ est de degré $p-1$.

Exemple: $p=3$. On a

$$\frac{(3y^2)^3+1}{3y^2+1} = 9y^4 - 3y^2 + 1 = (3y^2-3y+1)(3y^2+3y+1),$$

de sorte que

$$3^3+1 = (3+1)\cdot 1 \cdot 7 = 4 \times 7.$$

La factorisation de $p^p + 1$

La factorisation de $p^p + 1$

Le cas $p = 7$

La factorisation de $p^p + 1$

Le cas $p = 7$

$$\frac{(7y^2)^7+1}{7y^2+1} = (343y^6 - 343y^5 + 147y^4 - 49y^3 + 21y^2 - 7y + 1)$$
$$\times(343y^6 + 343y^5 + 147y^4 + 49y^3 + 21y^2 + 7y + 1)$$

La factorisation de $p^p + 1$

Le cas $p = 7$

$$\frac{(7y^2)^7+1}{7y^2+1} = (343y^6 - 343y^5 + 147y^4 - 49y^3 + 21y^2 - 7y + 1) \times (343y^6 + 343y^5 + 147y^4 + 49y^3 + 21y^2 + 7y + 1)$$

$7^7 + 1 = 2^3 \cdot 113 \cdot 911$

$1123^{1123} + 1 = 1124 \times a \times b$

$a =$

6736381324681445013777140762901312521418004109308471407169623436250697
8759491541304571743807406430090919178166394183550305441329687300949709
0798127216212310544085372902868811653567108094231155902009626023337436
1472478918878993656104129876501040493505652646544397348469739571758571
6296553813626217245989079744817680666531682561861997824668524447870087
9434735008616684991531806957959781223631447418179073991998600892866907
3819554369485441055157984720915687381017502965665769464225839329444014
9937167937004984332444175627213668752009481716437787701758013279116644
7449249870773051041407758285551282777244505232178059599320090107453947
7849436074241649085480228181230809513171869288133869286375927036941571
5482098082096542077805938181639629787490920439373128500931949108691953
7137103113125492593127146533830573173502861596139962401784621711312864
7181041827182596664340633335124563572009303367767946357980009404571175
9193013048125849566218860903585978054198648584338650507390632854775833
9072746126508515965326357343393931049558677036268618010629102074012685
9256518631704907940394630635962607958472367832673116688328182159395589
8384217671919021587629317168302658270204863455686929100527312385187364
6072971000615674136650668226652248038340498314038328258685491702150117
0788406454998799193337719021404044048312979374734142139264043500713242
1224906253760710701441615640188071442218175380305856225787762784307798
0240442115775104485870564786432638956192724422583444934701732163071463
6424659722871013994769669596371610656907434165981761365516141359625203
3536200490732553548780866056284649708351117720145985167734583327265151
9255652687427547737945169456864899079065501025744023454544734314218994
33784443298877411468921298281 99

$1123^{1123} + 1 = 1124 \times a \times b$

$b = 105563 \cdot 1966815463 \cdot$

2398821701911908402155926225061930286307914116909161587395612840483538
8222202825949482313622893708763750636574668394677258801683665109254053
6738488484975121834871486216815086441671763578758978150009579203507717
9527744325389648593133605602342802429103213125898158017619686009209151
7168079807137457893942885486315139300540258973109188900783369115219116
1631731741114182010038140100188408001816883381464425514633388517979909
5333253746138739375575442137538703671496492453651791601901261202986175
2038511989164593780690835062365167058376091942874589183304063198284644
3374297132252615844780517251862255271065816004729132769777434793508078
7606139153810587906317207220167468410603498917759452867296861778598758
4136883178855534875729421629579633004832787923615596671599718585833044
8922042301071740090537551083395548628620478384126981613294842643669459
7464309900748094591357347673981456394100812711533231754829155951618730
1796916210349322090052126195070976072651920497103021705180749729069929
3728677658419263594120579433992966440071212210414812816398348611511404
4751688478492950170721107777009255253607527870163986765200295150332318
2188452029319922793775579603669318618062606362048229707232983613854830
5697704424075141894636617093393918161995641626288838045848646883100945
5375734908653676059586584414465628235612638627683234304625484492563930
4001274207677031913945502451199239459122754672437706802550955031622555
0252114459007290079772621116007551438954533241666462650346811778252832
5967660079113679086386778804561363112464010968726332164340659220047788
8944543576492235136780208892340965973672827090861881192971220649838668
2529095643468484397130240389431176162730099548192512306324159661165776
541581532541006997

III. Le deuxième plus grand facteur premier fait bande à part

Les concepts de valeur moyenne et de valeur médiane

Les concepts de valeur moyenne et de valeur médiane

Soit $L = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ une liste de nombres (pas nécessairement distincts). À cette liste, on associe:

- sa *valeur moyenne*, soit la valeur de $\dfrac{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}{r}$;
- sa *valeur médiane*, que l'on obtient en ordonnant les éléments de L de son plus petit jusqu'a son plus grand, et ensuite en nommant celui retrouvé au milieu de la nouvelle liste comme sa valeur médiane, soit celui situé à la position $\lfloor r/2 \rfloor$.

