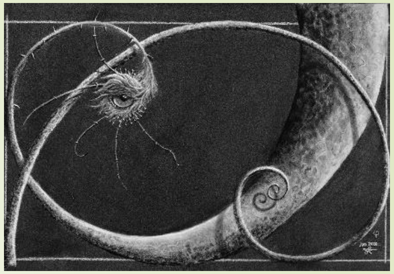
http://kafemath.fr



Dessin de Kofkof

LE MYTHE DU NOMBRE D'OR

Hervé Stève
Ingénieur mathématicien, co-fondateur du Kafemath
herve.steve@hotmail.fr

03/07/2023 à 19h30

La Javelle
75012 Paris

Bienvenue sur le site de Kafemath !

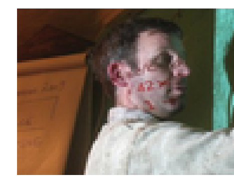
Le Kafemath est un essai de café mathématique.
Un café mathématique est aux mathématiques ce que le "café-philo" est à la philosophie !

Annéees précédentes

Les mathématiques sont un élément fondamental de la culture. Mais elles sont souvent trop isolées dans des lieux réservés aux spécialistes !

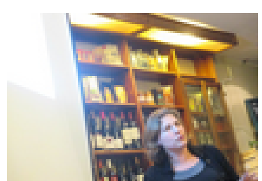
En veillant à rester ouvert à tous, au Kafemath, on parle de maths, on en découvre l'histoire, on en fait un peu, on en débat, on en apprend si on veut. On y rit et surtout, surtout, on y prend plaisir ! Ensemble.

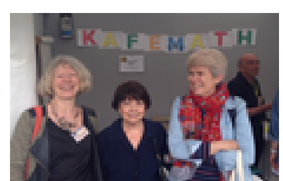
Et il suffit d'être passionné pour devenir co-animateur !



Sites à visiter

Catalogue 2004-2022





Sommaire

- De la proportion d'Euclide à la section dorée
- Triangle et rectangle d'or
- Construction du pentagone à la règle non graduée et au compas
- Suite de Fibonacci
- Nombres métalliques, nombre plastique
- Nature, art, sciences, …

Proportion d'Euclide

- 3ème définition du Livre IV **des Éléments** (vers -300 A.J.C.)

« Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison quand, comme elle est tout entière relativement au plus grand segment, ainsi est le plus grand relativement au plus petit. »

a le grand segment ; b le petit segment

Alors on cherche à obtenir $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$

ou bien

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$$

En notant Φ **la proportion extrême et moyenne raison**

De divina proportione

- Luca Bartolomeo Pacioli di **Luca di Borgo** (~1445 -1517)

(connu aussi pour la comptabilité en partie double)

« De divina proportione » vers 1498, illustrations de polyèdres par Léonard de Vinci dans la 1ère partie du livre.

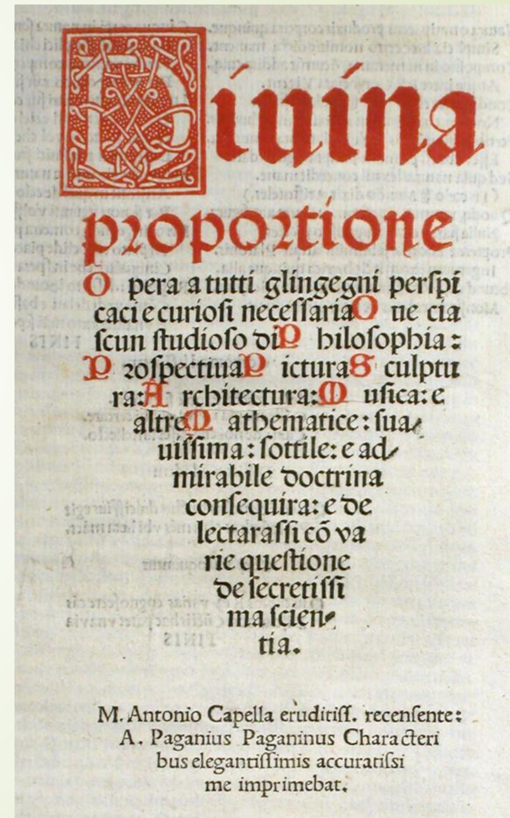
On note Φ* cette proportion : $\boldsymbol{\Phi} = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$

D'où $\boldsymbol{\Phi} = \frac{a+b}{a}$ = 1 + b/a = 1 + 1/$\boldsymbol{\Phi}$

et $\boldsymbol{\Phi}^2 - \boldsymbol{\Phi}$ –1 = 0 : équation du second degré

avec $\boldsymbol{\Phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ~ 1,618… est l'unique solution positive

mais elle n'est pas rationnelle** !



Diuina proportione

Opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria Oue ciascun studioso di Philosophia: Prospectiua Pictura Sculptura: Architectura: Musica: e altre Mathematice: suauissima: sottile: e admirabile doctrina consequira: e delectarassi cō varie questione de secretissima scientia.

M. Antonio Capella eruditiss. recensente: A. Paganius Paganinus Characteribus elegantissimis accuratissime imprimebat.

(*) Φ pour Phidias le sculpteur grec : l'Athéna du Parthénon

(**) n'est pas le rapport entre 2 entiers, comme pour $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ est aussi irrationnel

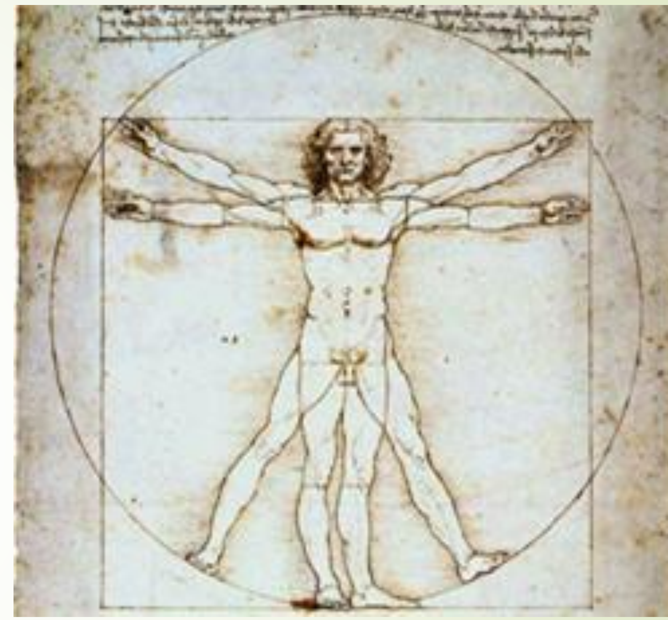
L’homme de Vitruve

- **Luca di Borgo** et l’incommensurabilité de la proportion divine dit :

