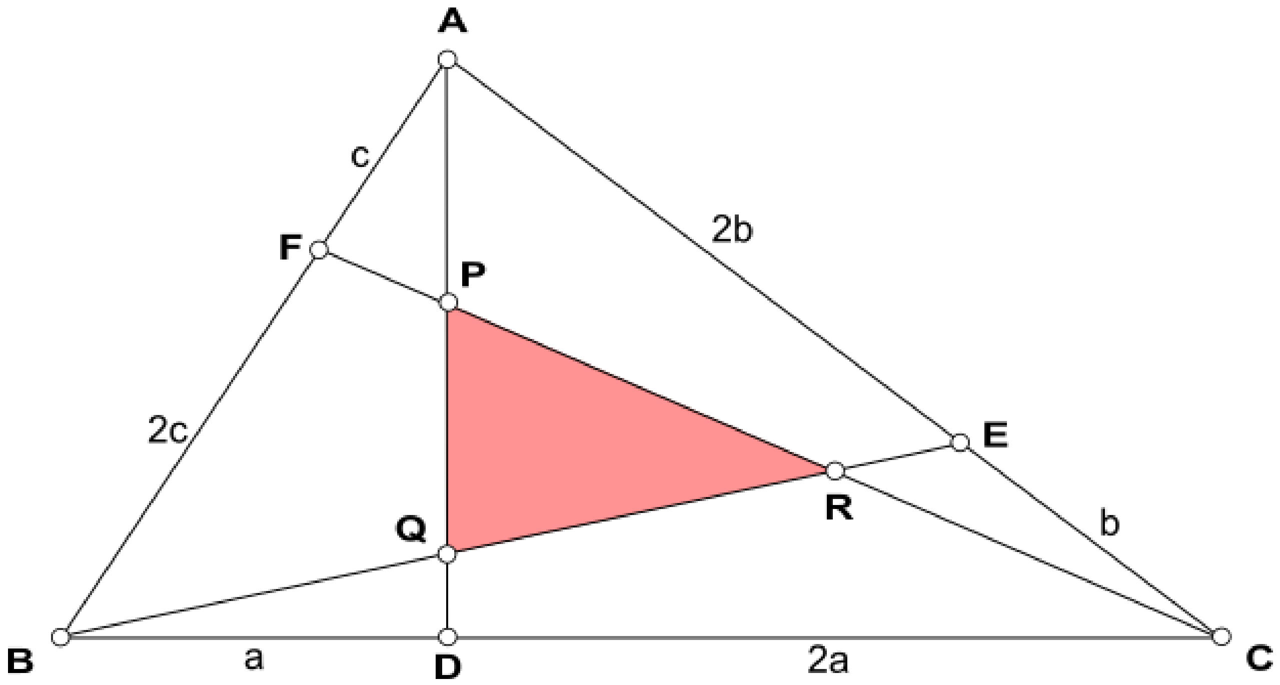
Le triangle de Feynman

Triangle de Feynman



$$\frac{DC}{DB} = \frac{EA}{EC} = \frac{FB}{FA} = 2 \quad => \quad \frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{1}{7}$$

Richard P. Feynman

1918 - 1988

1965 : Prix Nobel de physique

- Mécanique quantique

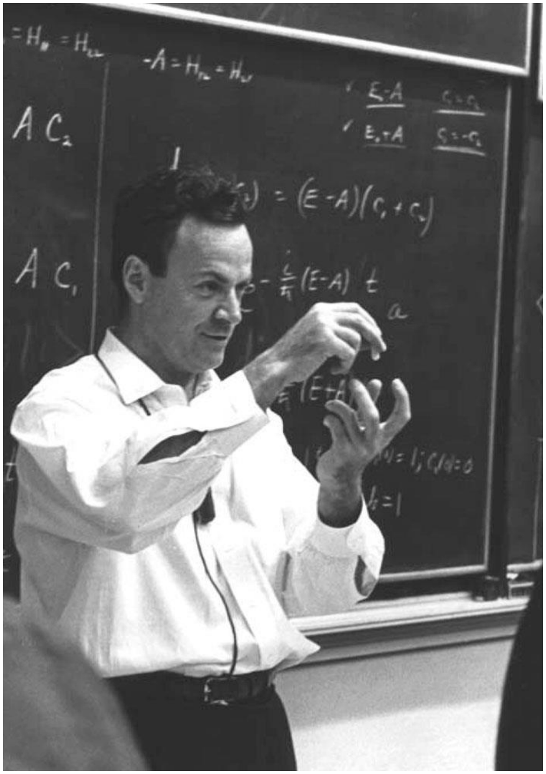
  Diagrammes de Feynman

- Cours de physique

  The Great Explainer

1939 : Flexagon Committee

19 . . : Triangle « de Feynman »