Les concepts de valeur moyenne et de valeur médiane

Soit $L = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ une liste de nombres (pas nécessairement distincts). À cette liste, on associe:

- sa *valeur moyenne*, soit la valeur de $\dfrac{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}{r}$;
- sa *valeur médiane*, que l'on obtient en ordonnant les éléments de L de son plus petit jusqu'a son plus grand, et ensuite en nommant celui retrouvé au milieu de la nouvelle liste comme sa valeur médiane, soit celui situé à la position $\lfloor r/2 \rfloor$.

Il peut arriver que la valeur moyenne soit plus petite ou plus grande que la valeur médiane. Par exemple, si $L_1 = \{1, 2, 3, 100, 104\}$, sa valeur mediane 3 est plus petite que sa valeur moyenne 42; par contre, si $L_2 = \{1, 6, 100, 101, 102\}$, sa valeur médiane 100 est plus grande que sa valeur moyenne 62.

Les valeurs médiane et moyenne du k-ième plus grand facteur premier

Les valeurs médiane et moyenne du k-ième plus grand facteur premier

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit

$$Q_k(n) := \frac{\log P_k(n)}{\log n} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

Les valeurs médiane et moyenne du k-ième plus grand facteur premier

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit

$$Q_k(n) := \frac{\log P_k(n)}{\log n} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

Soit α_k la valeur médiane de $Q_k(n)$

Les valeurs médiane et moyenne du k-ième plus grand facteur premier

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit

$$Q_k(n) := \frac{\log P_k(n)}{\log n} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

Soit α_k la valeur médiane de $Q_k(n)$

Soit β_k la valeur moyenne de $Q_k(n)$

Les valeurs médiane et moyenne du k-ième plus grand facteur premier

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit

$$Q_k(n) := \frac{\log P_k(n)}{\log n} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

Soit α_k la valeur médiane de $Q_k(n)$

Soit β_k la valeur moyenne de $Q_k(n)$

A-t-on $\alpha_k < \beta_k$?

La valeur moyenne du k-ième plus grand facteur premier

La valeur moyenne du k-ième plus grand facteur premier

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $\quad \beta_k = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{2\le n\le x} \frac{\log P_k(n)}{\log n}$

La valeur moyenne du k-ième plus grand facteur premier

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $\quad \beta_k = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{2\le n\le x} \frac{\log P_k(n)}{\log n}$

On peut démontrer que

$$\beta_k = \frac{1}{k} - \int_k^\infty \frac{\rho_k(u)}{u^2}\, du$$

La valeur moyenne du k-ième plus grand facteur premier

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $\quad \beta_k = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{2\le n\le x} \frac{\log P_k(n)}{\log n}$

On peut démontrer que

$$\beta_k = \frac{1}{k} - \int_k^\infty \frac{\rho_k(u)}{u^2}\,du$$

où $\rho_k(u)$ est la solution continue de

$$u\rho_k'(u) + \rho_k(u-1) = \rho_{k-1}(u-1) \qquad (u > 1)$$

avec condition initiale $\rho_k(u) = 1$ pour $0 \le u \le 1$, où on pose $\rho_1(u) = \rho(u)$, la fonction de Dickman.

La valeur médiane du k-ième plus grand facteur premier

La valeur médiane du k-ième plus grand facteur premier

La valeur médiane α_k est l'unique nombre réel α pour lequel

$$\sum_{\substack{n \le x \\ P_k(n) \le x^\alpha}} 1 \sim \sum_{\substack{n \le x \\ P_k(n) > x^\alpha}} 1 \quad \text{lorsque } x \to \infty,$$

La valeur médiane du k-ième plus grand facteur premier

La valeur médiane α_k est l'unique nombre réel α pour lequel

$$\sum_{\substack{n \le x \\ P_k(n) \le x^\alpha}} 1 \sim \sum_{\substack{n \le x \\ P_k(n) > x^\alpha}} 1 \qquad \text{lorsque } x \to \infty,$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{\substack{n \le x \\ P_k(n) \le x^\alpha}} 1 \sim \frac{x}{2} \qquad \text{lorsque } x \to \infty,$$

