

Analyse numérique pour la climatologie

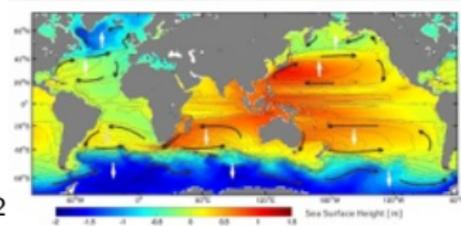
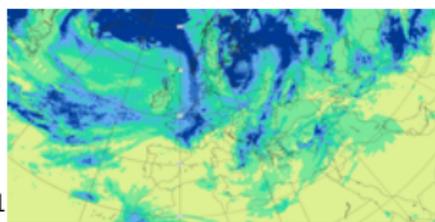
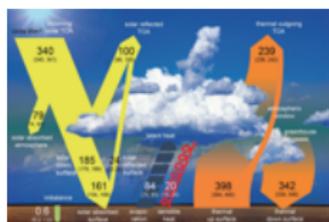
Application à l'effet de serre et à la pollution aérienne

Olivier Pironneau¹

¹LJLL, Sorbonne Université

Kafmath, Juin 2024

Les éléments constitutifs de la modélisation climatique



- Transfert Radiatif (1)
- Flux Atmosphérique (2)
- Flux Océanique (3)
- Calottes glaciaires, chimie de l'atmosphère, nuages, albédo de la terre...

Difficultés : très grandes différences d'échelle de temps

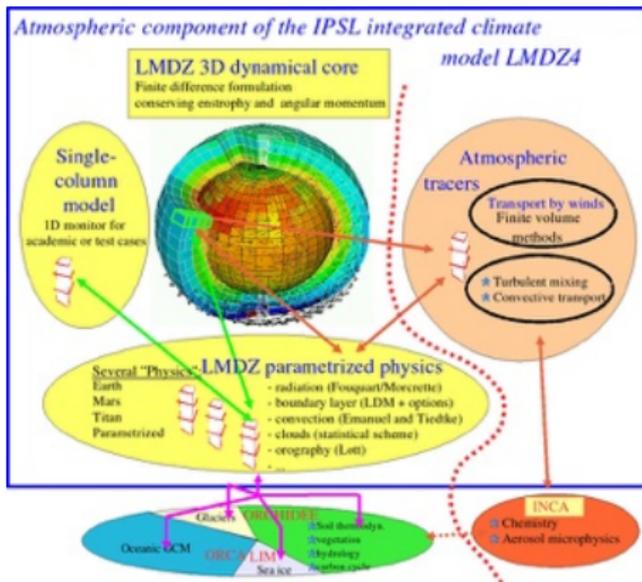
1. credit martin.wildenv.ethz.ch

2. credit ECMWF

3. Credit : Hu Yang, Alfred Wegener Institute, Helmholtz Centre for Polar and Marine Research

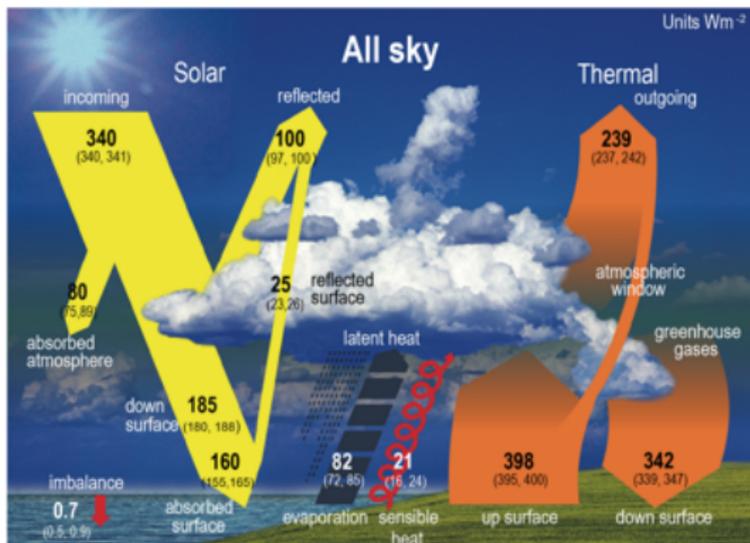
Logiciels libres pour le climat

Exemple. LMDZ <https://lmdz.lmd.jussieu.fr/>



Le couplage de différents modules est un défi scientifique : OpenPALM, OASIS

Phénoménologie



Equilibre des flux : entrant $340 Wm^2$ venant du soleil, $100 Wm^2$ réfléchi (albedo), $239 Wm^2$ re-émis par la terre en infrarouge et $0.7 W Wm^2$ absorbé et participant au réchauffement.

Que peuvent faire les mathématiques appliquées pour ce problème ?

Qu'est-ce que les mathématiques appliquées ?