Plan

- Théorème de Ménélaüs
- Théorème de Ceva
- Théorème de Routh
- Triangle de Feynman

Ménélaüs d’Alexandrie

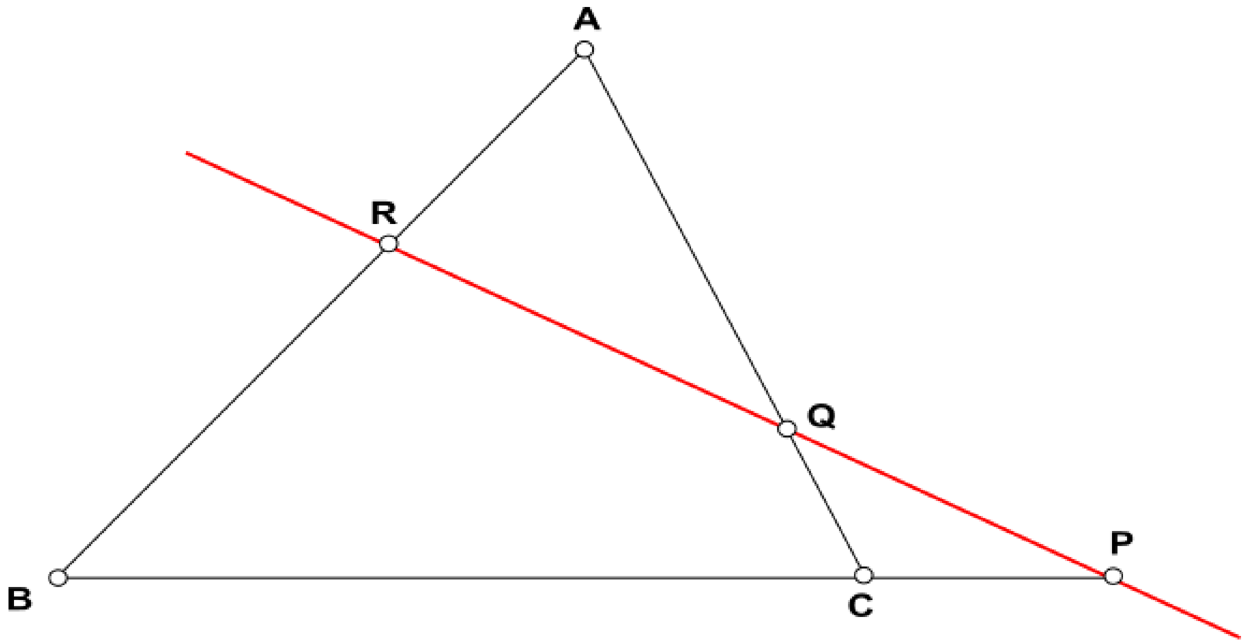
Vers 100 après JC

Ménélaos

Géomètre

Astronome

Théorème de Ménélaüs



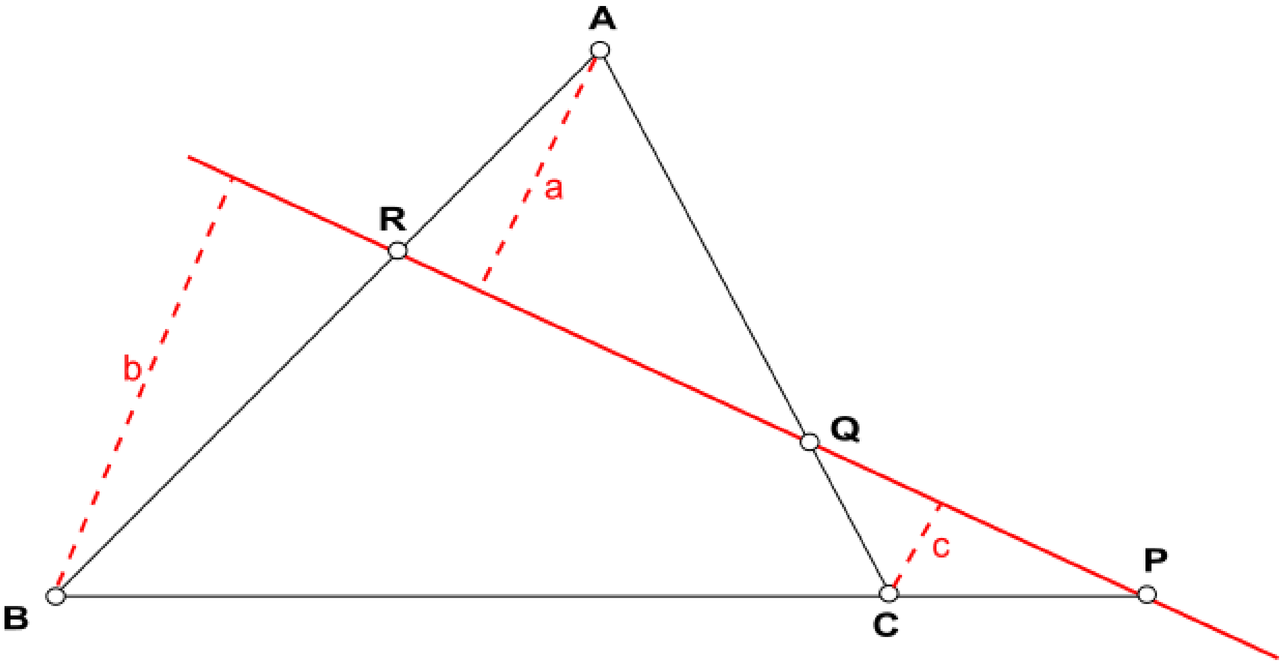
Dans un triangle ABC, 3 points P, Q, R sont situés

sur les droites (BC), (CA), (AB). Ces points sont alignés

si et seulement si :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

Preuve par Thalès