« De même que Dieu ne peut se définir en termes propres et que les paroles ne peuvent nous le faire comprendre, ainsi notre proportion ne se peut jamais déterminer par un nombre que l'on puisse connaître, ni exprimer par quelque quantité rationnelle, mais est toujours mystérieuse et secrète, et qualifiée par les mathématiciens d'irrationnelle »

Ainsi il est préférable selon lui que L’homme « idéal » de Vitruve respecta des proportions rationnelles :

- Quatre doigts forment une paume,
- Six paumes constituent la distance entre le haut du doigt et le coude,
- Quatre fois la distance entre le doigt et le coude équivaut à la hauteur de l’homme.



De Léonard de Vinci avec les proportions de Vitruve (architecte romain 80-15 A.J.C.)

« homme rationnel est au centre de tout »

La section dorée

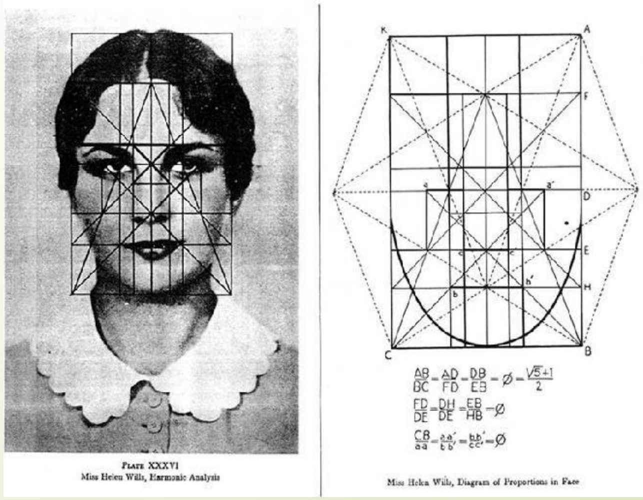
- Au 19ème avec le mathématicien **Martin Ohm** : section d'or

- **Matila Costiesco Ghyka** (1881-1965) : prince roumain, poète, ingénieur, mathématicien … ministre

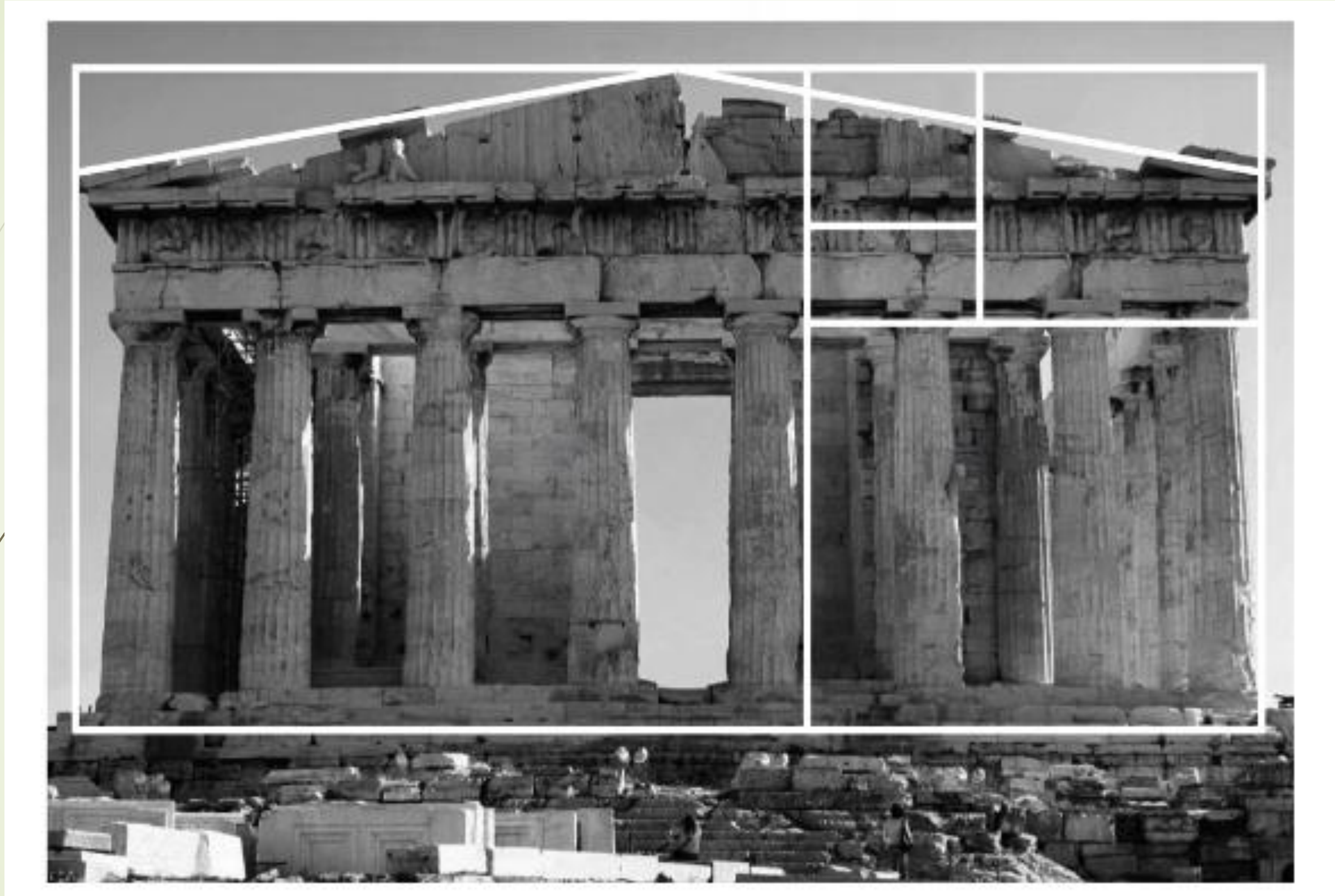
- Travaux sur le nombre d'or :

« Le nombre d'or, rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la pensée occidentale » (1931).

