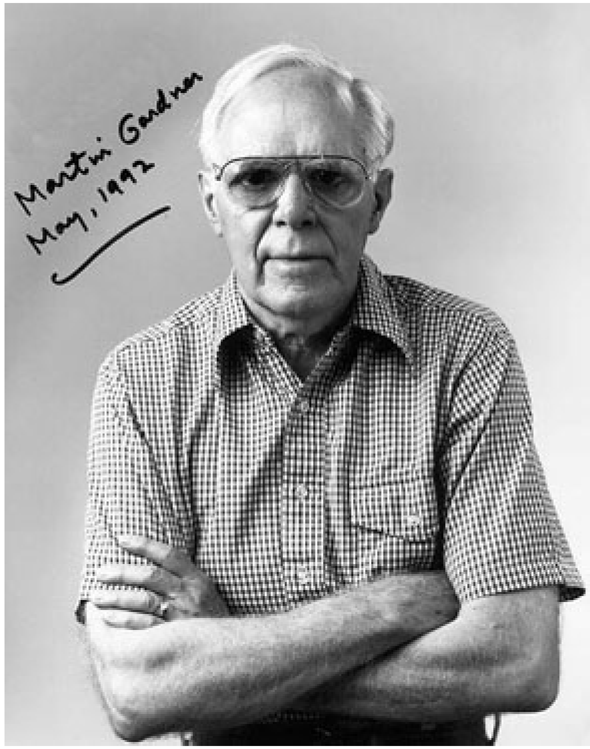
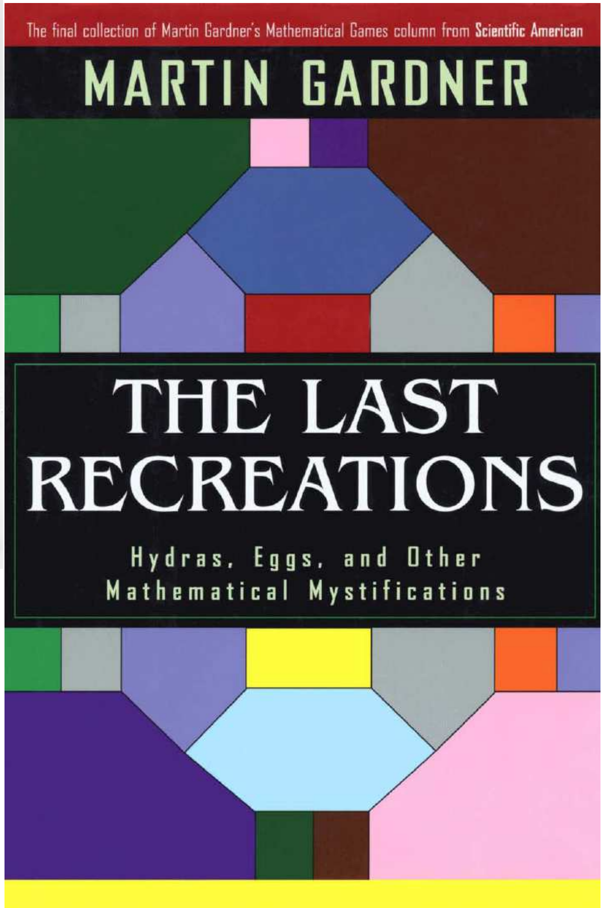
Martin Gardner



21/10/1914
22/05/2010



The Power of the Pigeonhole

Le Principe des Tiroirs

Quelque chose d'aussi simple peut-il être utile?
Ross Honsberger (1929-2016)

Si au moins $n+1$ « objets » doivent être mis dans n « boîtes », alors au moins une « boîte » contient au moins deux « objets ».