- 1 Partir des équations fondamentales de la physique (pas toujours possible)
- 2 Montrer que le problème est bien posé (existence, unicité, régularité)
- 3 Chercher une solution analytique ?
- 4 Proposer une discrétisation informatique (Différence Finie, Élément Fini, ...)
- 5 Montrer que le schéma numérique converge (et à quelle vitesse)

Exemple : Loi de Newton avec la résistance de l'air

$$\ddot{z} = -g + f(\dot{z}), \quad z(0), \dot{z}(0) \text{ given}$$

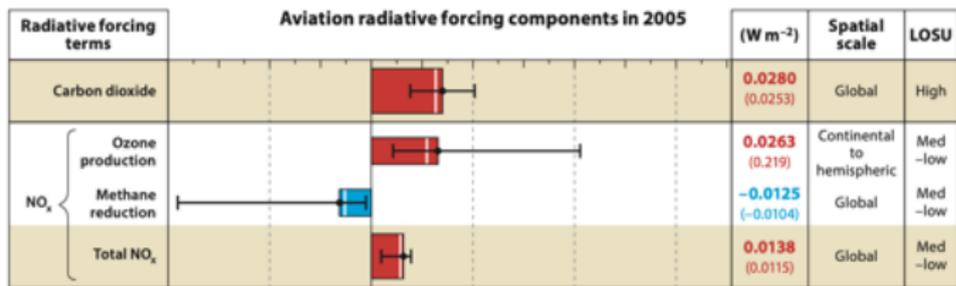
- 1 Si f est différentiable, il existe une solution unique.
- 2 Un schéma numérique

$$\frac{z^{n+1} - 2z^n + z^{n-1}}{\delta z^2} = -g + f\left(\frac{z^n - z^{n-1}}{\delta z}\right)$$

- 3 On peut montrer la convergence $O(|\delta z|)$ lorsque $\delta z \rightarrow 0$ en utilisant un développement de Taylor

Avant de répondre → un problème plus concret : le rôle des avions

- 1 Les moteurs à combustion des avions génèrent du CO_2 ; celui-ci reste dans l'air pendant ~ 500 ans.
- 2 Les voyages aériens (100.000 vols/jour) produisent 3% (bientôt 5%) de CO_2 anthropique. (i.e. 12% du CO_2 des transports.)
- 3 L'hydrogène génère éventuellement par combustion des NO_x . NO_x qui sont plus opacifiants que le CO_2 et qui restent dans l'atmosphère ~ 100 years.



Forçage radiatif dû aux émissions de l'aviation mondiale (Sausen et al. 2005, Lee et al. 2009).

- 4 Le réchauffement dû à l'aviation- CO_2 passera de 24 à 84 milliW/m^2 vers 2050.

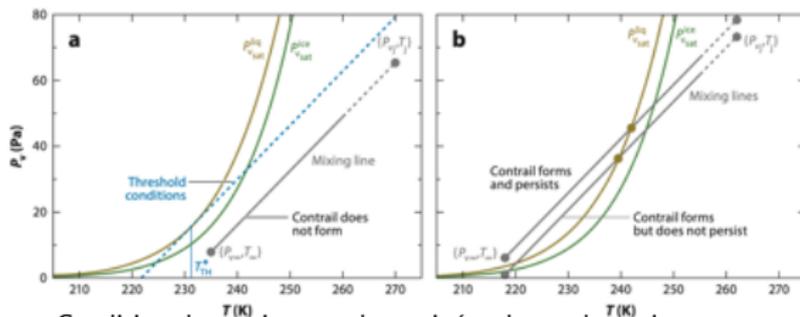
Trainées de condensation (contrail)



Selon Bill Rutherford (de la Royal Society) :
NO_x et les contrails seraient responsables de 2/3 du réchauffement dû aux avions.

Les trainées de condensation

- 1 Le CO_2 , les NO_x et les suies se mélangent à l'eau, ce qui entraîne la formation de glace et des **trainées de condensation**.
- 2 Les trainées de condensation apparaissent au-dessus d'un seuil de pression-température.