  - Tome I : Les Rythmes, illustré de 48 planches hors-texte, préface de Paul Valéry, de l'Académie française.
  - Tome II : Les Rites.



Le Parthénon

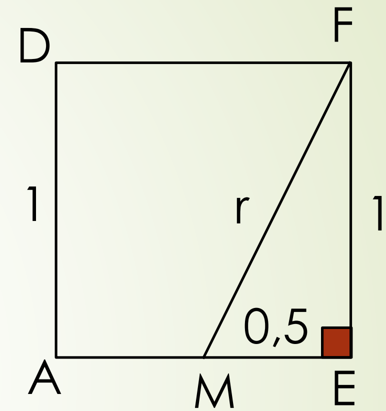


avec **des rectangles d'or**
tels que longueur/largeur « respecte » la proportion divine

Rectangle d'or

construction à la règle et au compas

- **Rectangle d'or** : le rapport de sa longueur par sa largeur est le nombre d'or.



soit le carré AEFD de côté 1

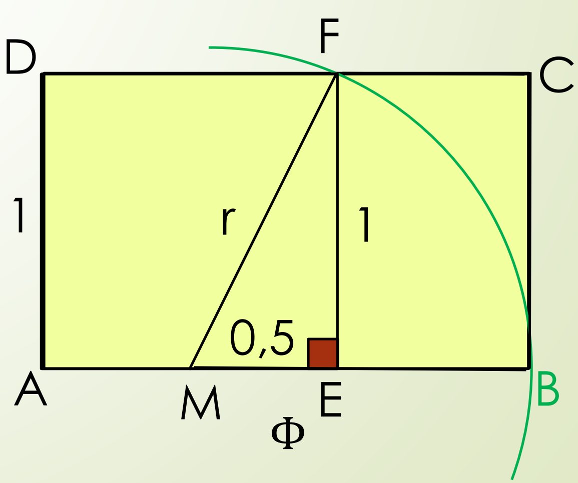
M milieu de AE

cercle de centre M de rayon r = MF = MB

alors d'après Pythagore r = $\frac{\sqrt{5}}{2}$

d'où AB / AD = AM + MB = 1/2 + r = $\boldsymbol{\Phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

et donc ABCD est rectangle d'or



Triangle d'or

construction à la règle et au compas

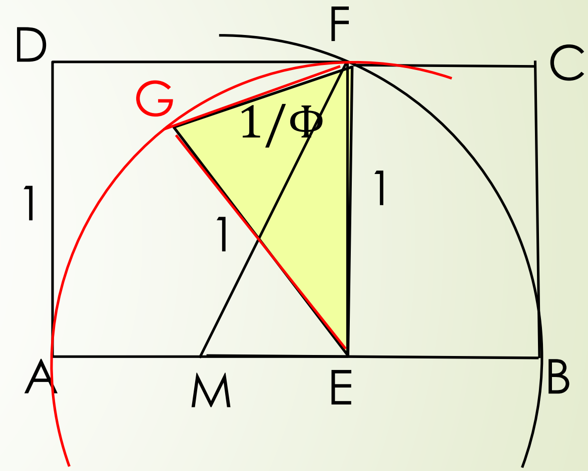
- **Triangle d'or** : triangle *isocèle* avec le rapport de son côté double et sa base est le nombre d'or.

cercle de centre E de rayon 1

G pt du cercle tq GF = EB = $\boldsymbol{\Phi}$ -1 = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ = 1/$\boldsymbol{\Phi}$

Alors le triangle EFG est isocèle doré

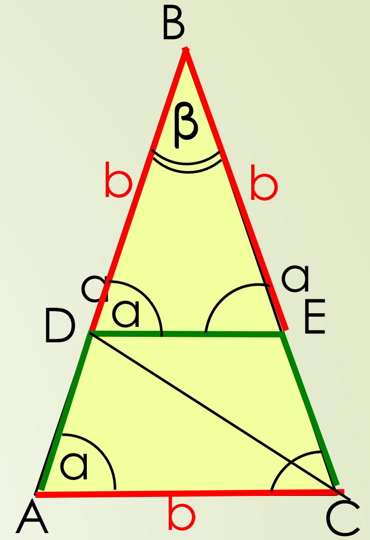
car GE = FE = 1 et GE / GF = $\boldsymbol{\Phi}$



NB : Triangle doré rectangle (1, $\sqrt{\boldsymbol{\Phi}}$, $\boldsymbol{\Phi}$)

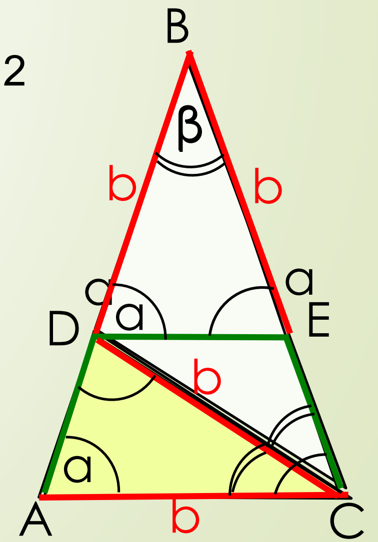
Angles triangle d'or & d'argent

Soit un triangle d'or ABC isocèle en B de base b et de côté double a avec a/b =$\mathbf{\Phi}$



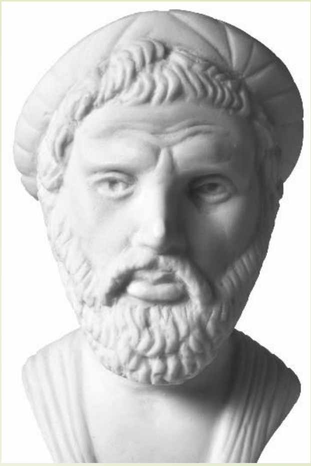
- Soient β l'angle en B et α l'angle en A et C alors
  2 α + β = 180°

