Longues batailles et batailles infinies

Les différentes façons de ranger les cartes changent vos chances de gagner à la Bataille

Jean-Paul DELAHAYE et Philippe MATHIEU Université de Lille, Campus Cité Scientifique
CRISTAL, UMR CNRS 9189 Bâtiment ESPRIT Bureau 04-05
59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX
Téléphone : 06-30-71-08-95 E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille.fr

La Bataille française

Plusieurs variantes.

Un jeu de 32 cartes ou 52 cartes est distribué également entre deux joueurs.

Pour un jeu de 52 cartes, les forces ou **valeurs** des cartes par ordre croissant sont

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as,

On ne prend pas en compte leurs couleurs : cœur, carreau, pique ou trèfle.

Cas général auquel se ramènent les jeux de 32 et 52 cartes

C couleurs, V valeurs de cartes que nous noterons 1, 2, 3, ..., V.

Les règles.

• Chacun des deux joueurs tient en main son paquet de cartes les faces en dessous.

• Chaque joueur pose sur la table **la carte du dessus** de son paquet en la **retournant**.

• La carte la plus forte désigne le gagnant qui **prend les deux cartes et les range** sous son paquet.

• S'il y a égalité, c'est « la bataille », chaque joueur ajoute une carte, prise au-dessus de son paquet.

• Si les nouvelles cartes sont de forces différentes, la plus forte désigne le gagnant qui prend toutes les cartes sur la table, et les range sous son paquet.

• En cas de nouvelle égalité, les joueurs ajoutent chacun une troisième carte, etc.

• Une fois les cartes rangées, on recommence.

• Si un joueur n'a plus de cartes, il a perdu.

• Si les deux joueurs épuisent leur paquet au même moment c'est une partie nulle.

Il faut ajouter des précisions concernant la façon dont un gagnant range ses cartes

(a) « Rangement naturel »

Le gagnant place en premier sous son paquet, **la carte qui l'a fait gagner**,

puis celle prise à son adversaire,

puis les deux de la dernière bataille, puis celles de la bataille précédente, etc.

[3, 2, 1, 1, 2, 1] / [3, 2, 1, 2, 3, 3]

bataille 3, 3, puis une autre 2, 2, puis une troisième 1, 1,

puis 1 contre 2 qui fait gagner le joueur 2 :

[2, 1] / [3, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3]

(b) « Rangement optimisé ».

Exploiter le mieux possible la liberté de ranger les cartes gagnées.
On les classe donc de la plus forte à la moins forte et on les met dans cet ordre sous son paquet.
Les meilleures cartes reviendront le plus rapidement possible, ce qui doit avantager.

[3, 2, 1, 1, 2, 1] / [3, 2, 1, 2, 3, 3] donne [2, 1] et [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1]

(c) « Rangement aléatoire ».

Le gagnant prend les cartes qu'il vient de gagner, les mélange, et les met sous son paquet.

Exemples. Jeu de 8 cartes (C = 4, V = 2) et « Rangement naturel ».

[1, 1, 1, 2] / [2, 2, 1, 2] →

[1, 1, 2] / [2, 1, 2, 2, 1] →

[1, 2] / [1, 2, 2, 1, 2, 1] →

[] / [2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1].

Le joueur 2 gagne.

[1, 1, 2, 2] / [2, 2, 1, 1] →

[1, 2, 2] / [2, 1, 1, 2, 1] →

[2, 2] / [1, 1, 2, 1, 2, 1] →

[2, 2, 1] / [1, 2, 1, 2, 1] →

[2, 1, 2, 1] / [2, 1, 2, 1].

Partie nulle.

Durées moyennes en nombres de cartes jouées par chaque joueur.

Tableau pour C=1

Rangement\V	**2**	**4**	**10**	**32**	**52**
naturel	1.0	3.33	14.47	129.93	338.12
aléatoire	1.0	3.52	24.83	256.22	674.90

Tableau pour C=4 (cœur, carreau, pique, trèfle)

Rangement\V	**2** (8c)	**3** (12c)	**4** (16c)	**8** (32c)	**10** (40c)	**13** (52c)
naturel	5.37	13.43	28.53	131.87	207.37	349.44
optimisé	5.37	12.10	24.04	118.22	189.70	328.03
aléatoire	6.20	18.65	41.32	216.79	352.92	620.73

Parties plus courtes avec *rangement optimisé*, devant *rangement naturel*, puis *rangement aléatoire*

Combats entre méthodes de rangement.