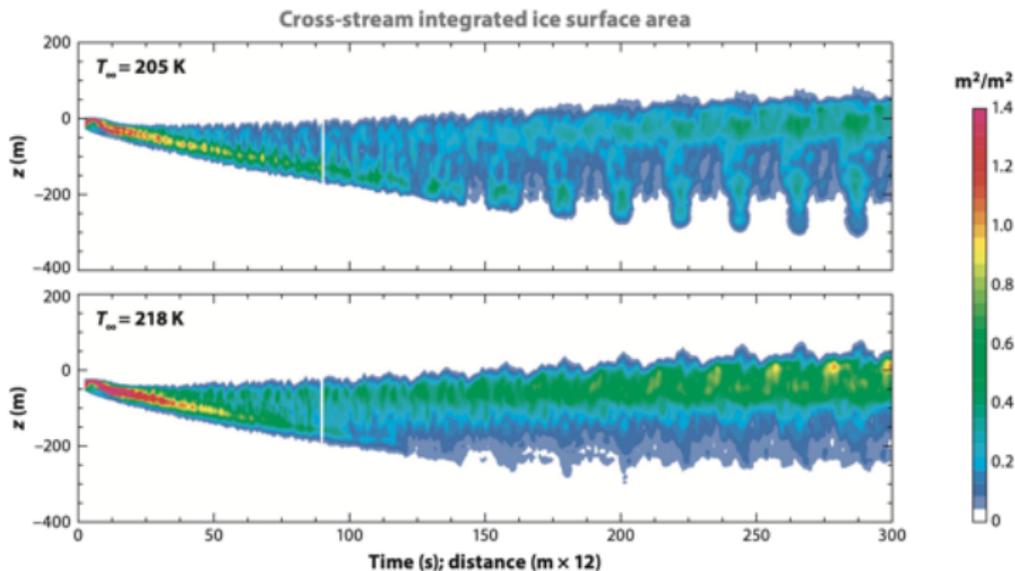


Condition de persistance des trainées de condensation

From Roberto Paoli¹, and Karim Shariff, Annual Rev. Fluid Mech. 2016.48 :393-427

- 3 Les trainées de condensation pourraient constituer le plus grand forçage radiatif du trafic aérien. Bock & Burkhardt⁴ concluent que l'effet de réchauffement des trainées de condensation triplera, passant de 50 milliWatts/m² en 2006 à 160 mW/m² en 2050.
- 4 Mais après le 11 septembre, la température a augmenté de 2°C. COVID n'a

Que pouvons-nous apprendre de la simulation numérique ?

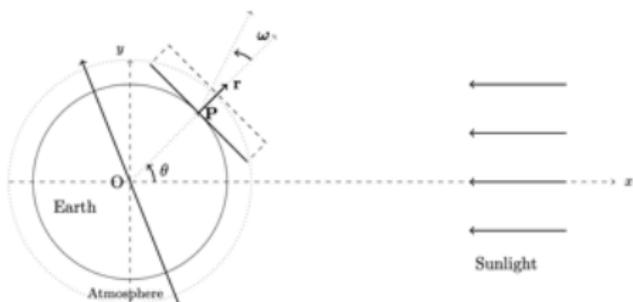
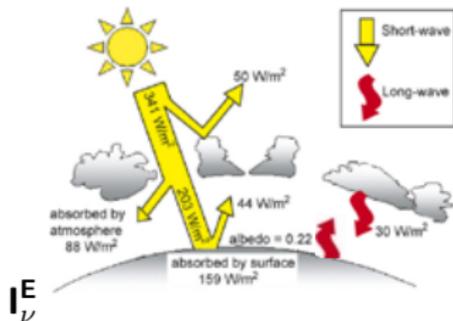


Lewellen DC. 2014. Persistent contrails and contrail cirrus. Part II : Full lifetime behavior. J. Atmos. Sci. 71 :4420–38 = Navier-Stokes + chimie + transition de phase donnent la forme et la composition du nuage.

Que pouvons-nous apprendre de la simulation numérique des nuages ?

- La lumière du soleil est constituée d'un rayonnement de corps noir à ondes courtes à $T_S = 5800K$;
- L'atmosphère terrestre est quelque peu transparente à la lumière du soleil.
- La Terre émet un rayonnement à ondes longues comme un corps noir à $T_E \approx 288K$.
- L'intensité radiative I_ν pour une fréquence ν dans la direction ω ,

$$I_\nu(\mathbf{x}, \omega) \sim Q^S \frac{\nu^3}{e^{-\frac{\nu}{T_S}} - 1} \cos \theta \cos \omega + I_\nu^E \quad \text{Loi de Planck pour les corps noirs.}$$



- $T(\mathbf{x})$ la température.

L'atmosphère terrestre est très mince.

I. Transfert radiatif

- $\mathbf{I}(\nu, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ intensité lumineuse de fréquence ν dans la direction $\boldsymbol{\omega}$ au point $\mathbf{x} \in \Omega$.
- $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ temperature. On néglige $\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{I}$

$$\kappa_\nu \mathbf{I} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{I} = \kappa_\nu a_\nu \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') \mathbf{I}(\boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' + \kappa_\nu (1 - a_\nu) B_\nu(\mathbf{T})$$

$$\partial_t \mathbf{T} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T} - \kappa_T \Delta \mathbf{T} = \nabla \cdot \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^2} \mathbf{I}_\nu(\boldsymbol{\omega}') \boldsymbol{\omega}' d\boldsymbol{\omega}' d\nu, \quad B_\nu(\mathbf{T}) = \frac{\nu^3}{e^{\frac{\nu}{T}} - 1},$$

\mathbf{I} donné en tout point de la frontière où $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega} < 0$, $\partial_n \mathbf{T}$ given on $\partial\Omega$.

\mathbf{n} est la normale sortante à $\partial\Omega$. \mathbb{S}^2 La sphere unité,

$p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') \sim$ la probabilité que le rayon $\boldsymbol{\omega}$ se disperse dans la direction $\boldsymbol{\omega}'$.

κ_T la diffusion thermique.

Theorem(F. Gorse, O.P). *La solution existe et est unique.*

Preuve : il faut utiliser la théorie des opérateurs accretifs⁵

5. Let $(E, \|\cdot\|)$ be a normed vector space. A multivalued operator $T : E \rightrightarrows E$ is accretive if

$$\forall \lambda > 0, \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{G}(T) : \|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|.$$

It is a way to express monotony when there is no scalar product (as in L^1).