La valeur médiane du k-ième plus grand facteur premier

La valeur médiane α_k est l'unique nombre réel α pour lequel

$$\sum_{\substack{n \le x \\ P_k(n) \le x^\alpha}} 1 \sim \sum_{\substack{n \le x \\ P_k(n) > x^\alpha}} 1 \qquad \text{lorsque } x \to \infty,$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{\substack{n \le x \\ P_k(n) \le x^\alpha}} 1 \sim \frac{x}{2} \qquad \text{lorsque } x \to \infty,$$

ce qui revient à l'unique nombre $\alpha > 0$ satisfaisant

$$\sum_{\substack{n \le x \\ P_k(n) \le n^\alpha}} 1 \sim \frac{x}{2} \qquad \text{lorsque } x \to \infty.$$

Les valeurs comparatives de α_k et β_k

k	α_k	β_k	$\alpha_k < \beta_k$
1	0.606530659712633	0.6243299885436219848338	Vrai
3	0.075843723166301	$\beta_3 > 0.08830948$	Vrai
4	0.027138396849815	$\beta_4 > 0.04031815$	Vrai
5	0.009819191758232	$\beta_5 > 0.01908932$	Vrai
6	0.003575834899599	$\beta_6 > 0.00917732$	Vrai
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	Vrai

Les valeurs comparatives de α_k et β_k

k	α_k	β_k	$\alpha_k < \beta_k$
1	0.60653065971263	0.62432998854362198483	Vrai
2	0.21172114641298	0.20958087428418581398	Faux
3	0.07584372316630	$\beta_3 > 0.08830948$	Vrai
4	0.02713839684981	$\beta_4 > 0.04031815$	Vrai
5	0.00981919175823	$\beta_5 > 0.01908932$	Vrai
6	0.00357583489959	$\beta_6 > 0.00917732$	Vrai
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	Vrai

IV. Le trop longtemps négligé facteur premier milieu

Le facteur premier milieu

Le facteur premier milieu

$p^*(n) =$ le facteur premier milieu de n

Le facteur premier milieu

$p^*(n) =$ le facteur premier milieu de n

Pour $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, on pose $p^*(n) := p_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}$

Le facteur premier milieu

$p^*(n) =$ le facteur premier milieu de n

Pour $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, on pose $p^*(n) := p_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}$

Le facteur premier milieu

$p^*(n) =$ le facteur premier milieu de n

Pour $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, on pose $p^*(n) := p_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}$

$$p^*(p) = p, \quad p^*(pq) = p, \quad p^*(pqr) = q, \quad p^*(pqrs) = q$$

Le facteur premier milieu d'un entier

Le facteur premier milieu d'un entier

Paul Erdős

Oberwolfach — 1984

Le facteur premier milieu d'un entier

Paul Erdős

Oberwolfach — 1984

$$\sum_{2\leq n\leq x} \frac{1}{p^*(n)} = ???$$

Résultats préliminaires

Résultats préliminaires

Erdős, Ivić, et Pomerance (1986):

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{P(n)} = x\int_2^x \frac{1}{t^2}\rho\left(\frac{\log x}{\log t}\right)\,dt\left(1+O\left(\sqrt{\frac{\log\log x}{\log x}}\right)\right).$$

Résultats préliminaires

Erdős, Ivić, et Pomerance (1986):

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{P(n)} = x \int_2^x \frac{1}{t^2} \rho\left(\frac{\log x}{\log t}\right) dt \left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\log\log x}{\log x}}\right)\right).$$

JMDK (1995): Pour chaque entier $k \ge 2$, il existe une constante $c_k > 0$ telle que

$$\sum_{\substack{n \le x \\ \Omega(n) \ge k}} \frac{1}{P_k(n)} = c_k \frac{x(\log\log x)^{k-2}}{\log x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right)$$

Résultats préliminaires

Erdős, Ivić, et Pomerance (1986):

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{P(n)} = x\int_2^x \frac{1}{t^2}\rho\left(\frac{\log x}{\log t}\right)\,dt\left(1+O\left(\sqrt{\frac{\log\log x}{\log x}}\right)\right).$$

JMDK (1995): Pour chaque entier $k\geq 2$, il existe une constante $c_k>0$ telle que