Nous avons fait jouer les unes contre les autres les trois catégories de joueurs en mesurant si la probabilité de gain restait 50% pour chacun, ou déviait de l'équilibre.

Séries de 100 000 parties pour chaque résultat.

	32 cartes (C=4 V=8)	52 cartes (C=4 V=13)
Naturel vs Optimisé	47,7% / 52,3%	48,9% / 51,1%
Naturel vs Aléatoire	53,5% / 46,5%	52,5% / 47,5%
Optimisé vs Aléatoire	55,2% / 44,8%	53,0% / 47,0%

Sans surprise le *rangement optimisé* est le meilleur, et le *rangement aléatoire* le pire.

La question des parties infinies

Rangement aléatoire

Il est toujours possible d'avoir des cycles avec un hasard qui fait bien les choses.

C=1, V=4

[4, 1] / [2, 3] → [1, 4, 2] / [3] → [4, 2] / [1, 3] → [2, 4, 1] / [3] → [4, 1] / [2, 3].

C=4, V=13

[13, 12, 13, 12, 11, 10, 11, 10, 9, 8, 9, 8, 7, 6, 7, 6, 5, 4, 5, 4, 3, 2, 3, 1, 2, 1] /
[12, 13, 12, 13, 10, 11, 10, 11, 8, 9, 8, 9, 6, 7, 6, 7, 4, 5, 4, 5, 2, 3, 1, 3, 1, 2]

C=1 Rangement naturel = rangement optimisé

Résultat de Michael Spivey (2010)

(Département de Mathématiques et d'informatique de l'université de Puget Sound à Tacoma État de Washington USA)

Il y a des cycles pour les entiers V qui

ne sont pas de la forme 2^k, $k \geq 1$ ou de la forme 3.2^k, $k \geq 0$.

Autrement dit, il existe des cycles pour les entiers V qui n'appartiennent pas à l'une des séries :

$2, 4, 8, 16, ..., 2^k, ...$ et $3, 6, 12, 24, 48, ..., 3.2^k, ...$

***

« V n'est pas de la forme 2^k avec $k \geq 1$ ou de la forme 3.2^k, avec $k \geq 0$ » $\Leftrightarrow$
« V est de la forme $m.2^k$ avec $k \geq 0$, et m impair > 3 ».

Cycle de longueur 6 pour V = 5 :

[5, 3] / [2, 4, 1] →
[3, 5, 2] / [4, 1] →
[5, 2] / [1, 4, 3] →
[2, 5, 1] / [4, 3] →
[5, 1] / [3, 4, 2] →
[1, 5, 3] / [4, 2] →
[5, 3] / [2, 4, 1]

V = 7 : [7, 4] / [3, 6, 2, 5, 1] cycle de longueur 8.

V = 9 : [9, 5, 8, 4] / [3, 7, 2, 6, 1] cycle de longueur 20.

V = 10 : [8, 6, 3, 10, 5] / [2, 9, 7, 4, 1] cycle de longueur 60.

Méthode générale qui fonctionne pour tous les V impairs à partir de 5.

On prend les jeux sous la forme :

[A, B, A, B, ..., A, B] / [B, A, B, A, ..., B, A, B]

En considérant que toute valeur A est supérieure à toute valeur B : on a un cycle entre A et B.

[A, B, A, B] / [B, A, B, A, B] →

[B, A, B, A, B] / [A, B, A, B]→

[A, B, A, B] / [B, A, B, A, B] ;

cycle de longueur 2.

Si on remplace les A et les B par des nombres entre 1 et V sans prendre deux fois le même et en respectant la règle :

« tout nombre utilisé à la place d'un A est supérieur à tout nombre utilisé à la place d'un B »,

on obtient un cycle en termes de A et de B.

• Ce cycle en termes de A et de B ne sera pas nécessairement un cycle en termes de nombres pris entre 1 et V car au bout d'une période du cycle les nombres remplaçant les A seront peut-être dans un ordre différent de celui de départ (de même pour les nombres remplaçant les B).