Bienvenue dans le monde des éq. aux dérivées partielles

Exemple : l'équation de la chaleur

Le domaine est Ω , sa frontière $\partial\Omega$. Trouver $T(\mathbf{x}, t)$ tel que

$$\begin{aligned}\partial_t T - \Delta T &= f, & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in (0, t_M) \\ T(\mathbf{x}, 0) &= T_0(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ T(\mathbf{x}, t) &= T_\Gamma(\mathbf{x}, t), & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \forall t \in (0, t_M)\end{aligned}$$

- La solution **existe** et est **unique** si

$$f \in L^2(\Omega \times (0, t_M)), \quad T_0 \in L^2(\Omega), \quad T_\Gamma \in L^2(0, t_M, H^{\frac{1}{2}}(\Omega)).$$

- Principe du Maximum** : Si les données sont ≥ 0 alors T est aussi ≥ 0 .
- Exemple** : Un cas mono-dimensionnel simple avec $\Omega = (0, 1)$:

$$\frac{1}{\delta t}(T_i^{n+1} - T_i^n) - \frac{1}{\delta x^2}(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) = f_i^n$$

On voit que T_i^0 , T_0^{n+1} et T_1^{n+1} doivent être donnés. On a alors un système linéaire défini positif tri-diagonal

$$\mathbf{A}\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n + \delta t \mathbf{f}^n$$

- Stabilité et convergence**

On peut montrer la convergence et la stabilité en multipliant l'équation aux différences par T_i^{n+1} et en sommant en i .

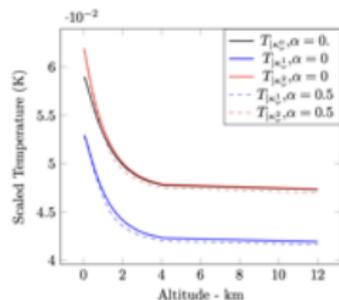
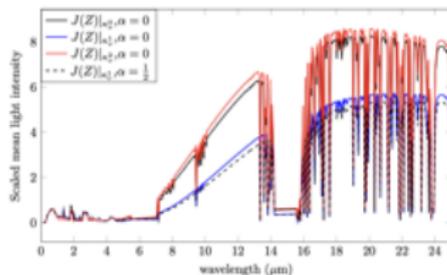
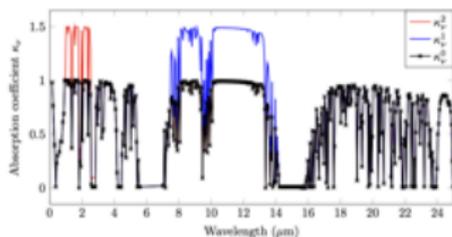
Une formulation intégrale pour $T(\tau)$ if stratified

Si toutes les données ne dépendent que de l'altitude, $E_n(x) = \int_1^\infty e^{xt} t^{-n} dt$, si κ est constant,

$$J_\nu^{n+1}(\tau) = \frac{1}{2} Q E_3(\kappa\tau) + \kappa\sigma \int_0^Z E_1(\kappa|\tau - t|) T^n(t)^4 dt,$$

$$\partial_t T^{n+1} + \mathbf{u} \cdot \nabla T^{n+1} - \mu_T \Delta T^{n+1} + (T^{n+1})^4 = \gamma J^{n+1}$$

- La suite est monotone
- Se généralise aux cas non constants.



II. Fluides

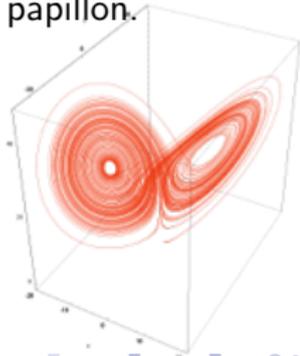
Les fluides incompressibles tels que l'atmosphère et les océans sont modélisés par les équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}\partial \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{g}, & \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \mu_T \Delta T &= f, \\ \mathbf{u}, T &\text{ donné aux frontières et au temps initial.}\end{aligned}$$

où p est la pression. Problèmes mathématiques de longue date à 1 million de dollars :

- L'existence est prouvée, l'unicité est prouvée en 2D.
- Convergence vers l'équation d'Euler lorsque $\mu \rightarrow 0$. Turbulence ?
- Stabilité, bifurcations, variétés invariantes, le paradoxe du papillon.

$$\text{Lorenz : } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma [y(t) - x(t)] \\ \frac{dy}{dt} = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \frac{dz}{dt} = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$



Quasi-Geostrophic Approximation/Primitive Equations

La disparition de l'atmosphère autour de 12 km permet de ne conserver que le terme de pression dans l'équation de la composante verticale :

$$\partial_t u_3 + \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 - \mu \Delta u_3 + \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

conduit à, $\mathbf{v} = (v_1(t, x_1, x_2, p), v_2(t, x_1, x_2, p))^T$ to⁶ :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \omega \partial_p \mathbf{v} + \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla \Phi &= 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial p} + \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{RT}{p} = 0 \end{aligned}$$

6. Lions, J. L., Temam, R., and Wang, S. (1997). A simple global model for the general circulation of the atmosphere. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 50(8), 707-752.

