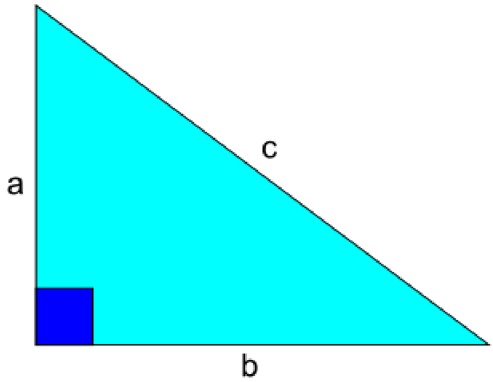
Triplets pythagoriciens
Triplets d’Eisenstein

Plan

- Triplets pythagoriciens
- Triplets d’Eisenstein
- Nombres complexes
  - Coordonnées dans le plan complexe
  - Racines n-ièmes de l’unité
- Entiers de Gauss
- Entiers d’Eisenstein
- Arbre de Berggren
- Bibliographie

Triplets pythagoriciens

a	b	c
3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29
12	35	37
9	40	41
28	45	53
11	60	61
16	63	65
33	56	65
48	55	73
13	84	85
36	77	85
39	80	89
65	72	97



a, b, c entiers => $a^2 + b^2 = c^2$

16 triplets primitifs pour a, b, c < 100

Quelques propriétés des TPP

- Les triplets pythagoriciens sont connus depuis l'Antiquité

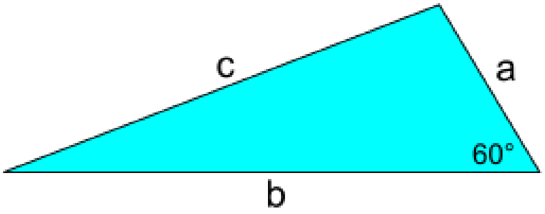
- Triplets primitifs : a, b, c premiers entre eux 2 à 2

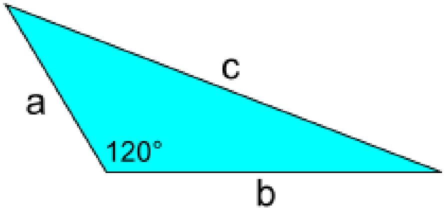
- Il existe une infinité de triplets primitifs

- a et b de parité différente, c impair

- Une méthode de recherche des TPP (connue d'Euclide)
  Soit (a ; b ; c) un triplet de nombres entiers, avec a impair. C'est un TPP si, et seulement si, il existe deux nombres entiers u et v avec u > v, premiers entre eux, de parités différentes et tels que : $u^2 - v^2 = a$, $2uv = b$, $u^2 + v^2 = c$

Triplets d'Eisenstein





a, b, c entiers

$\cos(60°) = 1/2$

$c^2 = a^2 + b^2 - ab$

a	b	c
3	8	7
5	8	7
7	15	13
8	15	13
5	21	19
16	21	19
9	24	21
11	35	31

a, b, c entiers

$\cos(120°) = -1/2$

$c^2 = a^2 + b^2 + ab$

a	b	c
3	5	7
7	8	13
5	16	19
11	24	31
7	33	37
13	35	43
16	39	49
9	56	61

Gotthold Eisenstein

Mathématicien prussien

1823-1852

Disciple de Gauss (1777-1855)

Travaux :