$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{b}{c} \qquad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -\frac{c}{a} \qquad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{b}{c} \times (-\frac{c}{a}) \times (-\frac{a}{b}) = 1$$

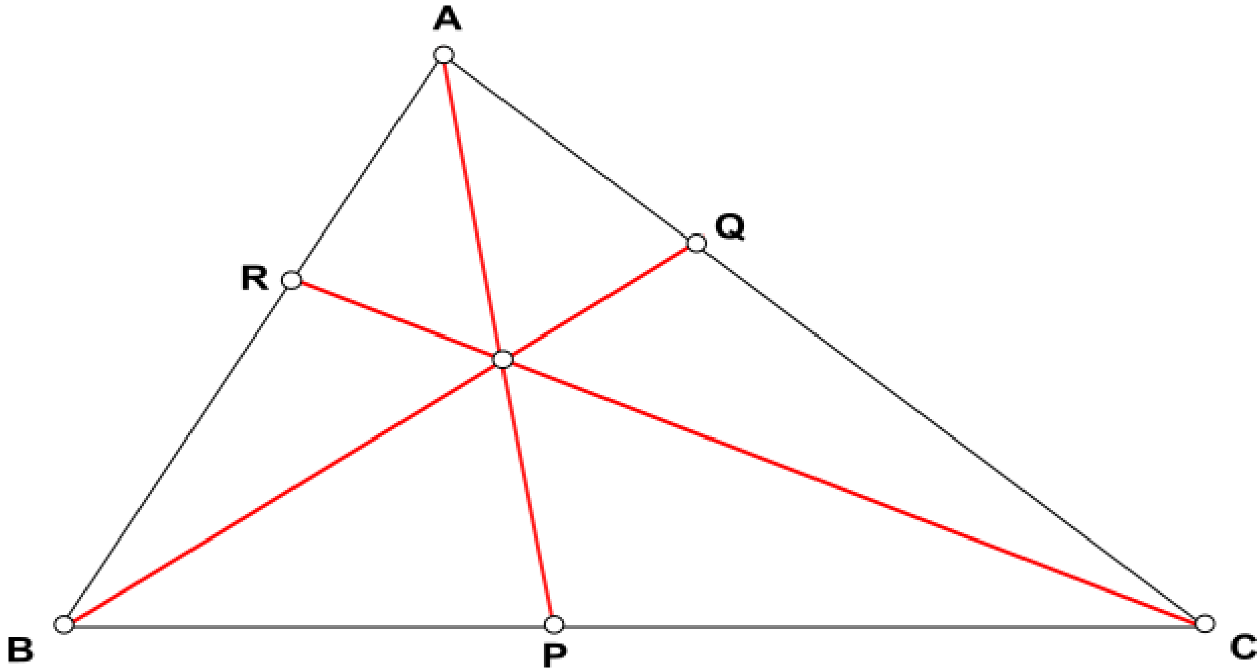
Giovanni Ceva

1647 - 1734

Professeur de mathématiques

Université de Mantoue

Théorème de Ceva



Dans un triangle ABC, 3 points P, Q, R sont situés sur les droites (BC), (CA), (AB). Les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