Équations des eaux peu profondes pour les océans

Les principales circulations océaniques se produisent sur des milliers de kilomètres alors que leur profondeur ne dépasse pas 12 km. Les équations de Navier-Stokes sont intégrées verticalement et la viscosité est négligée : \mathbf{u} est la vitesse horizontale 2D et $h(x, t)$ est la profondeur de l'océan au point x et au temps t .

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \nabla h &= 0, \\ \partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h + h \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}$$

- Lois de conservation, chocs.
- Existence régularité unicité
- Connection avec les équations des ondes (tsunami).
- Equations des eaux peu profondes multi-couches
- Solutions stochastiques : vagues scélérates

III. Tendances générales

Abandonner les simplifications et utiliser les équations générales de Navier-Stokes pour pouvoir

- Inclure les montagnes
- calculer les courants verticaux dans les Océans
- Adapter le maillage automatiquement
- Faire le raccord avec les modèles de prédictions locaux

Équations fondamentales de l'effet de serre

- $\rho\kappa_\nu$ est le coefficient absorption, $\rho(\mathbf{x})$ est la densité de l'air,
- a_ν est l'albédo (de scattering).
- $p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') \sim$ la probabilité qu'un rayon dans la direction $\boldsymbol{\omega}$ se diffuse dans la direction $\boldsymbol{\omega}'$.
- κ_T est la diffusion thermique.

$$\frac{1}{\rho\kappa_\nu} \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{I}_\nu + \mathbf{I}_\nu - \frac{a_\nu}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') \mathbf{I}_\nu(\boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' = (1 - a_\nu) B_\nu(\mathbf{T})$$

$$D_t \mathbf{T} - \kappa_T \Delta \mathbf{T} + c_2 \int_0^\infty \kappa_\nu (1 - a_\nu) \left(B_\nu(\mathbf{T}) - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \mathbf{I}_\nu(\boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' \right) d\nu = 0,$$

$$\partial_n \mathbf{T} \text{ given on } \partial\Omega \quad B_\nu(\mathbf{T}) = \frac{\nu^3}{e^{-\frac{\nu}{T}} - 1},$$

$$\mathbf{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = R_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{n}) + Q_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}),$$

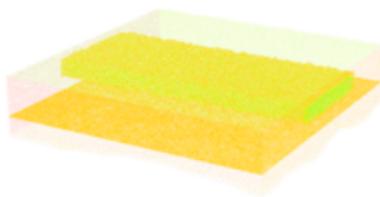
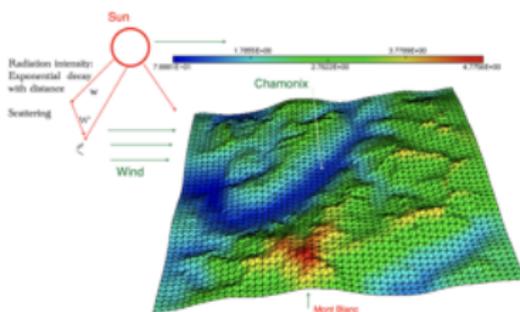
$$\text{on } \Sigma := \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \in \Gamma \times \mathbb{S}^2 : \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0\},$$

\mathbf{n} est la normale unitaire externe de $\partial\Omega$. \mathbb{S}^2 est la sphère unitaire,

Les κ_ν et ν dépendent tous deux de ν et de \mathbf{x} . Le problème a 7 dimensions. 

Objectif : résoudre le problème complet

- Prédire le changement de température dû au nuage.



Altitude map near Chamonix valley

A long cloud in altitude

- Le problème 3D complet, $\rho \sim 1 - 0.75z$, avec la neige (et les glaciers). Influence des gaz à effet de serre comme le CO_2 .
- Un nuage implique un changement d'absorption κ_ν et de scattering a_ν , (peut être fonction de la chimie).