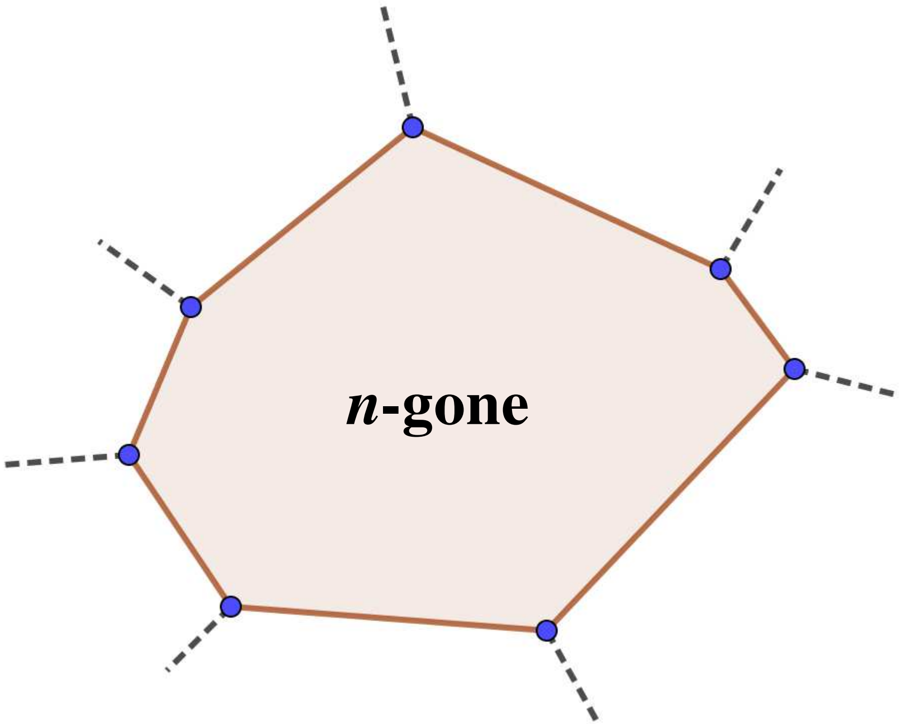
Généralisation:
Si au moins $kn+1$ « objets » doivent être mis dans n « boîtes », alors au moins une « boîte » contient au moins $k+1$ « objets ».

Pál Erdös à Lajos Pósa (11 ans) :

« Démontrer que, pour $n + 1$ entiers $\leq 2n$, il existe au moins une paire d'entiers premiers entre eux. »

La messe des faces

Polyèdre avec au maximum *n* côtés pour une face.



Nombre de Faces:
$\geq n + 1$

Nombre de côtés pour une face:
3, 4, ..., *n*

soit $n - 2$ valeurs

P. T. => *au moins* deux faces ont le même nombre de côtés.

et même:
***au moins* deux paires de faces ont le même nombre de côtés.** ■

10 entiers < 100

Choisir un ensemble E de dix entiers de 1 à 2 digits.

On peut toujours effectuer deux sélections différentes de nombres dans E *qui ont la même somme.*

La plus grande somme possible est :
90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 = 945

Nombre de sélections possibles : $2^{10} - 1 = 1023 > 945$ ■

Pillules

Objectif: prendre 48 pilules en 30 jours

Contrainte: prendre au moins une pilule par jour

***Il y a toujours un certain nombre de jours consécutifs pour lesquels la somme des pilules prises est* S = 11**

En fait:

Vrai pour toute valeur S de 1 à 30, sauf **16, 17, 18**

Contre-exemple pour 16, 17 et 18:

$$\underbrace{1:1:\ldots:1}_{15}:\underbrace{19}_{1}:\underbrace{1:1:\ldots:1}_{14}=\underbrace{48}_{30}$$

S = 11

p_i = nombre total de pilules prises jusqu'au $i^{\text{ème}}$ jour.

$$0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_{30} = 48$$

$$11 < 11 + p_1 < 11 + p_2 < \ldots < 11 + p_{30} = 59$$

P.T. => Il existe i, j tels que : $p_i = p_j + 11$

<=> onze pilules ont été prises dans les jours consécutifs

$j + 1, j + 2, \ldots, i$

Argument valable pour $1 \leq S \leq 11$

$\mathbf{S = 30 + \boldsymbol{n}}$ $(1 \leq n \leq 17)$

Contre-exemple générique:

$$\underbrace{19-n}_{1}:\underbrace{1:1:...:1}_{n+11}:\underbrace{n+1}_{1}:\underbrace{1:1:...:1}_{17-n}$$

Exemple: S = 37 ($n = 7$)

$$12:\underbrace{1:1:...:1}_{18}:8:\underbrace{1:1:...:1}_{10}$$

Les 101 nombres

Choisir $1 \leq a_1, a_2, \ldots, a_{101} \leq 200$

Il est impossible de choisir un tel ensemble sans qu'au moins un nombre ait au moins un multiple