Cévienne d’un triangle

Droite passant par un sommet

Exemples : Hauteurs, Médianes, Bissectrices

Dualité

Ménélaüs : 3 points alignés

Ceva : 3 droites concourantes

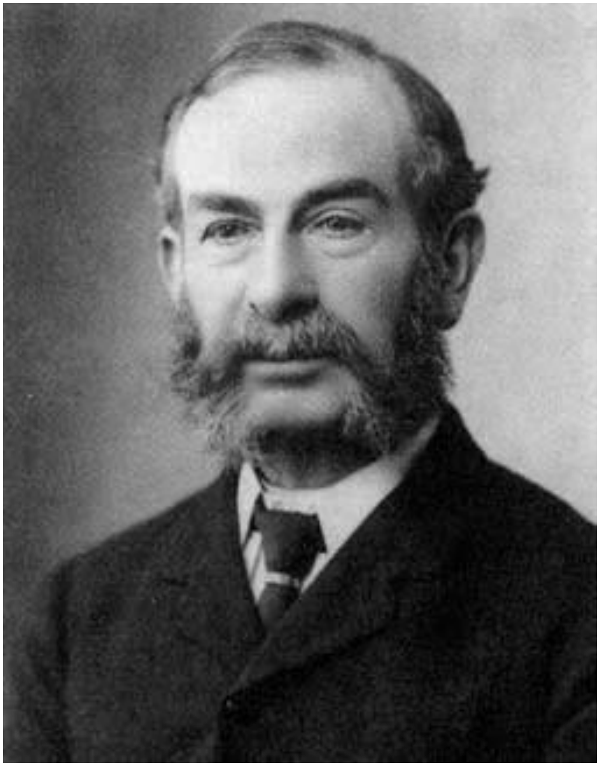
Théorèmes de Ménélaüs et de Ceva : théorèmes duaux