- Soit D sur BA tq BD = b et E sur BC tq BE = b
  alors **BDE triangle d'or** car isocèle semblable à ABC (partage les mêmes angles) dans un rapport $\mathbf{\Phi}$
  d'où DE = $b/\Phi = b(\Phi-1) = a-b = DA$
  Le triangle CDA est d'or car est semblable au triangle d'or BDE car partage 2 côtés et un angle : donc DC = AC = b



- Le triangle BDC est isocèle en D : **triangle d'argent** avec a/b = $\mathbf{\Phi}$ d'où l'angle ACE = α est égal au double des angles DCE = ACD = β
  soit α = 2 β, comme 2 α + β = 180° on déduit que
  5 β = 180°
  ainsi β = 36° et α =72°
  et cos(2π/5) = $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}} = (\mathbf{\Phi}-\mathbf{1})/\mathbf{2}$ = $\frac{\sqrt{\mathbf{5}}-\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

Pentacle des pythagoriciens

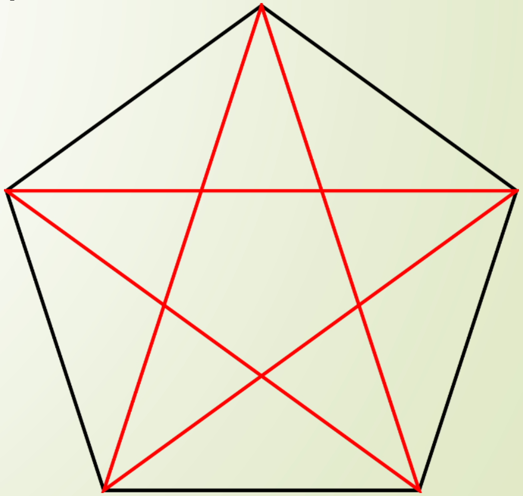


- **Pythagore** est un philosophe, mathématicien et astronome de la Grèce antique, né à Samos vers -580 et mort vers -495.

- Le **pentacle** est composé d'un pentagone régulier dans le lequel est inscrite une étoile à 5 branches à partir des 5 sommets du pentagone

- Symbole d'appartenance à l'école pythagoricienne (secte)
  dans le lequel apparait le cercle
  et des fractions avec des entiers (amulette)

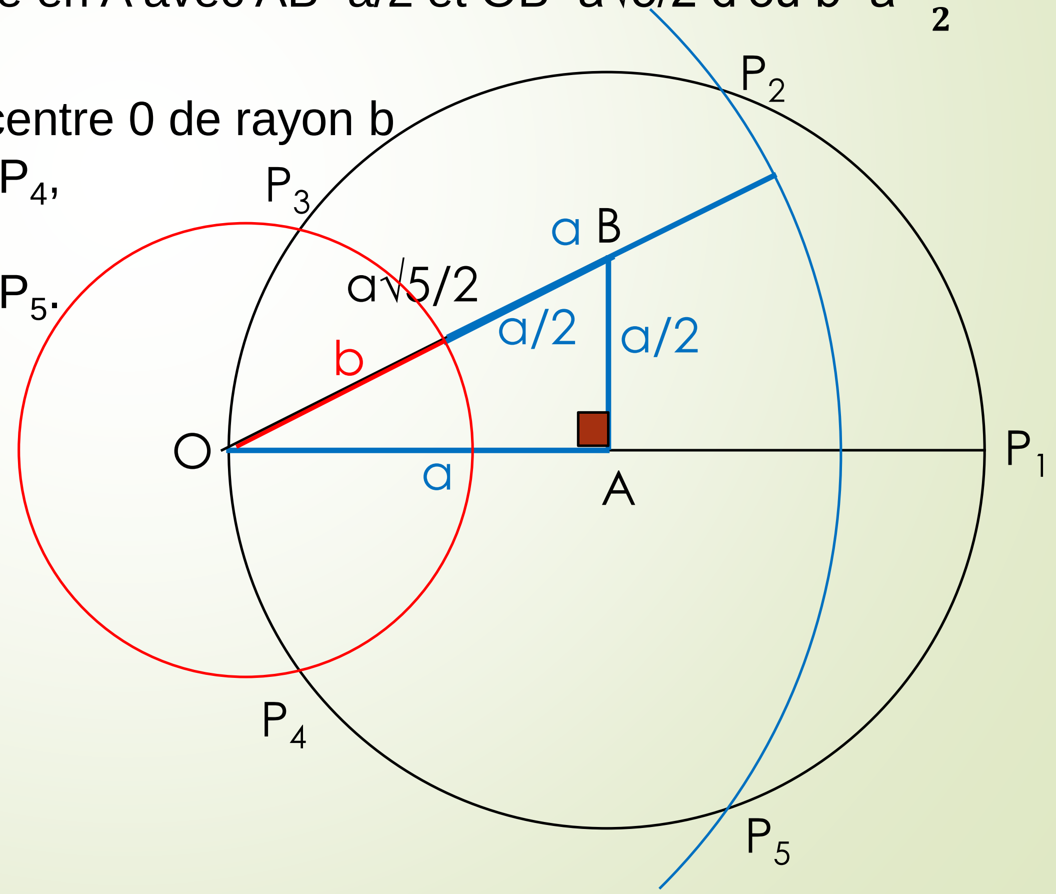
  5 éléments : esprit (ou éther), terre, eau, feu et air



Attention : pas de traces écrites du temps de Pythagore, culte du secret => mythe

Pentagone régulier

- **Construction à la règle et au compas** (éléments d'Euclide)
- On suppose connu la construction du triangle d'or et des angles associés
- On va construire un pentagone régulier ($P_1P_2P_3P_4P_5$) inscrit dans d'un cercle noir de centre A de diamètre OP_1 = 2 OA = 2a avec a rayon du cercle.
- Soit b tq a/b = $\mathbf{\Phi}$; OAB rectangle en A avec AB=a/2 et OB=a√5/2 d'où b=a$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- On construit le cercle rouge de centre 0 de rayon b intersecte le cercle noir en P_3 et P_4, et le cercle bleu de rayon a+b intersecte le cercle noir en P_2 et P_5.