Tout nombre peut s'écrire $a_i = 2^{p_i} q_i$ avec q_i impair

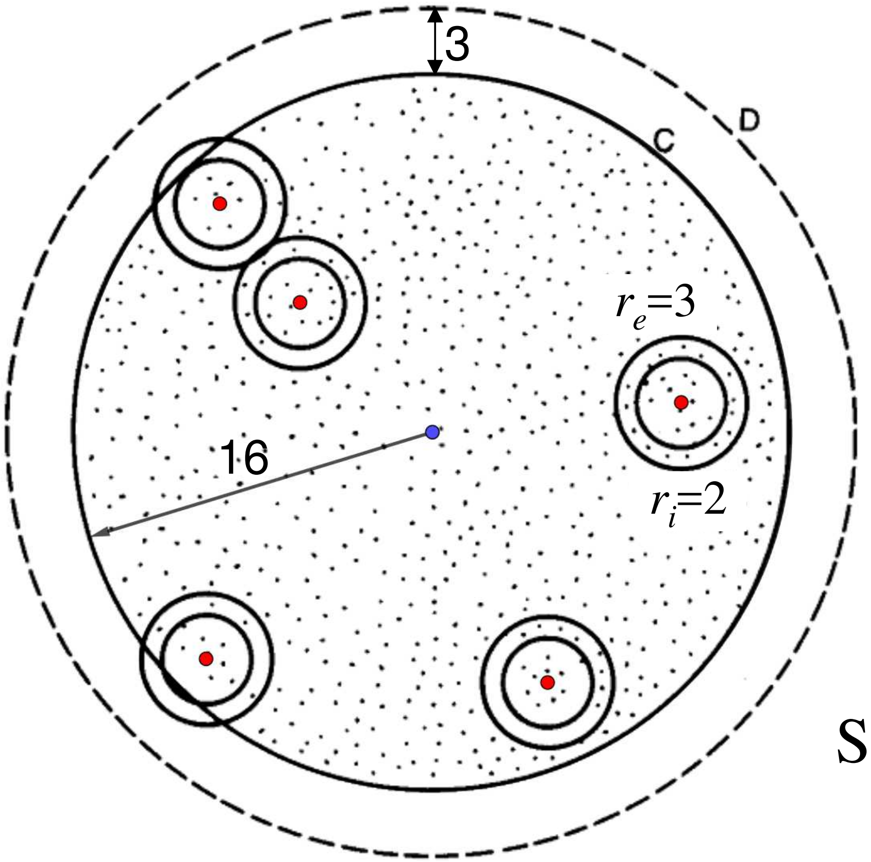
101 valeurs de q_i
prises dans les
100 nombres impairs 1, 3, 5, …, 199

P.T. => Il existe i, j tels que : $q_i = q_j = q$ ■

$$a_i = 2^{p_i} q \qquad a_j = 2^{p_j} q \qquad \frac{a_j}{a_i} = 2^{(p_j - p_i)}$$

650 points dans un cercle

650 points dans un cercle (C) de rayon R = 16.



Anneau **A**: 2 < r < 3

Chaque point de (C) est le centre d'une copie de A.
=> tous les anneaux $\subset$ (D)

$S(D) = \pi 19^2 = 361\pi$
$S(\cup A) = 650[\pi(3^2-2^2)] = 3250\pi$

(P) : **A** peut toujours couvrir 10 points.

650 points dans un cercle

Les anneaux: un problème de fond

Version « continue » du P. T.

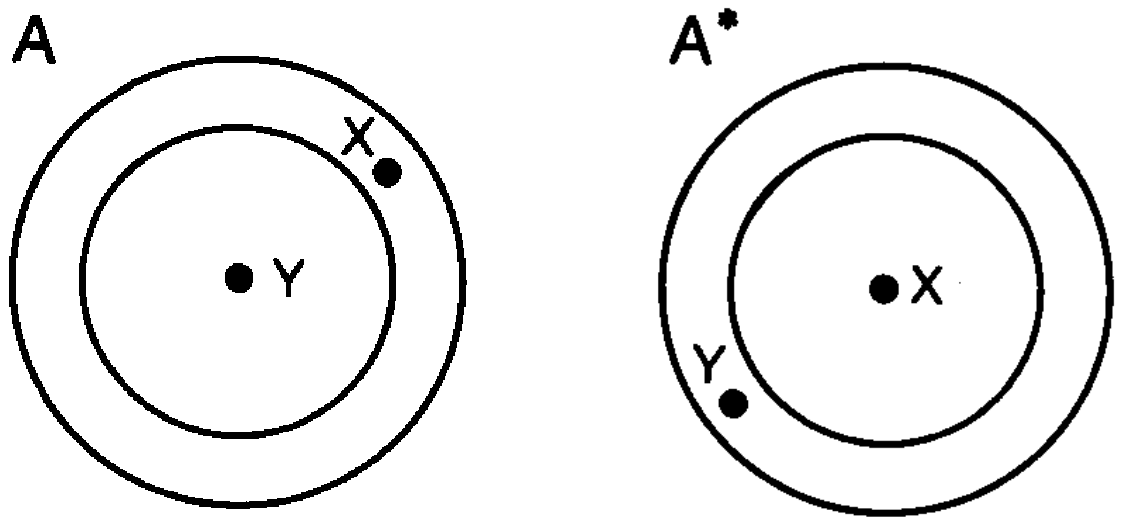
Raisonnement apagogique :