Edward J. Routh

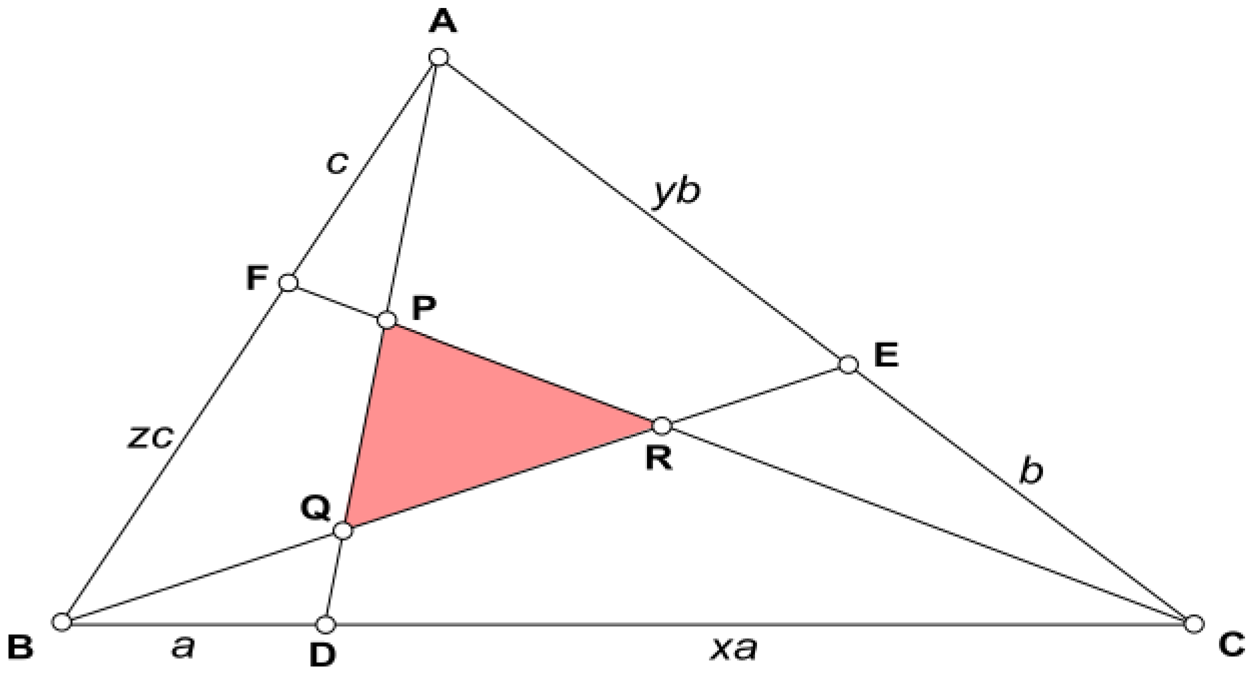
1831 – 1907

Professeur de mathématiques

Université de Cambridge



Théorème de Routh



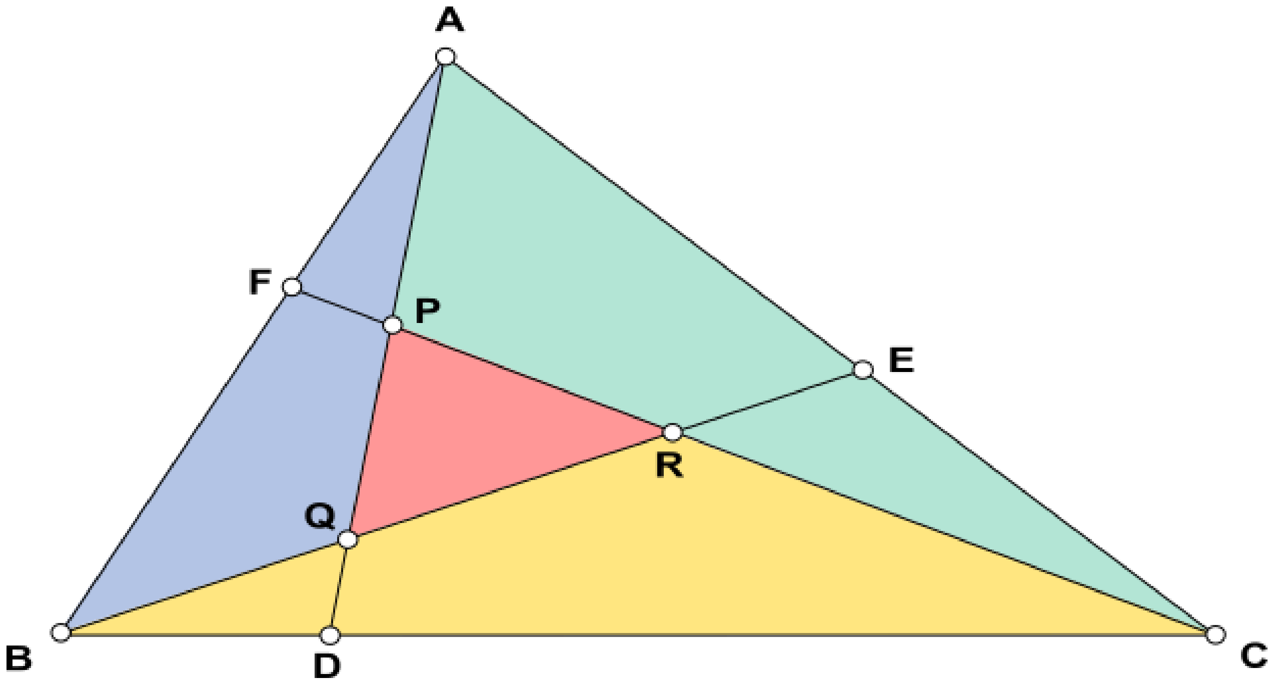
Dans un triangle ABC, trois céviennes

(AD), (BE), (CF) forment le triangle PQR.