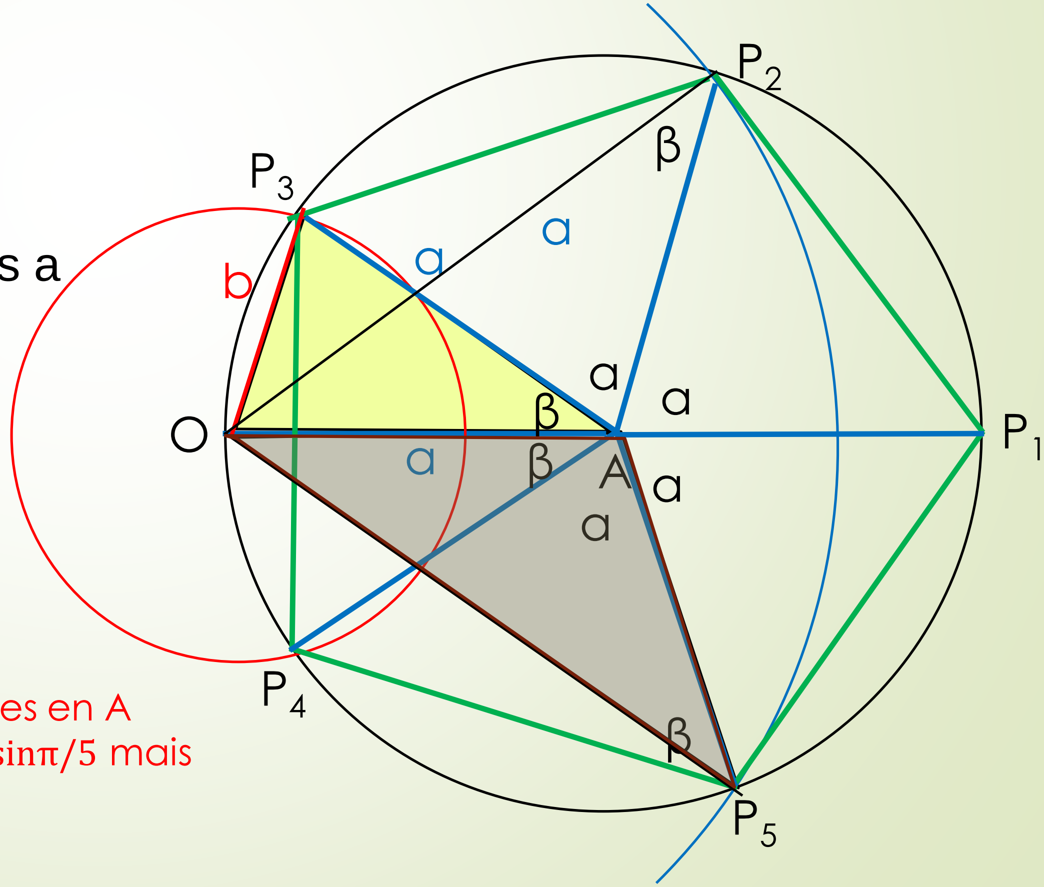


Pentagone régulier suite

- **Les triangles OP_3A et OP_4A sont d'or** car ses côtés sont a,a,b avec a/b= Φ; d'où l'angle β = 36°

- **Les triangles OP_2A et OP_5A sont d'argent** car ses côtés sont a,a,a+b avec (a+b)/a =1+1/$\Phi = \Phi$; d'où l'angle α =72°

- OP_1 est un axe de symétrie donc les triangles AP_1P_2 et AP_1P5 et l'angle en A qui vaut α. En outre ils partagent aussi 2 côtés a avec les 3 triangles AP_2P_3, AP_3P_4 et AP_4P_5, donc ils sont semblables et forment ensemble le pentagone régulier $P_1P_2P_3P_4P_5$