• Mais il n'y a qu'un nombre fini de façons de classer les nombres remplaçant les A, et les B,

• Les cycles en termes de A et de B donnent donc des cycles en terme de nombres.

Exemple : V = 9.

Départ du cycle en termes de A et de B : [A, B, A, B] / [B, A, B, A, B] ; Cycle de longueur 2.

Il y a 5! x 4! = 2880 de faire des choix. Au hasard [9, 1, 6, 2] / [5, 8, 4, 7, 3].

```
[9, 1, 6, 2] / [5, 8, 4, 7, 3] →[1, 6, 2, 9, 5] / [8, 4, 7, 3] →[6, 2, 9, 5] / [4, 7, 3, 8, 1] →
[2, 9, 5, 6, 4] / [7, 3, 8, 1] →[9, 5, 6, 4] / [3, 8, 1, 7, 2] →[5, 6, 4, 9, 3] / [8, 1, 7, 2] →
[6, 4, 9, 3] / [1, 7, 2, 8, 5] →[4, 9, 3, 6, 1] / [7, 2, 8, 5] →[9, 3, 6, 1] / [2, 8, 5, 7, 4] →
[3, 6, 1, 9, 2] / [8, 5, 7, 4] →[6, 1, 9, 2] / [5, 7, 4, 8, 3] →[1, 9, 2, 6, 5] / [7, 4, 8, 3] →
[9, 2, 6, 5] / [4, 8, 3, 7, 1] →[2, 6, 5, 9, 4] / [8, 3, 7, 1] →[6, 5, 9, 4] / [3, 7, 1, 8, 2] →
[5, 9, 4, 6, 3] / [7, 1, 8, 2] →[9, 4, 6, 3] / [1, 8, 2, 7, 5] →[4, 6, 3, 9, 1] / [8, 2, 7, 5] →
[6, 3, 9, 1] / [2, 7, 5, 8, 4] →[3, 9, 1, 6, 2] / [7, 5, 8, 4] →[[9, 1, 6, 2] / [5, 8, 4, 7, 3]
```

Cycle de longueur 20, pour C=1, V=9.

L'idée des regroupements de type A et B se généralise.

On insère derrière chaque A un A', et derrière chaque B un B'.

[A, A', B, B', A, A', B, B'] / [B, B', A, A', B, B', A, A', B, B']

Si on convient A > A' > B > B' cela donne un cycle de longueur 36 en termes de A, A', B, B'.

En choisissant des nombres pour A, A', B', B' par exemple :

[18, 14, 10, 5, 17, 13, 9, 4] / [8, 3, 16, 12, 7, 2, 15, 11, 6, 1]

on obtient un cycle d'ordre 360, pour C=1, V=18

Cette opération d'insertion de A' et de B' peut être recommencée.

Cela permet alors d'avoir des cycles pour tous les nombres V :

« V n'est pas de la forme 2^k avec $k \geq 1$ ou de la forme 3.2^k, avec $k \geq 0$ » $\Leftrightarrow$
« V est de la forme $m.2^k$ avec $k \geq 0$, et m impair > 3 ».

C'est le principe de la démonstration de Michael Spivey.

Reste la question :

Pour C = 1 avec rangement naturel ou optimisé, existe-t-il des cycles pour les nombres V que ne traite pas la méthode de Michael Spivey ?

C'est-à-dire quand V est un nombre 2^k avec $k \geq 1$ ou de la forme 3.2^k, avec $k \geq 0$:

$$2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, \ldots \quad ?$$

Nous avons mené des recherches exhaustives par programmes pour :

$$V = 2, 3, 4, 6, 8 \text{ et } 12$$

Il n'y a pas de cycles pour ces valeurs de V.

Pour les autres valeurs de V de la forme 2^k, $k \geq 1$ ou 3.2^k, $k \geq 0$, des calculs massifs par essais aléatoires ont été menés. Ils n'ont jamais permis de trouver de cycle !

Conjecture pour C=1 et le rangement naturel ou optimisé :

« V est de la forme $m.2^k$ avec $k \geq 0$, et m impair > 3 »

est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des cycles

Parties infinies pour les jeux usuels de 32 et 52 cartes : C = 4

Le cas C=1 n'est pas celui des parties qu'on pratique réellement en France avec le jeu de 32 cartes ou 52 cartes qui correspondent aux cas C=4, V=8 et C=4, V=13.