Avec les données du programme Gemini pour κ

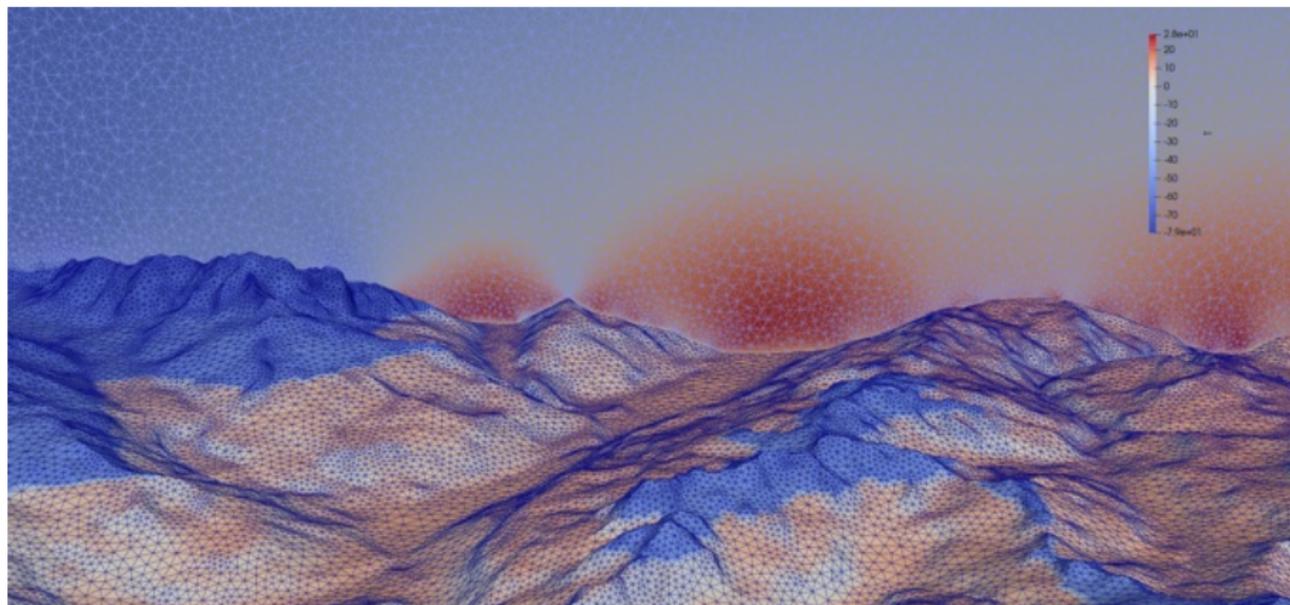
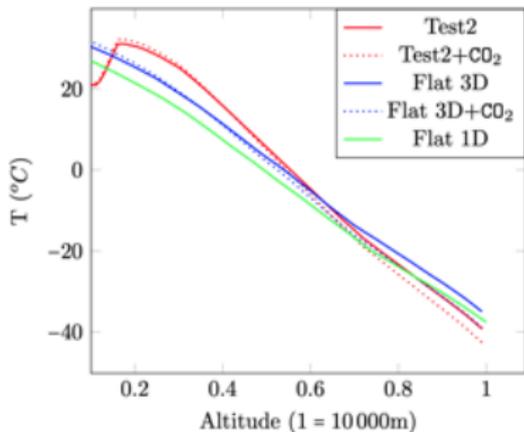
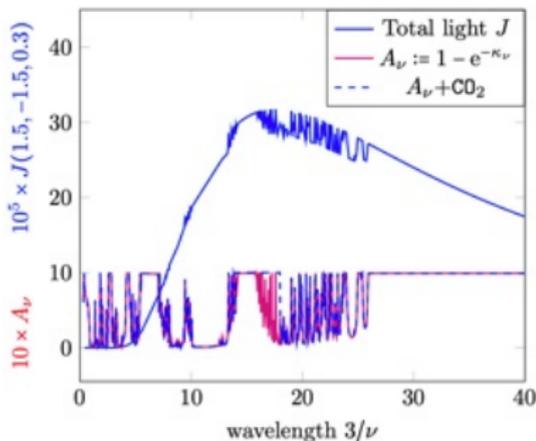


Figure – Températures au sol et verticales (en °C) dues au rayonnement infrarouge de la Terre (c'est-à-dire la nuit) calculées dans la vallée de Chamonix, avec des conditions réfléchissantes sur les côtés. La neige au-dessus de 2500m implique 70% de rayonnement en moins. Un nuage augmente la diffusion et κ_v au-dessus de 7000m. Remarquez l'effet parabolique dans la vallée. $\sim 400\text{K}$ sommets

Effet des montagnes et du CO2

- Comme avant κ depend de z , $\rho\kappa_\nu = \frac{g_\nu}{2}(1 - \frac{3}{4}z)$ et g_ν donné par les Gemini data.
- Pour prendre en compte le CO₂ on met $\kappa = 1$ si $\nu \in (3/18, 3/14)$.
- Le nuage est dans une couche entre $z_m = 3000\text{m}$ et $z_M = 7000\text{m}$ où κ est multiplié par une valeur gaussienne de moyenne 0.2 et d'écart type 0.8.
- Le Scattering n'a lieu que dans le nuage avec $a = 0.3(z - z_m)_+(z_M - z)_+ / (4(z_M - z_m))^2$.