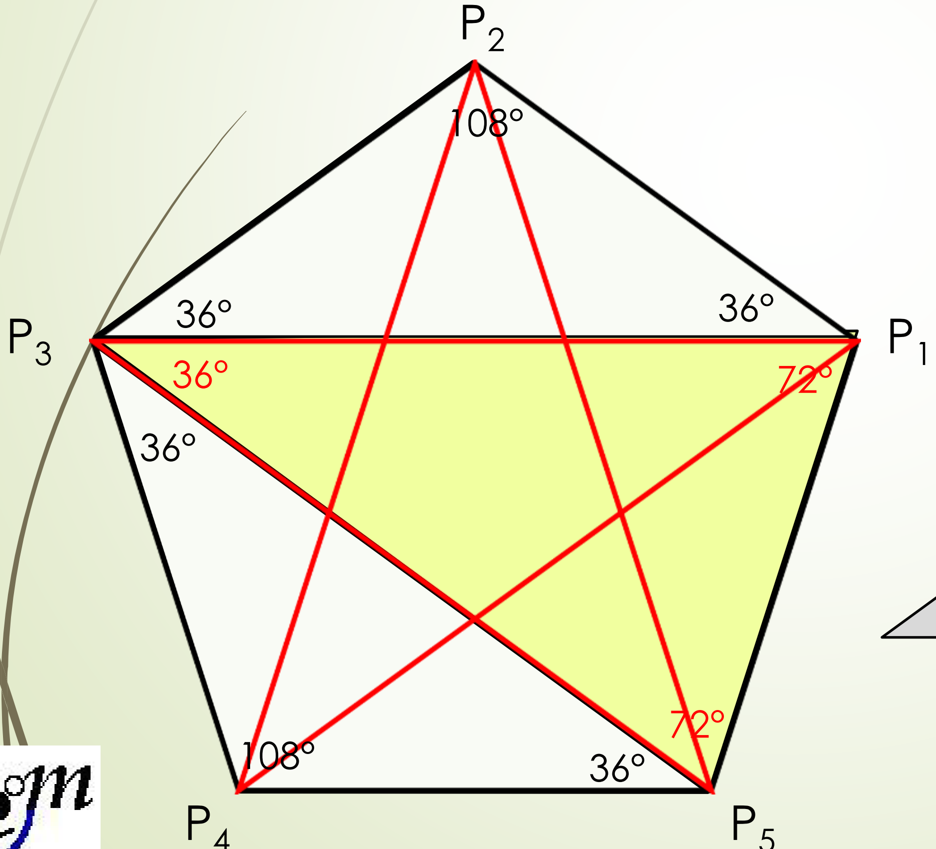


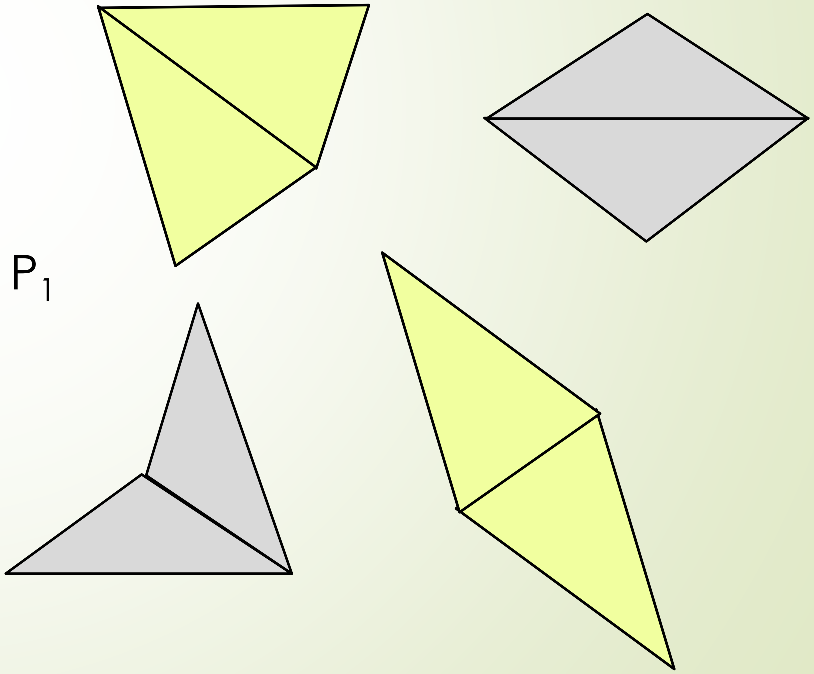
Les triangles AP_iP_{i+1} sont isocèles en A d'angle a et de côtés a,a,2asinπ/5 mais ne sont ni d'or ni d'argent !

Pentagramme pavage de Penrose

- Les 5 triangles $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ sont **d'argent** (dits aussi gnomons d'or) et les triangles $P_iP_{i+1}P_{i+3}$ sont **d'or** pour i=1 à 5 avec $P_{i+k}=P_{mod(i+k,5)}$
- Les triangles d'or et d'argent sont les briques de bases des **pavages de Penrose** (cerfs-volants, fléchettes, losanges, …)

Texas A&M Institute





Suite de Fibonacci

- **Leonardo Fibonacci** (1175-1250) est connu pour *Le liber abaci* (1202) livre de calculs où l'on trouve la croissance d'une population de lapins. Il introduit une suite qui porte son nom :

  générations F_n de couples de lapins chaque mois :

  $F_1 = F_2 = 1$ et $F_3 = F_2 + F_1$; $F_4 = F_3 + F_2$; … etc

  Il obtient une suite de nombres entiers : 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233 (1 an) ;…

  Fibonacci effectue alors le rapport F_{n+1} / F_n, il obtient la suite de rationnels : 1; 2; 1,5; 1,666…; 1,625; 1,615…; 1,619…; 1,618… proche de $\mathbf{\Phi}$!

- **Soit la suite** $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (ici $u_n = F_n$),

  on divise par u_{n+1} : $u_{n+2} / u_{n+1} = 1 + u_n / u_{n+1}$

  passage à la limite : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \mathbf{\Phi} = 1 + 1/\mathbf{\Phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1{,}618…$

  (obtenue aussi à partir de la formule de Binet (1843))

  d'où $1/\mathbf{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sim 0{,}618…$

  et $\mathbf{\Phi}^2 = 1 + \mathbf{\Phi} \sim 2{,}618…$ partagent les mêmes décimales que le nombre d'or

Formules

- **Racines carrées imbriquées** :

$\boldsymbol{\Phi}^2 = 1 + \boldsymbol{\Phi}$ d'où

$$\boldsymbol{\Phi} = \sqrt{1+\boldsymbol{\Phi}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\boldsymbol{\Phi}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\boldsymbol{\Phi}}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

- **Fraction continue de 1** :

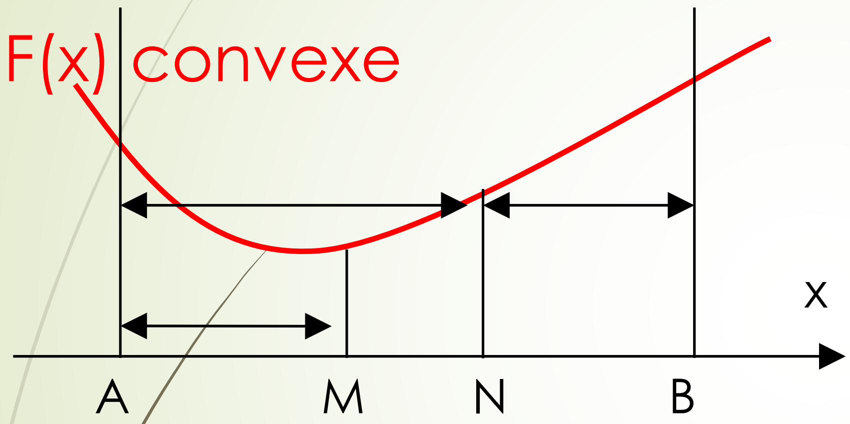
$$\boldsymbol{\Phi} = 1 + \frac{1}{\boldsymbol{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\boldsymbol{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\boldsymbol{\Phi}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\boldsymbol{\Phi}}}}}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}}$$

$\boldsymbol{\Phi}$ est le «plus irrationnel» des irrationnels !

Optimisation

- **Découpage optimal** pour trouver l'extremum d'une fonction.
  on cherche le minimum de f(x) pour x=[A,B]



$$\rho = \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AN} = \frac{1-\rho}{\rho}$$

$$\text{soit}\ \rho^2 + \rho - 1 = 0$$

$$\text{avec}\ 0{,}5 < \rho < 1$$

On trouve ρ = (√5-1)/2 = $\boldsymbol{\Phi} - 1 \Rightarrow$ section dorée

Soit le découpage optimal pour éliminer l'intervalle NB ou AM
Avec une réduction de 1-ρ ~ 0,382. A devient M ou B devient N
On recommence plusieurs fois … pour obtenir l'optimum.