On pose : $x = \dfrac{DC}{DB}$ $y = \dfrac{EA}{EC}$ $z = \dfrac{FB}{FC}$

$$S_{PQR} = S_{ABC} \times \frac{(xyz-1)^2}{(xz+x+1)(yx+y+1)(zy+z+1)}$$

Démonstration : principe

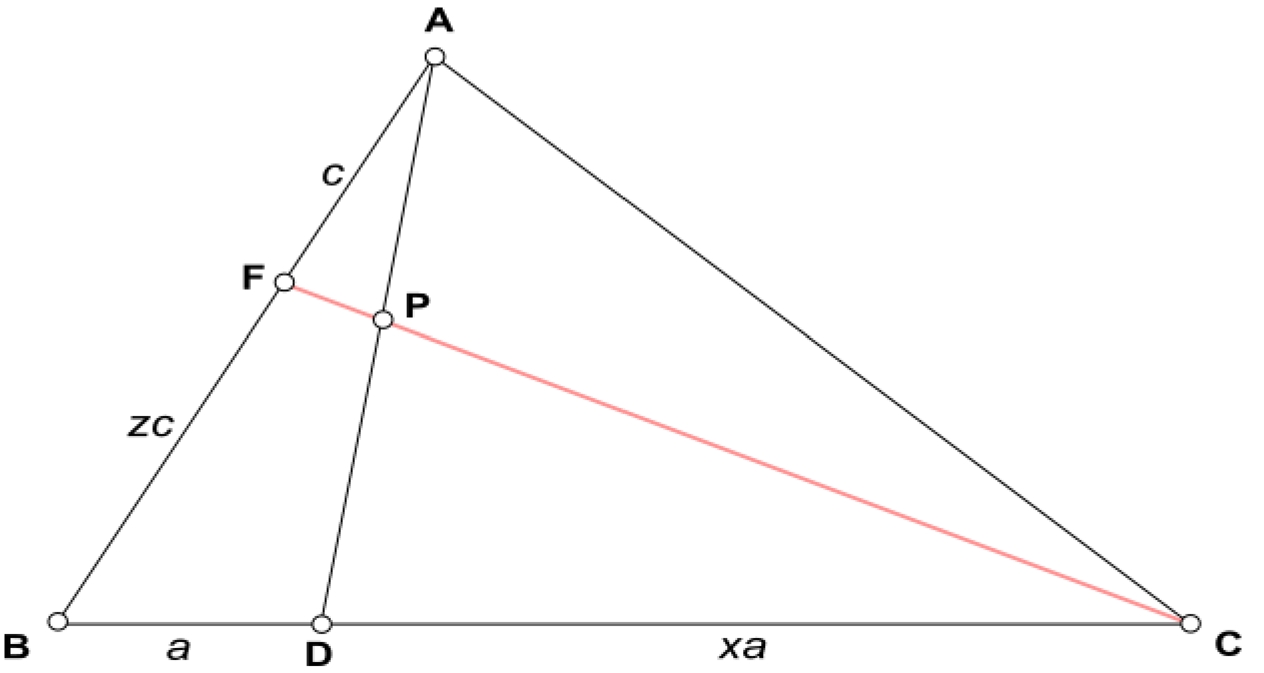


ABC est composé de 4 triangles : APC, BQA, CRB et PQR.

- On calcule $\frac{S_{APC}}{S_{ABC}}$ $\frac{S_{BQA}}{S_{ABC}}$ $\frac{S_{CRB}}{S_{ABC}}$

- On en déduit $\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}$

Rapport $\frac{PD}{PA}$



Ménélaüs dans le triangle ABD coupé par la droite (CF)

$$\frac{CB}{CD} \times \frac{PD}{PA} \times \frac{FA}{FB} = 1$$

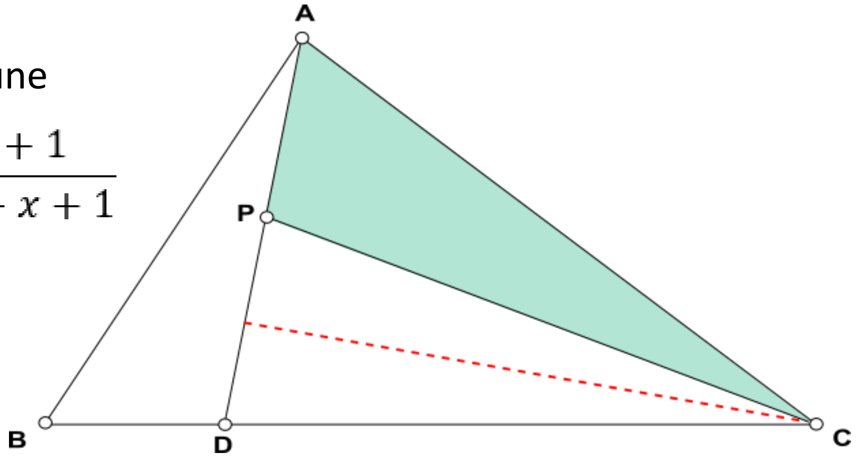
$$\frac{a + xa}{xa} \times \frac{PD}{PA} \times \frac{c}{zc} = 1$$