La question des cycles est partiellement résolue.

Une méthode utilisée pour traiter le **rangement naturel** se base sur la notion de cycles alignés.

Elle prouve l'existence de cycles pour des joueurs pratiquant le **rangement naturel** pour :

C = 4 et V entier pair, Donc en particulier pour le jeu de 32 cartes.

En revanche pas de réponse pour V impair (donc en particulier pour le jeu usuel de 52 cartes).

La question des cycles pour C = 4 avec **rangement optimisé** semble encore plus mystérieuse :

il semble qu'il n'y a de cycle que pour C = 4 et (V = 5 ou V = 7 ou V = 11).

Conclusion

Il est quand même étonnant qu'en 2024 la conjecture de nature très mathématique et assez simple concernant le cas C=1 reste en suspens.

De même pour les cycles pour le jeu usuel de 52 cartes et le rangement naturel.

De même pour les cycle pour le rangement optimisé.

Peut-être que ces problèmes attendent de nouveaux outils mathématiques pour être traités ?

À la vue des idées mises en œuvre pour traiter le cas de la bataille anglaise et la situation décrite ici pour la bataille française on peut discuter le jugement de John Conway que

- la question des cycles au jeu de la de bataille sont de « problèmes anti-Hilbert » n'ayant aucun intérêt mathématique ; les résoudre n'apporterait rien !

Bibliographie

• Philippe Mathieu et Jean-Paul Delahaye : *Simulations massives de parties de jeu de bataille*, Laboratoire Cristal, Université de Lille, 2024 : github.com/cristal-smac/bataille

• Brayden Casella et al, *A non-terminating game of Beggar-my-neighbor*, arXiv:2403.13855, 2024.

• Evgeny Lakshtanov, Vera Roshchina, *On finiteness in the card game of war*, The American Mathematical Monthly 119.4 : 318-323, 2012.

• Michael Spivey, *Cycle in war*, Integers : Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 747-764, 2010 : https://math.colgate.edu/~integers/kg2/kg2.pdf

• Marc Paulhus, “Beggar my neighbour,” The American Mathematical Monthly, 106, n°2, 162–165, 1999.

• Jean-Paul Delahaye, Philippe Mathieu, *La bataille enfin analysée*, Pour la Science, n°215, septembre 1995.

• Jean-Paul Delahaye, Philippe Mathieu, *Parties longues et infinies à la bataille*, Pour la Science, n°378, janvier 2025.

La méthode des cycles alignés pour C=4 et rangement naturel

Cette partie de bataille à 16 cartes (C=4, V=4) avec rangement naturel conduit en 12 étapes à une situation où les jeux entre joueurs ont été échangés, et donc conduit en 24 étapes à un retour au point de départ.

[2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, **3**] / [4, 2, 4, 1, 3, 2, 3, **1**] →
[1, 4, 4, 2, 1, 3, **3**] / [2, 4, 1, 3, 2, 3, **1**, 4, 2] →
[4, 4, 2, 1, 3, **3**] / [4, 1, 3, 2, 3, **1**, 4, 2, 2, 1] →
[2, 1, 3, **3**, 4, 1, 4, 4] / [3, 2, 3, **1**, 4, 2, 2, 1] →
[1, 3, **3**, 4, 1, 4, 4] / [2, 3, **1**, 4, 2, 2, 1, 3, 2] →
[3, **3**, 4, 1, 4, 4] / [3, **1**, 4, 2, 2, 1, 3, 2, 2, 1] →
[4, 1, 4, 4, 3, 1, 3, **3**] / [4, 2, 2, 1, 3, 2, 2, **1**] →
[4, 4, 3, 1, 3, **3**] / [2, 1, 3, 2, 2, **1**, 2, 1, 4, 4] →
[4, 3, 1, 3, **3**, 4, 2] / [1, 3, 2, 2, **1**, 2, 1, 4, 4] →
[3, 1, 3, **3**, 4, 2, 4, 1] / [3, 2, 2, **1**, 2, 1, 4, 4] →
[3, **3**, 4, 2, 4, 1] / [2, **1**, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3] →
[**3**, 4, 2, 4, 1, 3, 2] / [**1**, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3] →
[4, 2, 4, 1, 3, 2, 3, **1**] / [2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, **3**] →

Ce cycle possède une propriété remarquable : quand les deux jeux initiaux ont été épuisés à l'étape 6 (en bleu), les paquets de cartes des deux joueurs ont la même longueur.