Nombres métalliques

- **Généralisation** : soit p entier >0, la suite $u_{n+2} = p\, u_{n+1} + u_n$

passage à la limite : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi_p = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$ tq $\varphi^2{}_p = p + \varphi_p$

  - Pour p = 1, $\mathbf{\Phi} = \varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or => pentagone
  - Pour p = 2, $\varphi_2 = 1 + \sqrt{2}$ le nombre d'argent => octogone
  - Pour p = 3, $\varphi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ le nombre de cuivre ou bronze
  - Pour p = 4, $\varphi_4 = 2 + \sqrt{5} = \varphi_1{}^3$!

- **Nombre plastique ψ** avec la **suite de Padovan** $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$

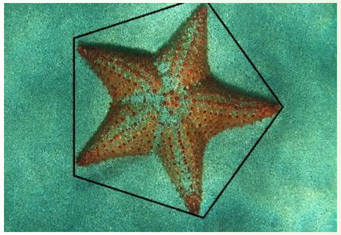
tq $\psi^3 = 1 + \psi$ avec $\psi \sim 1{,}324\ldots$

Nature et nombre d’or

- **Les fleurs** : le nombre de pétales comme nombre de la suite de Fibonacci :

ex) la marguerite a 21 pétales (F8)
le tournesol a 55 (F10) ou 89 pétales (F11)

- **La faune** :



ex) une étoile de mer dans un pentagone régulier
mais la spirale du nautilus n’est pas dorée,
elle est logarithmique …

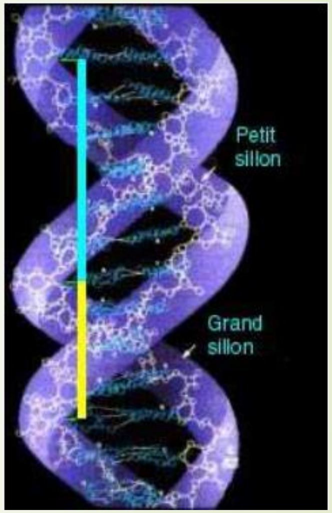
- **Quasi-cristaux** : pavages de Penrose avec des atomes
qui dessinent des triangles d’or et d’argent
mais ce n’est pas le cas des diamants (cubiques à face centrée)

- **Le corps humain** : voir l’homme « idéal » de Vitruve, les proportions
sont assez loin du nombre d’or

$\Rightarrow$ **La nature n’est pas si dorée que cela … mais …**

ADN et nombre d'or

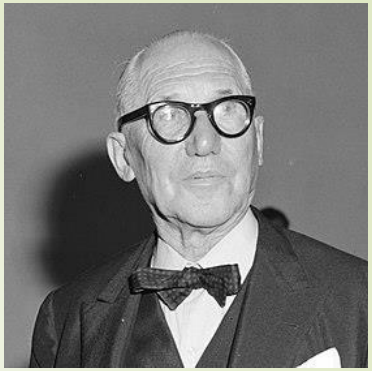
- Le rapport entre la longueur (34 angstroms = F9) et la largeur (21 angstroms = F8) d'un cycle complet de la double hélice ADN soit un rapport F9/F8 ~1,6190… proche du nombre d'Or



- La double hélice d'ADN présente 2 sillons qui sont dans un rapport F8/F7=21/13~1,615…

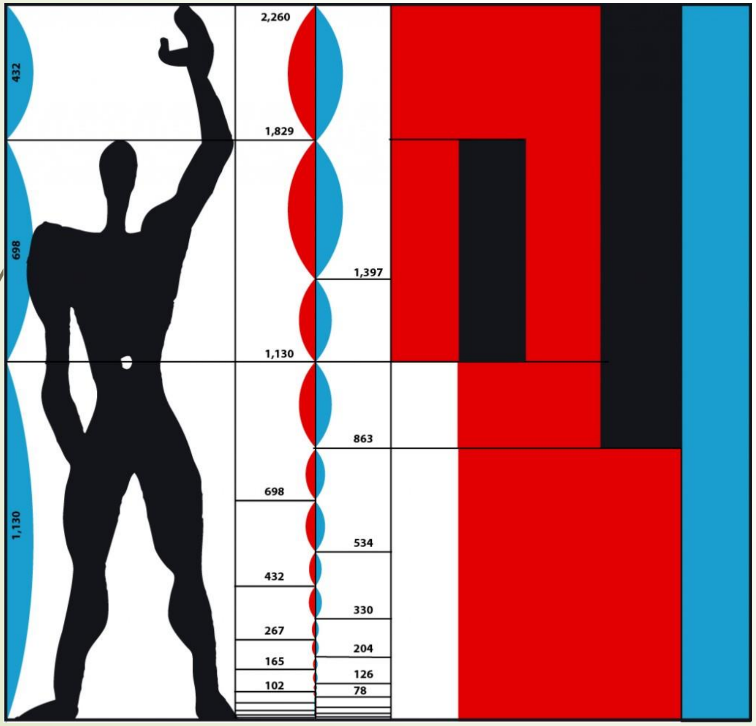
- La section de l'ADN a la forme d'un dodécagone régulier dans le lequel on trouve 2 pentagones réguliers construits à partir du nombre φ

Arts et nombre d’or



- **Le modulor de Le Corbusier** (1887-1965) :

  Nouvelle métrique, outil de mesure (1942)
  Homme : hauteur 1,83 / distance nombril = nombre d’or
  Maison = « machine à habiter »



Chapelle de Ronchamp (1955)

Et la musique …

- **Gamme harmonique** sur 12 notes (octave) :

  la sixte mineure 8/5=1,6 (do-la$_b$) est la plus proche du nombre d'or …

- **Gamme tempérament égal à 10 notes (Luc Etienne)** :

  7ème degré donne $2^{7/10}$ ~ 1,624…

- **Triton** (3 tons, do-fa#) en gamme tempérée standard : $2^{1/2} = \sqrt{2} = 1,414$…

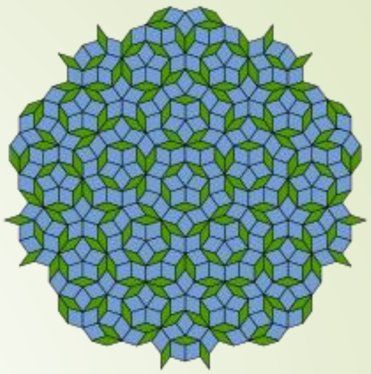
- Avec quel intervalle, avec quelle gamme pourrait-on obtenir le nombre d'or ?

  existent-t-il une *gamme dorée* avec K,n,p tq $K^{p/n} = \Phi$?