$$=> \frac{PD}{PA} = \frac{xz}{x+1}$$

Aire du triangle APC

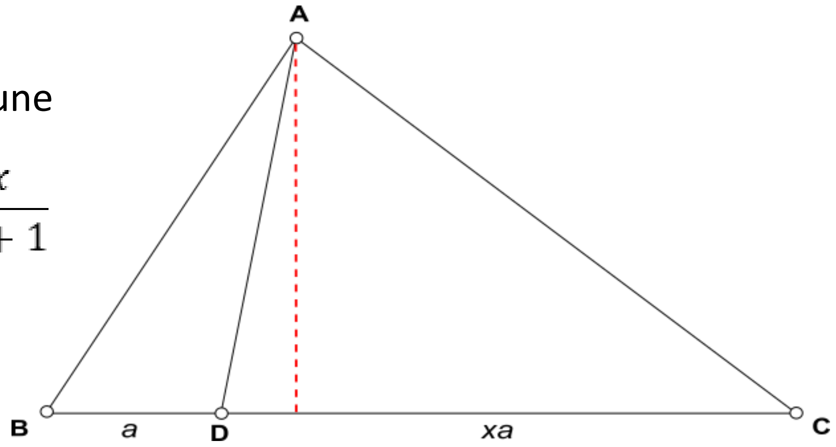
APC et ADC : hauteur commune

$$=> \frac{S_{APC}}{S_{ADC}} = \frac{AP}{AP + PD} = \frac{x+1}{xz + x + 1}$$



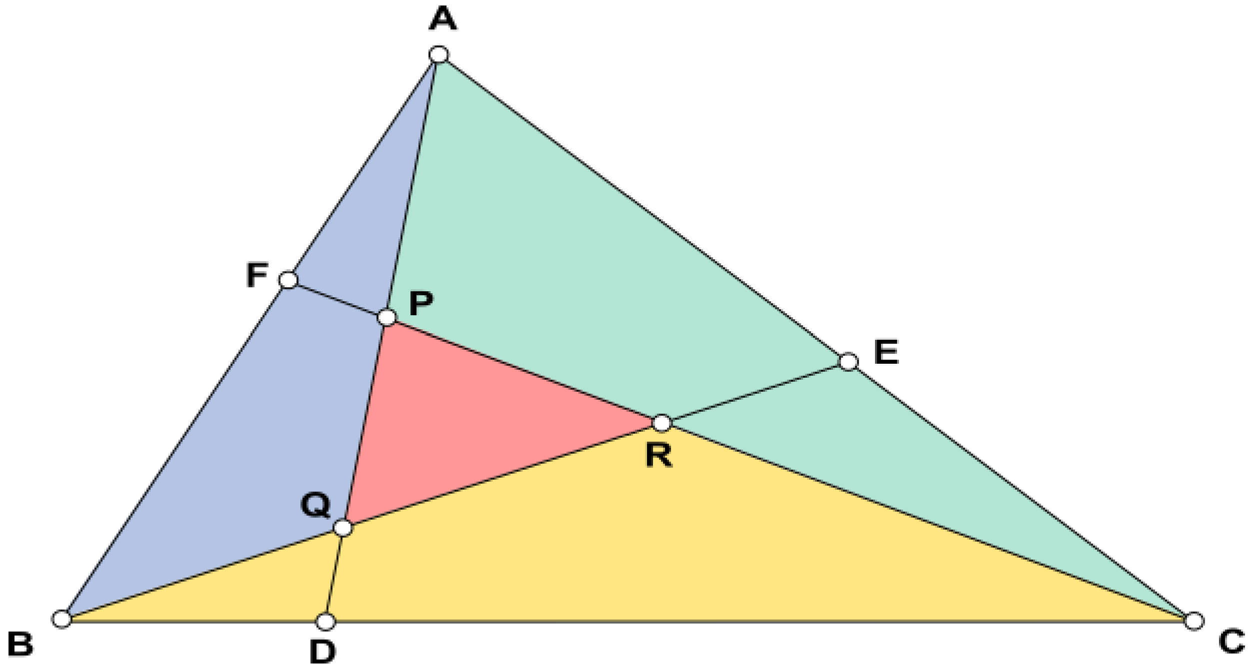
ADC et ABC : hauteur commune

$$=> \frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{DC}{BD + DC} = \frac{x}{x+1}$$



$$=> \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{x}{xz + x + 1}$$

Formule de Routh



$$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{x}{xz + x + 1}$$

$$\frac{S_{BQA}}{S_{ABC}} = \frac{y}{yx + y + 1}$$

$$\frac{S_{CRB}}{S_{ABC}} = \frac{z}{zy + z + 1}$$

$$S_{PQR} = S_{ABC} - S_{APC} - S_{BQA} - S_{CRB}$$

$$S_{PQR} = S_{ABC} \times \frac{(xyz - 1)^2}{(xz + x + 1)(yx + y + 1)(zy + z + 1)}$$