À nouveau 6 étapes plus loin c'est encore vrai, etc. C'est la propriété de « bon alignement ».

Elle permet de mettre l'un dernière l'autre deux fois ou *k* fois la même distribution :

[2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3] /
[4, 2, 4, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 2, 4, 1, 3, 2, 3 ,1]

Cela produit un cycle de même longueur.

Lorsqu'un cycle n'est pas aligné coller deux fois les mêmes cartes ne donne pas un nouveau cycle.

La distribution obtenue n'est a priori pas très intéressante car elle concerne le jeu C=8 et V=4, mais on peut augmenter chaque valeur des deuxièmes moitiés de 4 unités, ce qui donne alors un cycle de longueur 48 pour le jeu usuel de 32 cartes, C = 4, V = 8 :

[2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3, 6, 5, 8, 8, 6, 5, 7, 7] /
[4, 2, 4, 1, 3, 2, 3, 1, 8, 6, 8, 5, 7, 6, 7, 5]

Alors qu'aucun calcul massif n'a jamais permis de trouver de parties cycliques pour 32 cartes.

On connait aussi un cycle aligné pour le paquet de cartes C = 4, V = 6.

Son point de départ est :

[2, 1, 5, 5, 6, 2, 6, 6, 4, 1, 4, 4] / [5, 3, 5, 1, 6, 3, 3, 2, 4, 2, 3, 1]

On dispose donc de deux cycles alignés pour C = 4, V = 4 et C = 4, V = 6.

Si on les place une ou plusieurs fois les uns derrière les autres on obtient des cycles alignés pour C = 4 et tout V de la forme $4a+6b$, a et b entier ≥ 1, (toutes les valeurs paires et ≥ 4 de V).

Le cas C = 4, V = 13 (52 cartes) n'est donc pas traité. Personne aujourd'hui n'a su le faire

Si on trouvait **un cycle aligné pour C=4, V=5**, le jeu de 52 cartes serait traité.

On en recherche mais pour l'instant sans succès...

Le cycle inespéré de la bataille anglaise

Règles du jeu "Beggar my neighbor" qui est la variante anglaise de notre bataille.

« Un jeu de 52 cartes standard est séparé en deux paquets égaux, chacun attribué à un joueur.

Les paquets sont placés sur la table faces cachées.

Le premier joueur pose sa carte supérieure, face visible, pour commencer une pile centrale.

L'adversaire pose dessus à son tour sa carte supérieure, également face visible, sur cette pile, et ainsi de suite alternativement jusqu'à ce qu'il y ait sur la pile centrale une carte dite « pénalisante » : Valet, Reine, Roi ou As.

Quand un des joueurs pose une telle carte, son adversaire doit payer une pénalité :

une carte pour le Valet, deux pour une Reine, trois pour un Roi, quatre pour un As.

Le joueur pénalisé pose une à une ses cartes sur la pile centrale toujours en les prenant sur le dessus de son paquet.

À l'issue de cette opération, si aucune des nouvelles cartes posées n'est une carte pénalisante, le joueur qui a posé la carte pénalisante remporte la main, c'est-à-dire prend toutes les cartes de la pile et les range sous son paquet sans en changer l'ordre.

On remarquera que la carte pénalisante qui a permis le gain se retrouve devant toutes les autres quand la pile de cartes centrale passe sous le paquet du joueur gagnant.

Le jeu se poursuit de la même manière avec la convention que le dernier gagnant pose la première carte d'une nouvelle série.

Toutefois, si le joueur pendant qu'il paie sa pénalité pose une **nouvelle carte pénalisante**, son paiement cesse et l'autre joueur doit payer la pénalité correspondant à la nouvelle carte pénalisante.

Ce changement de joueur pénalisé peut se produire plusieurs fois.

Lorsqu'un joueur n'a plus de cartes, il a perdu. »

Ce jeu très populaire est parfaitement déterministe. Une partie peut-elle durer infiniment ?

Une multitude de calculs ont été menés utilisant la puissance de nombreux ordinateurs.