(H) Aucun point de (D) n'est couvert pas plus de 9 copies de A.

$$\Rightarrow S(\cup A) = 3250\pi \leq 9.S(D) = 9(361\pi) = 3249\pi$$

$$\neg(H) \Leftrightarrow \exists X \in (D) \text{ couvert par (au moins) 10 copies de A}$$

$\Leftrightarrow$L'anneau A* de centre X contient au moins 10 points Y



Sous-suites d'une permutation

Arrangement quelconque de la suite 1, 2, …, $n^2 + 1$

Proposition (P):

il existe toujours une sous suite de longueur (au moins) n + 1, soit croissante, soit décroissante.

Exemple: $n = 3$ => nombres de 1 à 10

6, **5**, 9, **3**, 7, **1**, 2, 8, 4, 10

6, 5, 9, 3, **7**, 1, 2, **8**, 4, **10**

On associe à chaque valeur de rang i, les coordonnées (c_i, d_i):

- c_i = longueur de plus longue suite croissante commençant au rang i
- d_i = longueur de la plus longue suite décroissante commençant au rang i

$$\textbf{(P)} \Leftrightarrow \exists i \, (c_i \geq n + 1) \vee (d_i \geq n + 1)$$

$$\neg(\mathbf{P}) \Leftrightarrow \forall i\ (c_i \leq n) \wedge (d_i \leq n)$$

Dans ce cas, n^2 valeurs de couple (c_i, d_i)
pour $(n^2 + 1)$ valeurs de l'indice i.

P. T. => un paire (c, d) est attribuée à deux indices i et j

Mais:

- $i < j \quad => c_i > c_j$
- $i > j \quad => d_i > d_j$

$$\neg(\mathbf{P})\ \textbf{FAUSSE} \Leftrightarrow (\mathbf{P})\ \textbf{VRAIE}$$

- **Points du réseau** (plan) Réseau = points de coordonnées entières

(P) : *Pour cinq points quelconques du réseau, au moins un des segments constitués par ces points passe par un nœud du réseau.*

4 classes de parité pour les coordonnées de 5 points:
(I, I); (I, P); (P, I); (P, P)

P. T. :
=> 2 points, $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$, appartiennent à la même classe
=> le milieu M du segment M_1M_2 appartient au réseau.

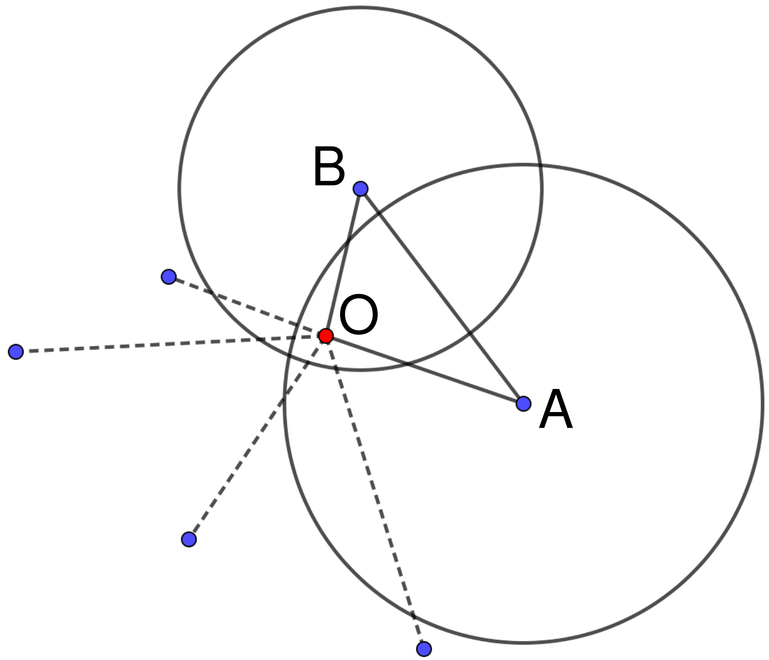
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad \blacksquare$$