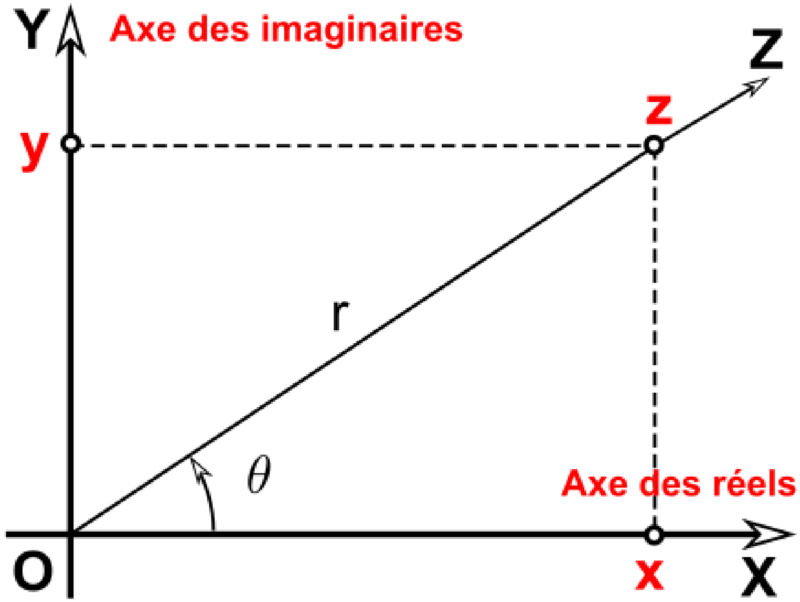
- Formes quadratiques
- Théorie analytique des nombres
- Fonctions elliptiques

Nombres complexes

$x, y \in \mathbb{R}$

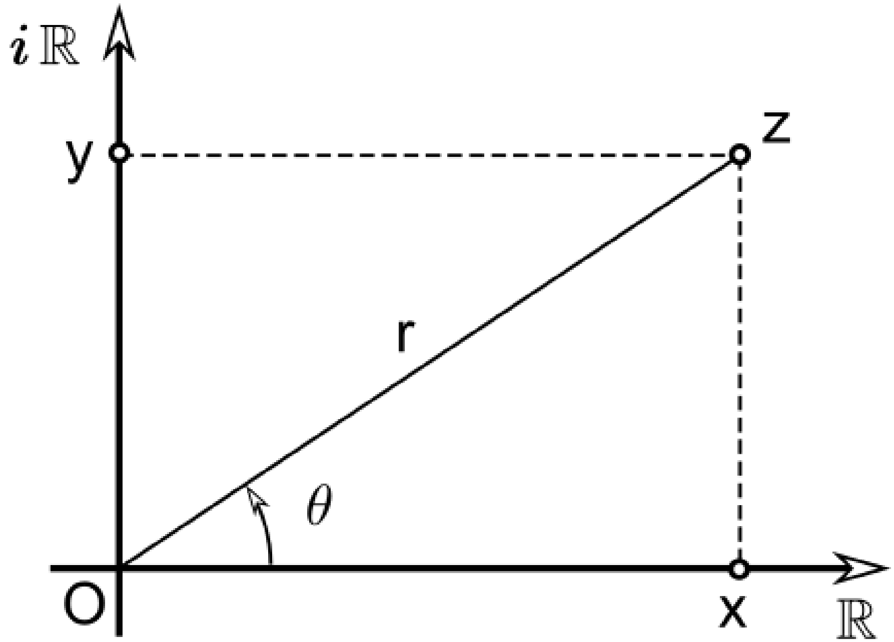
$z \in \mathbb{C}$

$\boldsymbol{i}^2 = -1$



Nombre complexe	$z = x + \boldsymbol{i}\, y$
Conjugué de z	$\bar{z} = x - \boldsymbol{i}\, y$
Module (r)	$\lvert z \rvert$
	$\lvert z \rvert^2 = z\,\bar{z} = x^2 + y^2$
Argument défini à 2kπ près	$\theta = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OZ})$

Coordonnées dans le plan complexe



$\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$

$\mathrm{z} \in \mathbb{C}$

$i^2 = -1$

Forme algébrique	$\mathrm{z} = \mathrm{x} + i\,\mathrm{y}$
Forme trigonométrique	$\mathrm{z} = \mathrm{r}(\cos\theta + i\sin\theta)$
Forme exponentielle	$\mathrm{z} = \mathrm{r}e^{i\,\theta}$

Racines n-ièmes de l'unité : n=2

L'équation $z^n = 1$ admet n solutions dans le plan complexe.
On appelle ces solutions les racines n-ièmes de l'unité.