Ce n'est qu'en 2024 que la réponse positive à la question a été obtenue par le chercheur indépendant Brayden Casella qui habite l'État du New Hampshire aux États-Unis.

La recherche ayant conduit au succès n'a pas seulement été faite en lançant des calculs par ordinateurs, mais a exigé de mettre au point toutes sortes de raccourcis, et d'astuces.

En ce sens le travail effectué est loin d'être un travail sans intérêt mathématique comme le pensait John Conway pour qui la question des cycles à la bataille anglaise était le prototype de recherche difficile mais sans véritable intérêt mathématique et qu'il nommait « anti-Hilbert ».

La partie cyclique du jeu de 52 cartes trouvée par Casella est la partie suivante (que nous avons vérifiée) :

J1 : [0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 2, 0, 3, 2, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 1, 0, 0, 1, 0, 0]

J2 : [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 3, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 4]

Les cartes pénalisantes sont notées 1, 2, 3, 4, les 36 autres cartes sont notées 0.

Les records de durée

Parties finies les plus longues. En github.com/cristal-smac/bataille les tableaux des records.

• **Record 1**. C=4 V=8 rangement naturel.

La partie finie la plus longue connue dure 1999 plis et implique 2268 cartes jouées par chaque joueur. [1, 1, 1, 2, 2, 6, 2, 4, 7, 3, 8, 3, 8, 7, 2, 6]/[3, 8, 3, 8, 7, 6, 6, 7, 5, 5, 1, 4, 5, 5, 4, 4]

• **Record 2.** C=4 V=13 (jeu classique de 52 cartes) rangement naturel.

La partie finie la plus longue dure 5256 plis et implique 5682 cartes jouées par chaque joueur. [8, 1, 8, 4, 10,9, 13, 4, 10, 9, 8, 10, 7, 7, 11, 8, 3, 4, 1, 13, 3, 7, 3, 12, 6, 10]/[2, 6, 2, 4, 13, 3, 5, 13, 5, 5, 12, 1, 7, 6, 1, 11, 5, 12, 11, 6, 12, 2, 11, 2, 9, 9]

• **Record 3**. C=4 V=8 (jeu classique de 32 cartes) rangement optimisé.

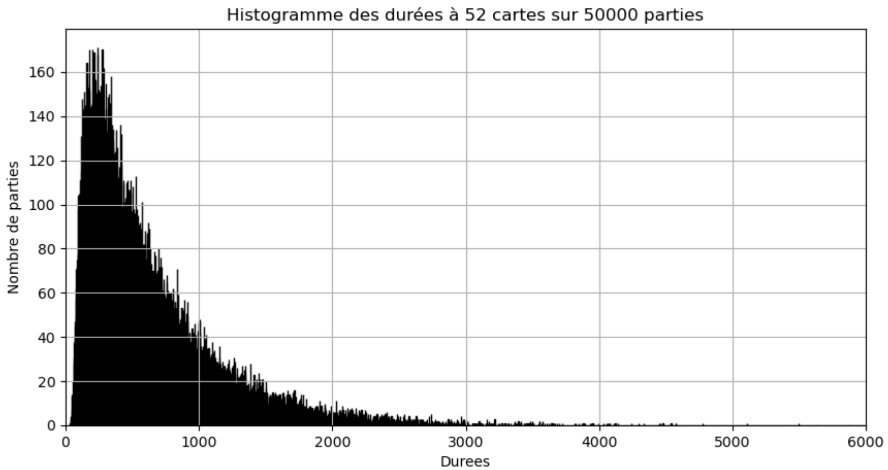
La partie finie la plus longue dure 1602 plis et implique 1826 cartes jouées par chaque joueur. [5, 6, 7, 5, 2, 3, 2, 6, 6, 1, 8, 5, 4, 4, 8, 3]/[7, 1, 8, 1, 3, 4, 5, 8, 7, 4, 2, 7, 1, 3, 2, 6]

• **Record 4.** C=4 V=13 (jeu classique de 52 cartes) rangement optimisé.