Effect d'une trainée nuageuse

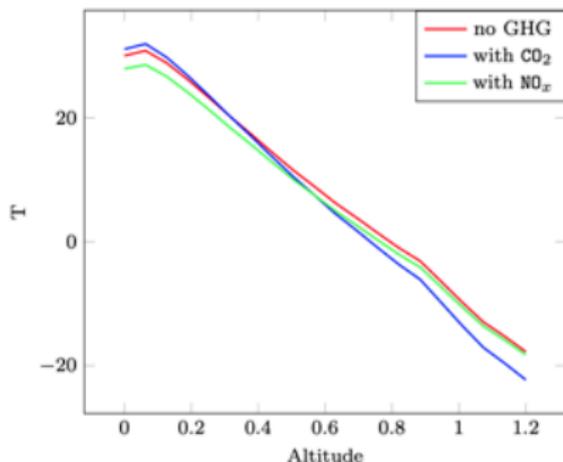


Fig. 5 T versus z computed with a cloud

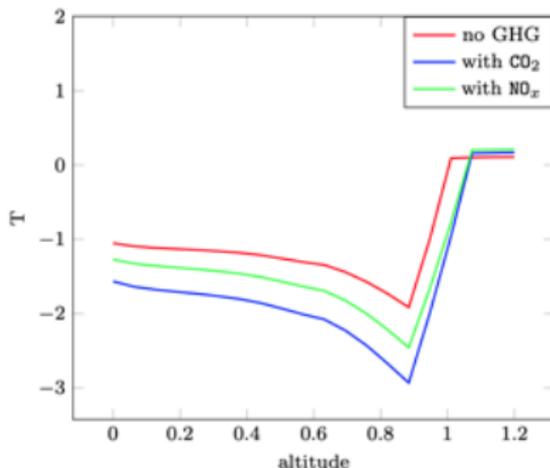


Fig. 6 Difference $T_{nocloud} - T_{cloud}$

Le nuage est entre (7000,9000)m. Le calcul est faite avec l'approximation 1D. A gauche le nuage avec un scattering non-isotrope et de Rayleigh de 0.2% avec albédo de réflexion au sol. A droite, $T(\text{sans nuage}) - T(\text{avec nuage})$.

Une piscine chauffée par le soleil

Navier-Stokes dans la piscine avec $Re = 250$, $\mathbf{u}|_{surface} = 1$, $\nu \rightarrow \kappa_\nu$ affine

$$J_\nu^n(\tau) = \frac{1}{2} Q_s E_3(\kappa_\nu \tau) + \kappa_\nu \sigma \int_0^Z E_1(\kappa|\tau - t|) T^{n-1}(t)^4 dt,$$
$$-\Delta \mathbf{u}^n + \mathbf{u} \cdot \nabla T^n + \int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu(T^{n-1}) d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu^n d\nu$$
$$\frac{\partial T^n}{\partial n} \Big|_{surface} = 0, \quad T^n \Big|_{bottom} = T_b.$$

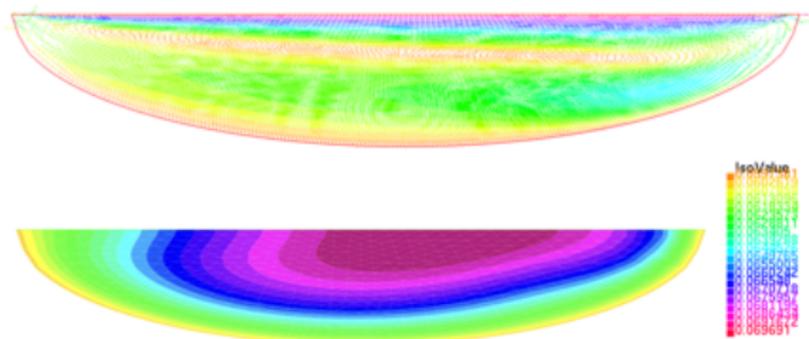


FIG. 6. Velocity vectors and Temperature in a pool subject to wind on its top boundary and given temperature on the bottom. The wind creates a large eddy rotating clockwise which, in turn, moves the hotter fluid region to the right.

Computation of the Integrals

- The domain is discretized by the vertices $\{\mathbf{x}^i\}_1^N$ of a tetrahedral mesh.
- J_ν is approximated by its P^1 interpolation on the mesh :

$$J_\nu(\mathbf{x}) = \sum_1^N J_{\nu,j} \hat{w}^j(\mathbf{x}) \quad \text{where } \hat{w}^j \text{ is the } P^1\text{-FEM function of vertex } \mathbf{x}^j.$$

$$J_{\nu,i} = S_{\nu,i}^E + \sum_j G_\kappa^{ij} B_\nu(T_j) \quad \text{where } G_\kappa^{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \kappa \frac{e^{-\int_{|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'|} \kappa}}{|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'|^2} \hat{w}^j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

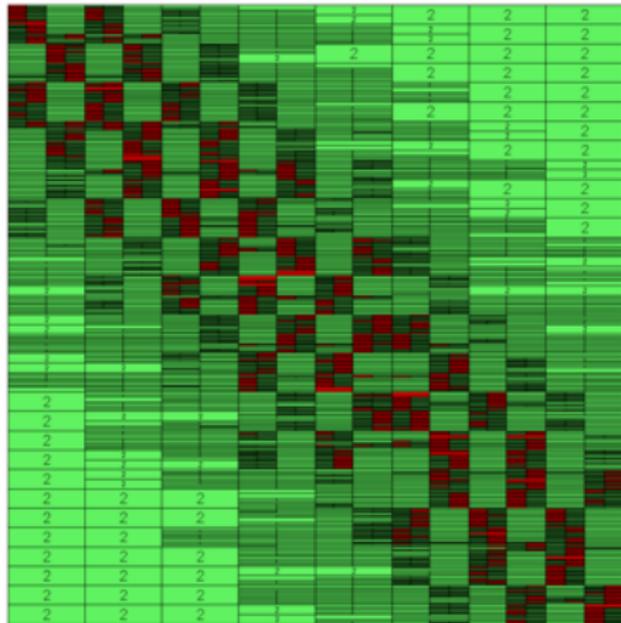
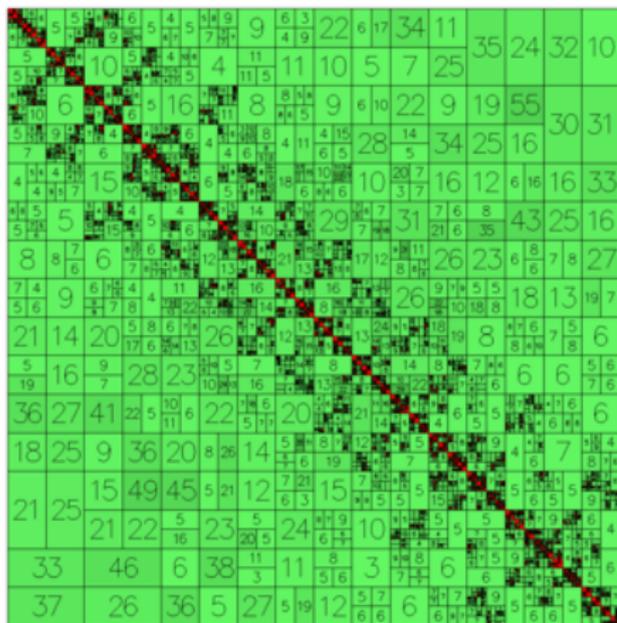
$$S_{\nu,i}^E := S_\nu^E(\mathbf{x}^i) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma Q_\nu(\mathbf{x}^i, \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}^i}{|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'|}) \left(\frac{[(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}')]^-}{|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'|^2} \right)^2 e^{-\int_{|\mathbf{x}^i, \mathbf{x}'|} \kappa} d\Gamma(\mathbf{x}')$$