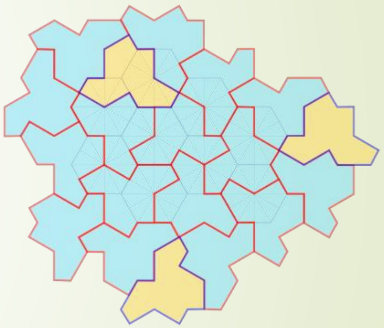
- **Fugue de Bartok** liée au nombre d'or (cf. kafemath du 6 mars 2007)

Pavages apériodiques et nombre d'Or

- Pavages apériodiques de **Penrose** avec 2 tuiles (1974) construites à partir des triangle d'Or et d'Argent.



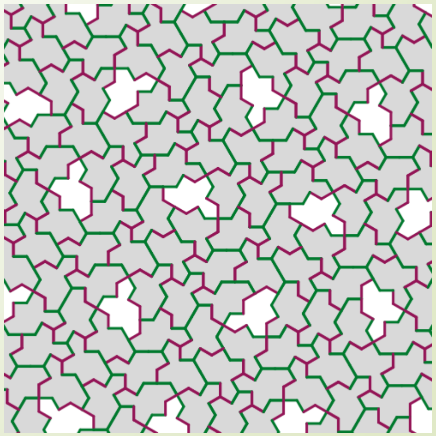
- Pavage apériodique (mars 2023) dit « **chapeau d'Enstein** » avec une seule tuile mais doit être retournée avec une fréquence qui dépend du nombre d'Or :



nTAH / nHAT = 1 / 3φ² avec φ² = φ + 1

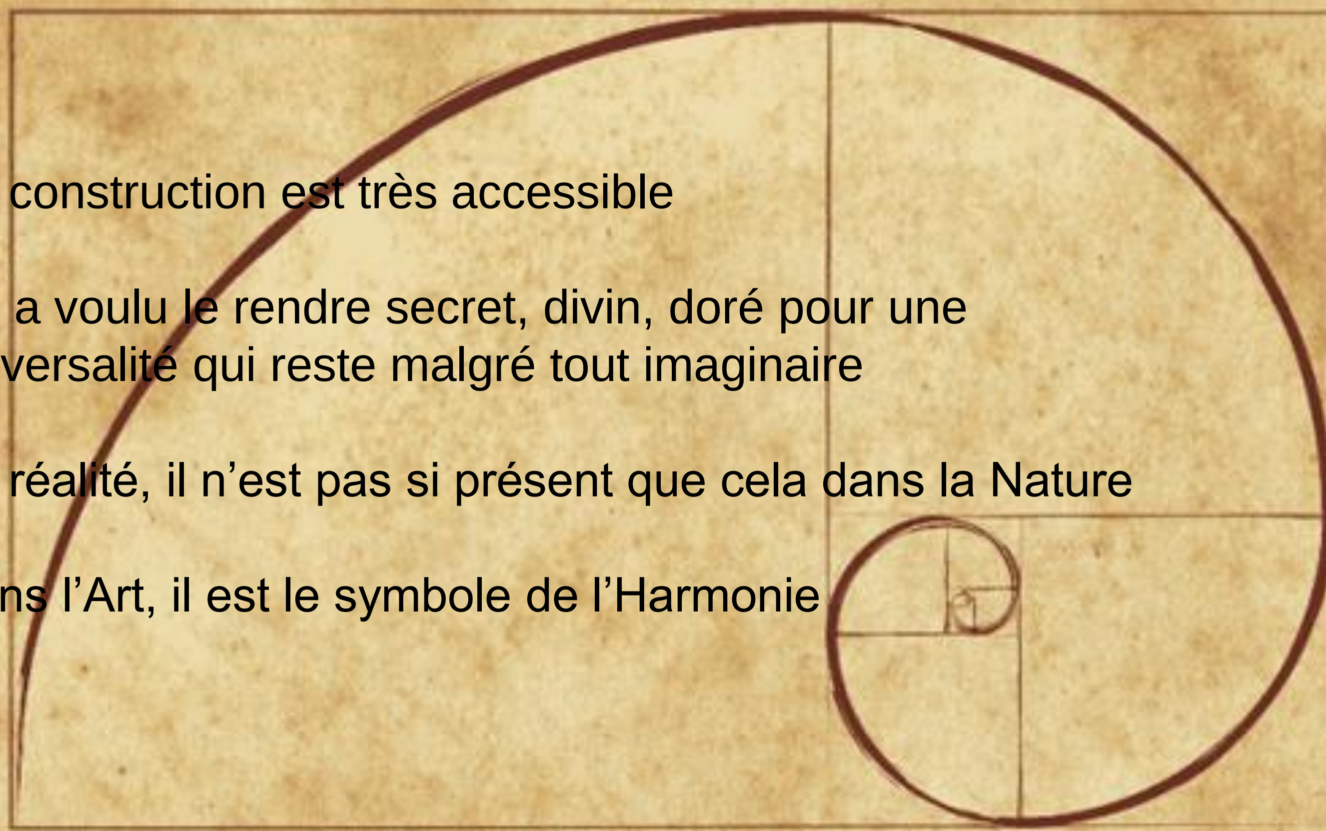
Soit ~12,7%

- Pavage chiral apériodique monotuile sans retournement avec « **le spectre** » (juin 2023)



Conclusion

- **Le nombre d'Or fait partie du Panthéon des nombres les plus célèbres**
- Sa construction est très accessible
- On a voulu le rendre secret, divin, doré pour une universalité qui reste malgré tout imaginaire
- En réalité, il n'est pas si présent que cela dans la Nature
- Dans l'Art, il est le symbole de l'Harmonie



Rectangle d'Or et spirale de Fibonacci