n = 2 $\quad z^2 - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)(z+1) = 0$

2 solutions réelles : $z_0 = 1$ et $z_1 = -1$

Racines n-ièmes de l'unité : n=3

n = 3 $\quad z^3 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (z-1)(z^2+z+1) = 0$

1 solution réelle : $z - 1 = 0 \;\Rightarrow\; z_0 = 1$

2 solutions complexes : $az^2 + bz + c = 0 \;\Rightarrow\; z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$a = b = c = 1 \;\Rightarrow\; z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\ ,\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\ \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

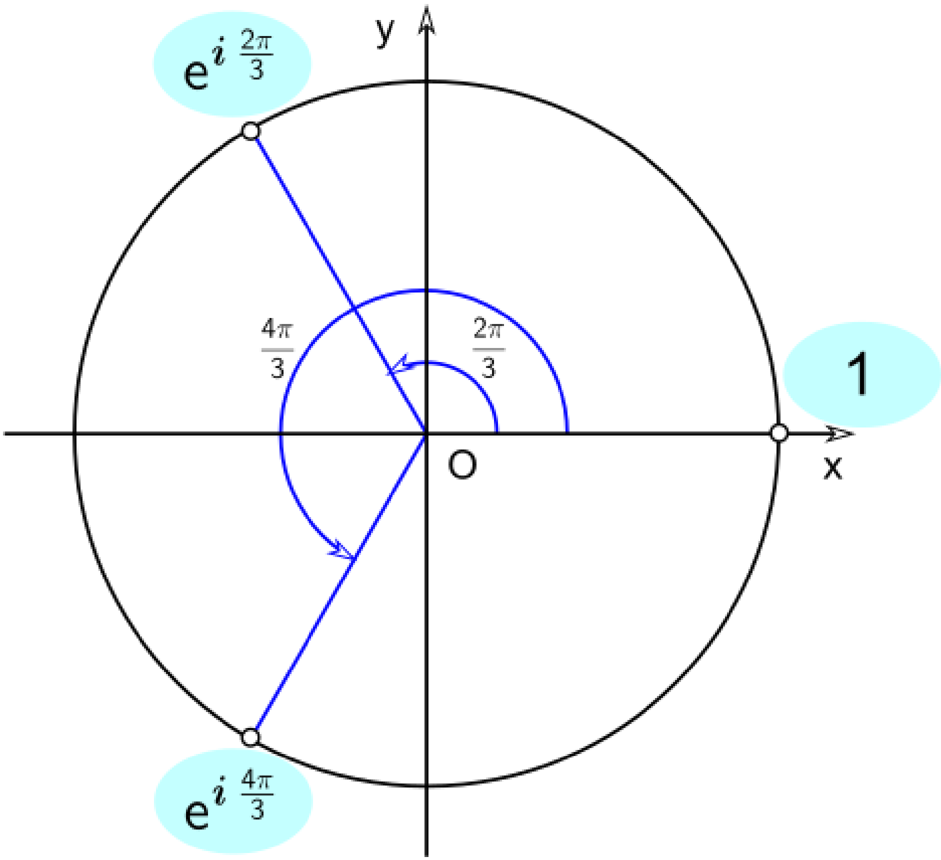
$$z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\ ,\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\ \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Racines cubiques de l'unité