Deux exercices

- **Six disques** (cercle compris) placés dans le plan de sorte qu'aucun ne contienne le centre d'un autre

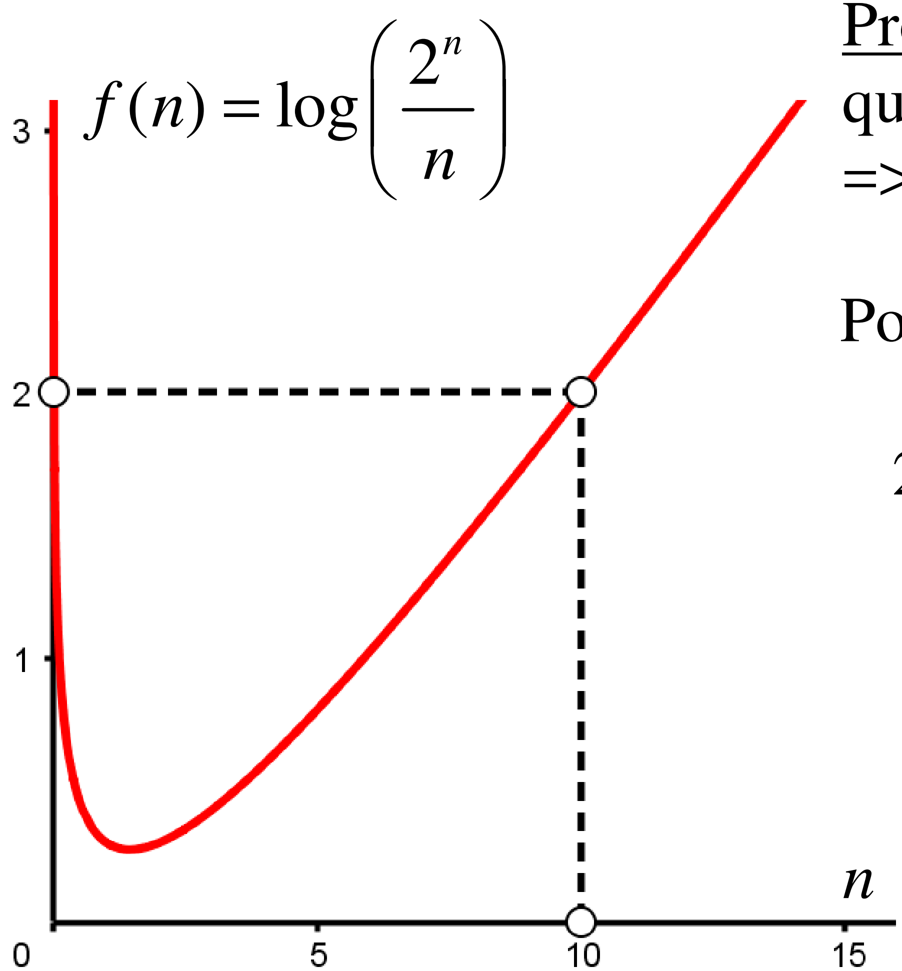
(P) : *Les disques n'ont pas de point en commun.*

(H) = ¬(P): O point commun aux disques



- alignements OAB ou OBA impossibles
- $AB > \text{Max}(R_A, R_B)$
- $OA \leq R_A < AB$
- $OB \leq R_B < AB$
- angle $(OA, OB) > \pi/3$ ■

Partition d'un ensemble de cardinal n: $\mathrm{P}(n) = 2^n$



<u>Problème additif:</u>
quantité V par personnne
=> les valeurs varient de 0 à nV.

Pour appliquer le P. T. :

$$2^n > n.\mathrm{V} \Leftrightarrow \frac{2^n}{n} > \mathrm{V}$$

Problème suivant:

$$\frac{2^{12}}{12} \approx 341 > 250 \text{ (ml)}$$

Le principe des verres

12 personnes commandent (chacune!) un demi de bière = 250 ml
Volume total = 3000 ml, Nb d'ensembles = 4096

Dans un groupe de **12 personnes**:
Il y aura toujours (à tout instant t) deux groupes distincts dont le volume des boissons est identique ***au ml près****.*

---

100 personnes commandent (chacune!) un demi de bière = 250 ml
Volume total = 25 l < 1500 moles < 10^{27} molécules < 10^{28} atomes,
Nb d'ensembles ≈ 10^{30}

Dans un groupe de **100 personnes**:
Il y aura toujours (à tout instant t) deux groupes distincts dont le nombre d'atomes des boissons est identique, ***à l'atome près****!*

Quels groupes? ☺