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ \Omega(n)\geq k}}\frac{1}{P_k(n)} = c_k\,\frac{x(\log\log x)^{k-2}}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right)$$

avec $c_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{p\geq P(m)}\frac{1}{p^2} = 1,254\ldots$

Le facteur premier milieu d'un entier

JMDK & Florian Luca (2013): Lorsque $x \to \infty$,

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{p^*(n)} = \frac{x}{\log x} \exp \left\{ (\sqrt{2} + o(1)) \sqrt{\log \log x \cdot \log \log \log x} \right\}$$

Un rappel sur le comportement des fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$

Un rappel sur le comportement des fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$

$\sum_{n\le x}\omega(n) = x\log\log x + O(x)$

Un rappel sur le comportement des fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = x\log\log x + O(x)$$
$$\sum_{n\le x}\Omega(n) = x\log\log x + O(x)$$

Un rappel sur le comportement des fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = x\log\log x + O(x)$$
$$\sum_{n\le x}\Omega(n) = x\log\log x + O(x)$$
$$\sum_{n\le x}\frac{1}{\omega(n)} = \frac{x}{\log\log x} + O\left(\frac{x}{(\log\log x)^2}\right)$$

Un rappel sur le comportement des fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = x\log\log x + O(x)$$
$$\sum_{n\le x}\Omega(n) = x\log\log x + O(x)$$
$$\sum_{n\le x}\frac{1}{\omega(n)} = \frac{x}{\log\log x} + O\left(\frac{x}{(\log\log x)^2}\right)$$
$$\sum_{n\le x}\frac{1}{\Omega(n)} = \frac{x}{\log\log x} + O\left(\frac{x}{(\log\log x)^2}\right)$$

Un rappel sur le comportement des fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = x\log\log x + O(x)$$
$$\sum_{n\le x}\Omega(n) = x\log\log x + O(x)$$
$$\sum_{n\le x}\frac{1}{\omega(n)} = \frac{x}{\log\log x} + O\left(\frac{x}{(\log\log x)^2}\right)$$
$$\sum_{n\le x}\frac{1}{\Omega(n)} = \frac{x}{\log\log x} + O\left(\frac{x}{(\log\log x)^2}\right)$$
$$\sum_{n\le x}\frac{\Omega(n)}{\omega(n)} = x + O\left(\frac{x}{\log\log x}\right)$$

Le facteur premier milieu comptant la multiplicité

Le facteur premier milieu comptant la multiplicité

Soit $n = p_1 p_2 \cdots p_{\Omega(n)}$, où $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_{\Omega(n)}$

Le facteur premier milieu comptant la multiplicité

Soit $n = p_1 p_2 \cdots p_{\Omega(n)}$, où $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_{\Omega(n)}$

On pose $p^{\square}(n) := p_{\lfloor \frac{\Omega(n)+1}{2} \rfloor}$ et rappelons que $p^*(n) := p_{\left\lfloor \frac{\omega(n)+1}{2} \right\rfloor}$

Le facteur premier milieu comptant la multiplicité

Soit $n = p_1 p_2 \cdots p_{\Omega(n)}$, où $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_{\Omega(n)}$

On pose $p^{\Box}(n) := p_{\lfloor \frac{\Omega(n)+1}{2} \rfloor}$ et rappelons que $p^*(n) := p_{\lfloor \frac{\omega(n)+1}{2} \rfloor}$

A-t-on, lorsque $x \to \infty$,

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{p^{\Box}(n)} \sim \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{p^*(n)} \quad ?$$

Le facteur premier milieu comptant la multiplicité

$\vdots$

Le facteur premier milieu comptant la multiplicité

Soit $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, où $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$

:

Le facteur premier milieu comptant la multiplicité

Soit $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, où $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$

On pose $p^{\square}(n) := p_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}$. Vincent Ouellet (2018):

Le facteur premier milieu comptant la multiplicité

Soit $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, où $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$

On pose $p^{\square}(n) := p_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}$. Vincent Ouellet (2018):

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{p^{\square}(n)} = \frac{C\,x}{\sqrt{\log x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right),$$

où

$$\begin{aligned} C &= \frac{3}{\sqrt{\pi}} \prod_q \frac{\sqrt{1 - 1/q}}{1 - 1/2q} \\ &\quad \times \sum_p \frac{1}{p^2} \prod_{q<p} \left(1 - \frac{1}{2q}\right) \prod_{3 \leq q \leq p} \left(1 - \frac{2}{q}\right)^{-1} \approx 1,3802. \end{aligned}$$

V. Les suites de Göbel

La suite 2-Göbel

La suite 2-Göbel

Soit $x_1 = 2,\ x_2 = \dfrac{2 + x_1^2}{2} = 3,\ x_3 = \dfrac{2 + x_1^2 + x_2^2}{3} = 5,\ \ldots,$

$$\text{et plus généralement, } x_n = \frac{2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{n}$$

La suite 2-Göbel

Soit $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{2 + x_1^2}{2} = 3$, $x_3 = \dfrac{2 + x_1^2 + x_2^2}{3} = 5$, ...,

et plus généralement, $x_n = \dfrac{2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{n}$

2, 3, 5, 10, 28, 154, 3520, 1551880, 267593772160,
7160642690122633501504,
4661345794146064133843098964919305264116096, ...