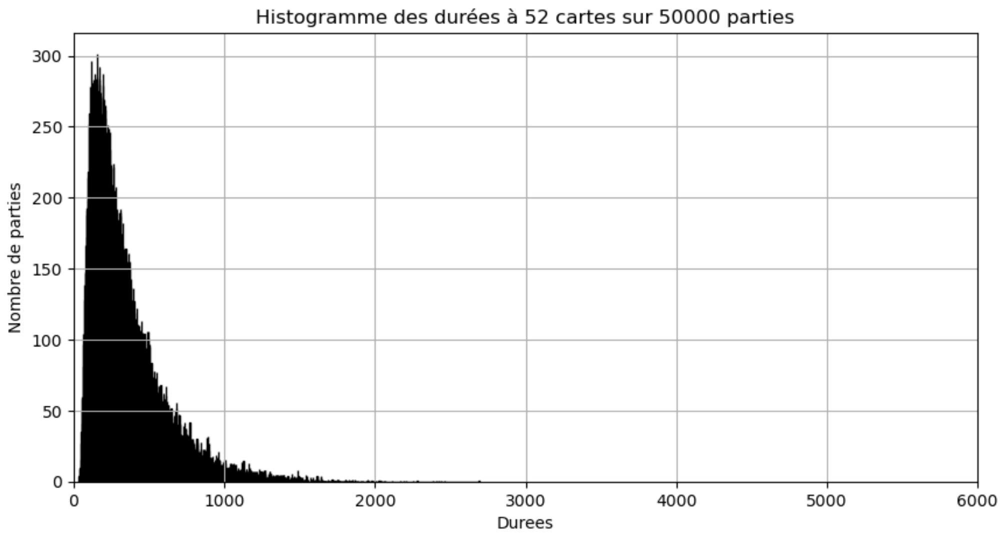
La partie finie la plus longue dure 4060 plis et implique 4402 cartes jouées par chaque joueur. [13, 8, 13, 2, 10, 13, 12, 2, 3, 10, 5, 6, 1, 1, 6, 6, 2, 11, 2, 5, 12, 8, 7, 9, 5, 8]/[12, 5, 4, 1, 9, 11, 7, 6, 1, 10, 3, 9, 7, 4, 11, 10, 3, 8, 4, 7, 12, 11, 13, 3, 9, 4]

Histogrammes

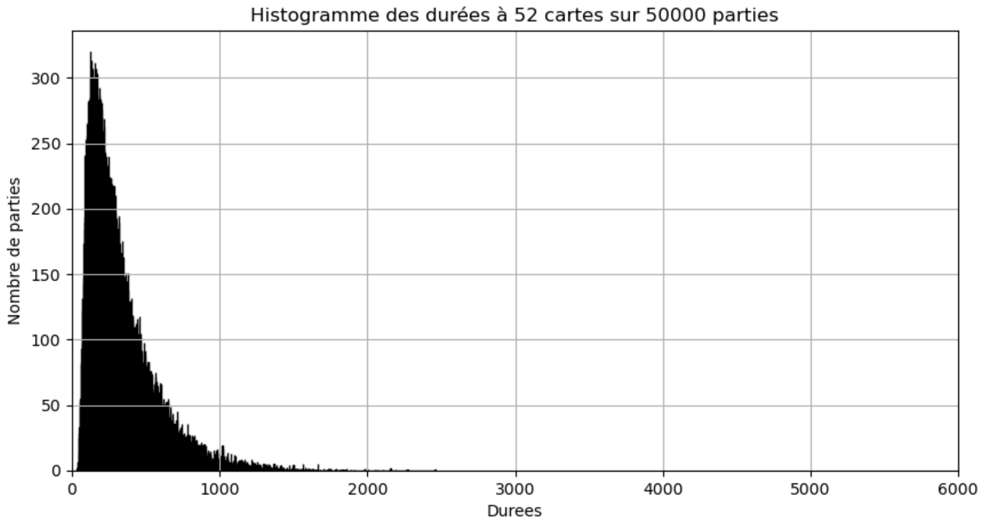
Histogramme de la durée des parties en nombre de cartes jouées par chaque joueur pour le jeu usuel de 52 cartes (C=4, V=13) quand les joueurs procèdent au rangement naturel des cartes gagnées. Calcul en simulant 50 000 parties.



Histogramme de la durée des parties en nombre de cartes jouées par chaque joueur pour le jeu usuel de 52 cartes (C=4, V=13) quand les joueurs procèdent au rangement optimisé des cartes gagnées. Calcul en simulant 50 000 parties.