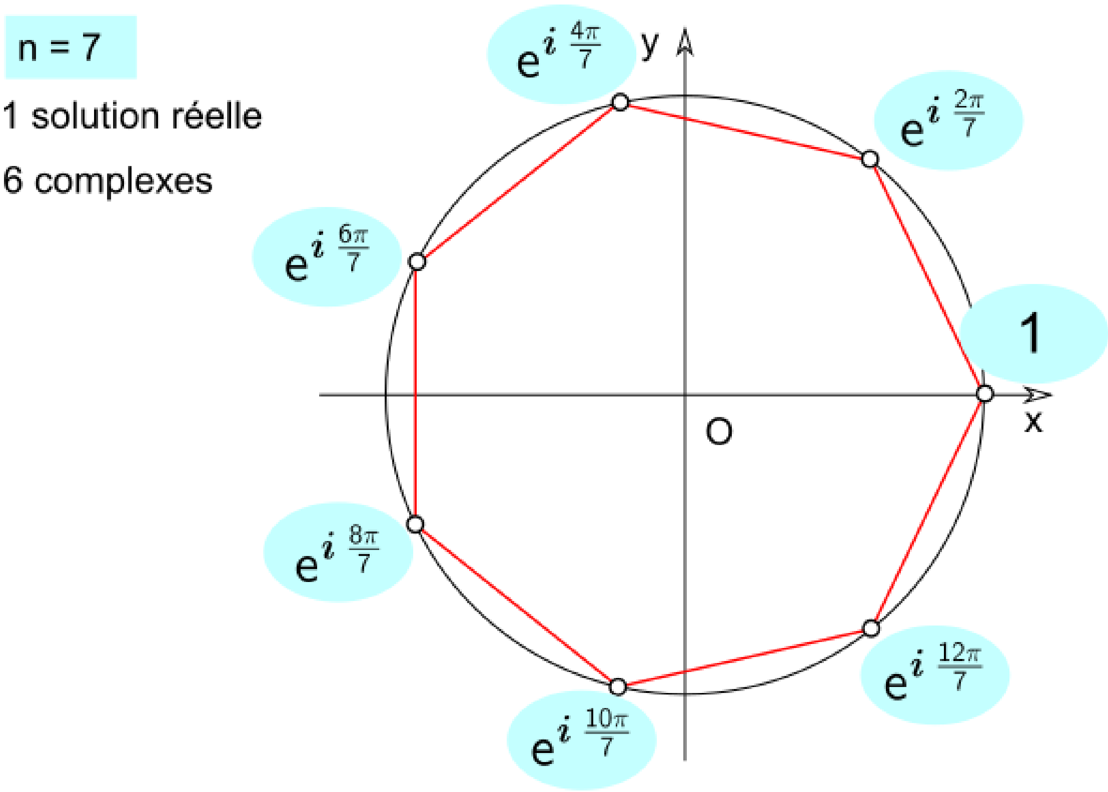


1 solution réelle

2 solutions complexes

$$z_0 = 1 \qquad z_1 = e^{i\,\frac{2\pi}{3}} \qquad z_2 = e^{i\,\frac{4\pi}{3}}$$

Racines n-ièmes de l'unité : n=7



L'équation $z^n = 1$ admet n solutions dans le plan complexe.

Elles sont représentées par les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle de rayon unité.

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Entiers de Gauss

Entiers de Gauss : $z \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$

$$z = a + i\,b$$

$$\overline{z} = a - i\,b$$

$$|\,z\,|^2 = z\,\overline{z} = a^2 + b^2$$

Si $|\,z\,|^2$ est un carré parfait $c^2\,(c \in \mathbb{N})$, on retrouve l'équation des triplets pythagoriciens $c^2 = a^2 + b^2$

Rechercher les triplets pythagoriciens revient à rechercher les EG dont le carré du module est un carré parfait.

Entiers d'Eisenstein

Racines cubiques de l'unité : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Entiers d'Eisenstein : $z \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$

$$z = a + j\,b \qquad\qquad z = a + j^2\,b$$

$$z = a + b\,e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad\qquad z = a + b\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\bar{z} = a + b\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} \qquad\qquad \bar{z} = a + b\,e^{-i\frac{4\pi}{3}}$$