- Similarly $S_{\nu,i}^E$ is a sum of interactions between $\mathbf{x}^i \in \Omega$ and $\mathbf{x}^j \in \Gamma$
- We use a 5 points quadrature rule if \mathbf{x}^i is far from \mathbf{x}^j and 25 points otherwise.
- We inherit the know-how for integral formulations of Maxwell eqs
- Note that we need 2 matrices for each different κ , not as many as there are ν .

Acceleration with \mathcal{H} -matrices (W.Hackbush (2015))

- The matrix \mathbf{G} has an exponentially decaying kernel.
- Hence it can be compressed with the \mathcal{H} -matrix method so that $S \rightarrow \mathbf{G} \cdot S$ has complexity $O(N \ln N)$.
- The \mathcal{H} -matrix approximation views \mathbf{G} as a hierarchical tree of square blocks ;
 - ① The blocks are interactions between clusters of points near \mathbf{x}^i and near \mathbf{x}^j .
 - ② Far-field interactions are approximated into a low rank matrix because their SVD have fast decaying eigenvalues.
 - ③ We use *partially pivoted adaptive cross-approximations* for the first terms of the SVD because only r -rows times r -columns columns are needed : **other terms are not computed**.
 - ④ The rank r is a user defined parameter ϵ which controls the relative Froebenius norm error.

Example



\mathcal{H} -Matrices for the volume integral (left) and the surface integral (right)

Remarques finales

The art and science of climate model tuning

FRÉDÉRIC HOURDIN*

Laboratoire de Météorologie Dynamique, IPSL, CNRS, UPMC, Paris, France

THORSTEN MAURITSEN

Max Planck Institute for Meteorology, Hamburg, Germany

ANDREW GETTELMAN

National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, USA

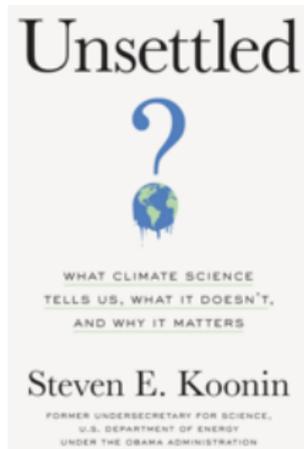
JEAN-CHRISTOPHE GOLAZ

NOAA Geophysical Fluid Dynamics laboratory, Princeton, NJ, USA Current affiliation: Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA, USA

VENKATRAMANI BALAJI

Cooperative Institute for Climate Science, Princeton University

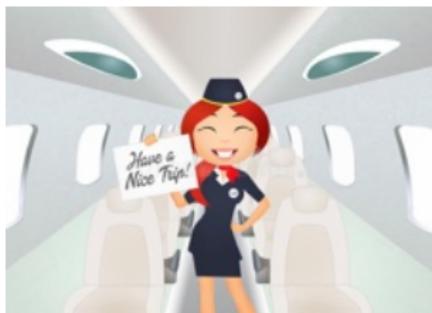
Bulletin of the American Meteorological Society



- Les modèles climatiques sont très loin d'utiliser ce type de modélisation
- Les prédictions à long terme sont empêchés par des simplification de modélisation et doivent être “calibrés” : précision sur les températures $T \pm 2C^{\circ}$ (mais ils prédisent correctement les tendances).
- La puissance des ordinateurs limite la taille des maillages
- La recherche est intense et pluridisciplinaire
- C'est un travail d'équipe.

Conclusion

- Nous avons montré que les équations complètes du transfert radiatif peuvent être résolues
- Accélération avec compression H-matrix compression essentiel.
- La précision permet d'observer les effets des changements sur κ_ν and a_ν .
- Démonstré sur Chamonix à cause du Mont Blanc
- On a reproduit (un peu) l'effet de serre.



Merci pour votre attention