La suite 2-Göbel

Soit $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{2 + x_1^2}{2} = 3$, $x_3 = \dfrac{2 + x_1^2 + x_2^2}{3} = 5$, $\ldots$,

$$\text{et plus généralement, } x_n = \frac{2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{n}$$

$2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 28,\ 154,\ 3520,\ 1551880,\ 267593772160,$
$7160642690122633501504,$
$4661345794146064133843098964919305264116096, \ldots$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{42}$ sont tous des entiers

La suite 2-Göbel

Soit $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{2 + x_1^2}{2} = 3$, $x_3 = \dfrac{2 + x_1^2 + x_2^2}{3} = 5, \ldots,$

$$\text{et plus généralement, } x_n = \frac{2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{n}$$

2, 3, 5, 10, 28, 154, 3520, 1551880, 267593772160,
7160642690122633501504,
4661345794146064133843098964919305264116096, ...

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{42}$ sont tous des entiers

x_{42} est fait de 89 288 343 500 chiffres

La suite 2-Göbel

Soit $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{2 + x_1^2}{2} = 3$, $x_3 = \dfrac{2 + x_1^2 + x_2^2}{3} = 5, \ldots,$

$$\text{et plus généralement, } x_n = \frac{2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{n}$$

$$2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 28,\ 154,\ 3520,\ 1551880,\ 267593772160,$$
$$7160642690122633501504,$$
$$46613457941460641338430989649193052641160966,\ldots$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{42}$ sont tous des entiers

x_{42} est fait de 89 288 343 500 chiffres

Hendrik Lenstra (1975): x_{43} n'est pas un entier

La suite 3-Göbel

La suite 3-Göbel

Soit $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{2 + x_1^3}{2} = 5$, $x_3 = \dfrac{2 + x_1^3 + x_2^3}{3} = 45, \ldots,$

$$\text{et plus généralement, } x_n = \frac{2 + x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{n-1}^3}{n}$$

La suite 3-Göbel

Soit $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{2 + x_1^3}{2} = 5$, $x_3 = \dfrac{2 + x_1^3 + x_2^3}{3} = 45$, $\ldots$,

$$\text{et plus généralement, } x_n = \frac{2 + x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{n-1}^3}{n}$$

2, 5, 45, 22815, 2375152056927,
2233176271342403475345148513527359103,. . .

La suite 3-Göbel

Soit $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{2 + x_1^3}{2} = 5$, $x_3 = \dfrac{2 + x_1^3 + x_2^3}{3} = 45, \ldots,$

$$\text{et plus généralement, } x_n = \frac{2 + x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{n-1}^3}{n}$$

2, 5, 45, 22815, 2375152056927,
2233176271342403475345148513527359103,...

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{88}$ sont tous des entiers

La suite 3-Göbel

Soit $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{2 + x_1^3}{2} = 5$, $x_3 = \dfrac{2 + x_1^3 + x_2^3}{3} = 45, \ldots,$

$$\text{et plus généralement, } x_n = \frac{2 + x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{n-1}^3}{n}$$

2, 5, 45, 22815, 2375152056927,
2233176271342403475345148513527359103,...

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{88}$ sont tous des entiers

x_{89} n'est pas un entier

La suite 2-Göbel avec une autre valeur initiale

Au lieu de prendre comme valeur initiale $x_1 = 2$, on choisit $x_1 = 3$, alors on obtient la suite

Soit $x_1 = 3$, $x_2 = \dfrac{3 + x_1^2}{2} = 6$, $x_3 = \dfrac{3 + x_1^2 + x_2^2}{3} = 16, \ldots,$

$$\text{et plus généralement, } x_n = \frac{3 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{n},$$

auquel cas on obtient ceci pour les 7 premiers termes:

$$3,\ 6,\ 16,\ 76,\ 1216,\ 247456,\ \frac{61235956672}{7}$$

Merci !