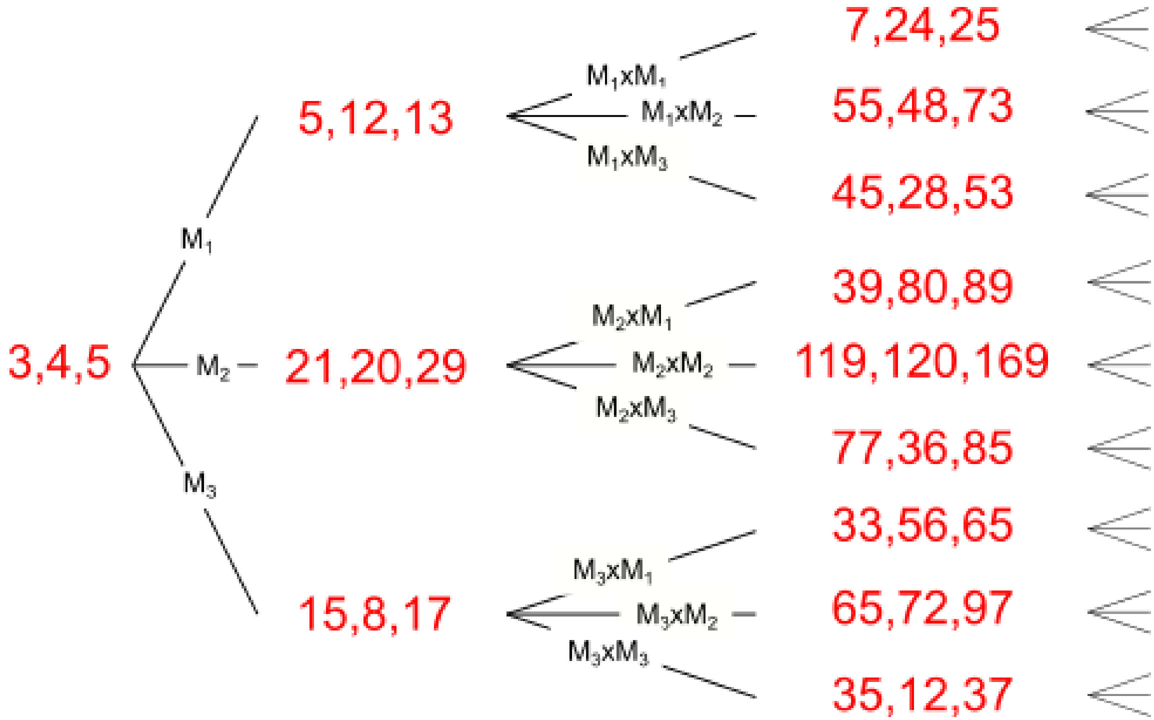
$$z\,\bar{z} = a^2 - 2ab + b^2 \qquad\qquad z\,\bar{z} = a^2 + 2ab + b^2$$

Si $|z|^2 = z\,\bar{z}$ est un carré parfait $c^2 (c \in \mathbb{N})$

on retrouve les équations des triplets d'Eisenstein

$$c^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad\qquad c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Arbre de Berggren



$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrices de Berggren

		M2	M3	M1
		$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{matrix}$
	M1			
	$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 9 & 8 & 12 \\ -8 & -9 & -12 \\ 12 & 12 & 17 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 31 & 14 & 34 \\ -34 & -17 & -38 \\ 46 & 22 & 51 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 71 & 116 & 136 \\ -76 & -127 & -148 \\ 104 & 172 & 201 \end{matrix}$
3 4 5	**5 12 13**			
	3 4 5	**55 48 73**		
		3 4 5	**187 84 205**	
			3 4 5	**429 700 821**

Les matrices sur fond bleu sont les produits successifs

M1xM2 M1xM2xM3 M1xM2xM3xM1

Bibliographie

- Dans les arcanes des triplets pythagoriciens

  Jean-Paul Delahaye – Pour la science N°514 Août 2020

- Site ChronoMath

  http://serge.mehl.free.fr/chrono/Eisenstein.html

- Le livre des nombres

  John H. Conway, Richard K. Guy – Eyrolles 1998

- Wikipedia - Triplet pythagoricien

  https://fr.wikipedia.org/wiki/Triplet_pythagoricien

- Wikipedia - Eisenstein triple

  https://en.wikipedia.org/wiki/Eisenstein_triple