Valeurs particulières de x, y, z

$$S_{PQR} = S_{ABC} \times \frac{(xyz-1)^2}{(xz+x+1)(yx+y+1)(zy+z+1)}$$

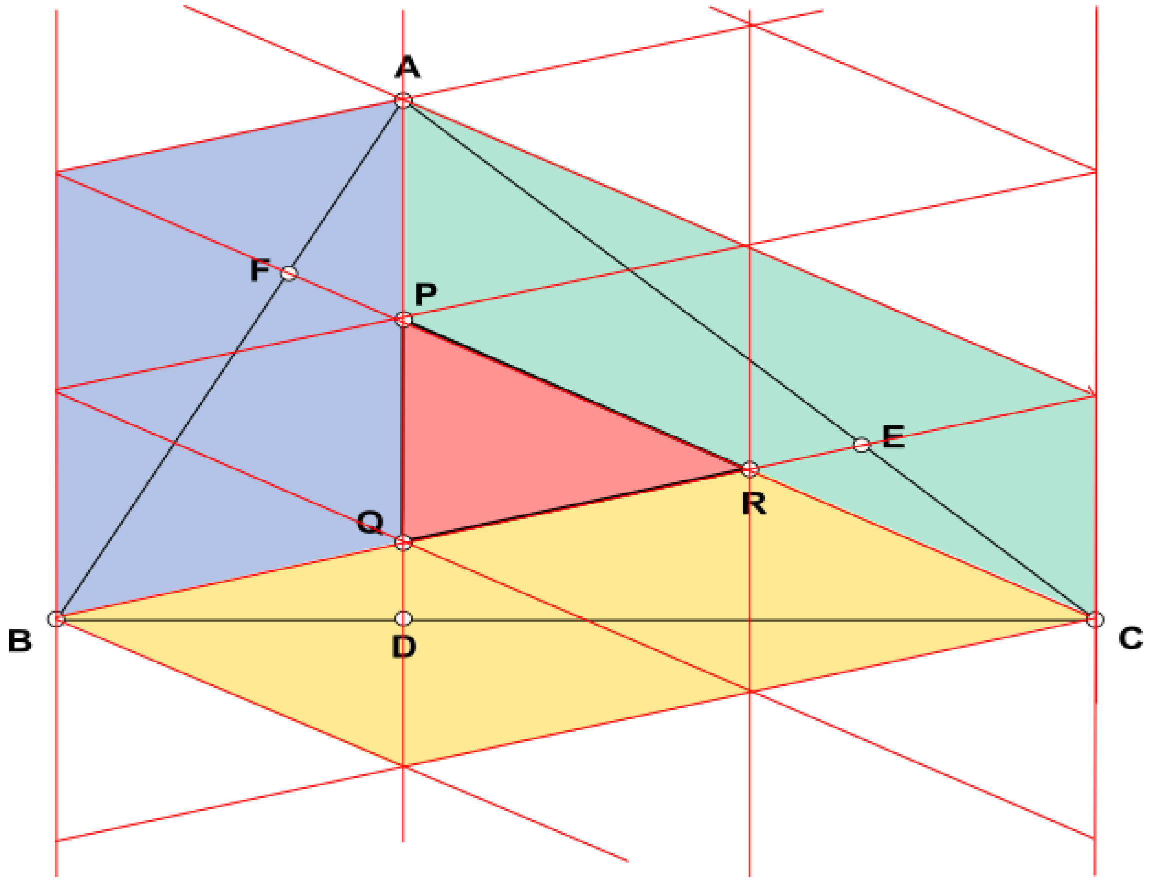
Choisissons pour x, y, z une valeur commune k

k	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{16}{31}$	$\frac{25}{43}$	$\frac{36}{57}$

k = 1 : Théorème de Ceva (médianes)

k = 2 : Triangle de Feynman

Triangle de Feynman



$$S_{APC} = S_{BQA} = S_{CRB} = 2 \times S_{PQR}$$

$$S_{ABC} = (2+2+2+1) \times S_{PQR}$$

$$\boxed{S_{ABC} = 7 \times S_{PQR}}$$