Histogramme de la durée des parties en nombre de cartes jouées par chaque joueur pour le jeu usuel de 52 cartes (C=4, V=13) quand les joueurs procèdent au rangement aléatoire des cartes gagnées. Calcul en simulant 50 000 parties.



Les cycles infinis pour le rangement aléatoire

Il est assez facile de créer des distributions et d'imaginer des rangements des cartes gagnées produit par le hasard conduisant à des parties aussi longues qu'on le veut.

Exemple C=1, V=4.

[4, 1] / [2, 3] → [1, 4, 2] / [3] → [4, 2] / [1, 3] → [2, 4, 1] / [3] → [4, 1] / [2, 3].

Le joueur 1 a utilisé (par hasard) la méthode de rangements naturelle, mais pas le joueur 2 qui a rangé aléatoirement ses cartes en plaçant la meilleure derrière la moins bonne. Cela a conduit à revenir au point de départ.

Le hasard des rangements peut produire cela un très grand nombre de fois créant une partie très longue et éventuellement infinie.

Il se peut aussi qu'après avoir bouclé un certain nombre de fois la séquence devienne celle-ci qui fait gagner le joueur 1 :

[4, 1] / [2, 3] → [1, 4, 2] / [3]→ [4, 2] / [3, 1] → [2, 4, 3] / [1] → [4, 3, 2, 1] / []

Des parties finies aussi longues qu'on le veut sont donc possibles.

On trouve des exemples du même type pour tous les jeux de cartes.

La distribution suivante du jeu usuel de 52 cartes proposée par Evgeny Lakshtanov en 2012 est un autre exemple de ce type qu'en copiant on adaptera à toutes sortes de jeu.

On suppose que la carte du joueur 1 est toujours rangée avant celle du joueur 2.

En supposant que le hasard change après un certain temps, on en tire des parties finies aussi longues qu'on le souhaite pour la bataille avec un jeu de 52 cartes et le rangement aléatoire.

[13, 12, 13, 12, 11, 10, 11, 10, 9, 8, 9, 8, 7, 6, 7, 6, 5, 4, 5, 4, 3, 2, 3, 1, 2, 1] /

[12, 13, 12, 13, 10, 11, 10, 11, 8, 9, 8, 9, 6, 7, 6, 7, 4, 5, 4, 5, 2, 3, 1, 3, 1, 2]

L'étrange cas du rangement optimisé.

Puisque le rangement optimisé est le meilleur, il semble nécessaire de rechercher des cycles pour les paquets usuels (C=4, V=8 ou C=4, V=13).

On s'est intéressé à toutes les valeurs de V de 2 à 13 pour C=4 avec rangement optimisé.

• V= 5 : Cycle de taille 28 plis à partir de :

[3, 1, 5, 4, 3, 2, 4, 3, 3, 2]/[1, 1, 5, 4, 2, 2, 5, 4, 5, 1]

• V= 7 : Cycle de taille 2050 plis à partir de :

[3, 5, 1, 7, 6, 6, 2, 4, 2, 3, 1, 7, 7, 6, 4, 5, 2, 3, 1]/ [5, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 7, 6]

• V= 11 : cycle de 1125 plis à partir de :

[11, 6, 6, 2, 8, 3, 4, 1, 11, 10, 9, 5, 9, 7, 3, 1, 10, 10, 8, 4, 8, 6, 5, 2]/
[10, 4, 6, 1, 11, 8, 7, 5, 9, 2, 5, 1, 11, 7, 7, 3, 9, 4, 3, 2]

Il semble que ce soit les seules valeurs de V donnant des cycles pour C=4 rangement optimisé.

En particulier, il n'en n'existerait pas pour les jeux usuels C=4, V=8 et C=4, V=13.

Indiquons aussi l'extraordinaire record pour C=4, V=11.

Il comporte 15136 plis et le nombre de cartes posées par chaque joueur est 15642.

[3, 8, 3, 10, 4, 3, 9, 4, 10, 1, 1, 3, 4, 2, 7, 7, 8, 11, 6, 7, 9, 6]/[5, 11, 8, 10, 5, 9, 2, 5, 7, 6, 2, 10, 11, 1, 8, 5, 11, 9, 6, 4, 1, 2]