

DES CARTES MATHEMATIQUES POUR NOTRE UNIVERS



Hervé Stève
mathématicien et ingénieur aéronautique
cofondateur du Kafemath (2011)

herve.steve@hotmail.fr

Salon CIJM 2023 du 25 mai
Place Saint-Sulpice 75006 Paris



<http://kafemath.fr/>

Introduction

- Définitions du temps & de l'espace
- Mécanique classique ou newtonienne :
univers plat, euclidien
- Relativité restreinte : **univers plat, pseudo-euclidien**
- Relativité générale : **univers courbé, non euclidien**
- Mécanique quantique : **univers « vide »**



Le temps (LAROUSSE)

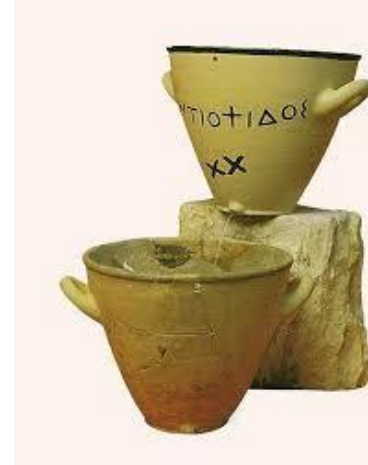
- Notion fondamentale conçue comme **un milieu infini** dans lequel se succèdent les événements : *situer une histoire dans le temps.*
- **Mouvement ininterrompu** par lequel le présent devient le passé, considéré souvent comme une force agissant sur le monde, sur les êtres : *Vous oublierez avec le temps.*
- Durée considérée comme une **quantité mesurable** : *Ce procédé nous fera gagner du temps.*
- Partie limitée de cette durée occupée par un événement, une action : *Le temps de la traversée lui a paru interminable.*
- Durée plus ou moins définie, dont quelqu'un dispose : *Bien employer son temps. Elle est avare de son temps.*
- Chacune des phases successives d'une opération, d'une action : *Un programme de travaux réalisé en deux temps.*
- Moment, époque occupant une place déterminée dans la suite des événements ou caractérisée par quelque chose : *En ce temps-là, j'habitais Paris. En temps de paix.*
- Moment, période, saison marqués par un genre de production, par tel caractère, etc. : *Le temps des semailles.*
- État de l'**atmosphère**, en un lieu donné, à un moment donné : *Temps chaud et sec.*



... mesures du temps ...

- **Physique antique :**

- comptage à partir d'un point repère
- à l'aide d'une clepsydre
- mais quelle est la durée de base ?



- **Physique moderne : l'unité SI est la seconde (s)**

- période des astres (Soleil, Terre) : n'est pas constante !
- horloge atomique pour la seconde (1967) qui est proche de 10GHz (~10millions d'oscillations pour le césium-33)
- Horloges à quartz (montres, ordinateurs) : fréquences 2^{15}



L'espace (LAROUSSE)

- Propriété particulière d'un objet qui fait que celui-ci occupe une certaine **étendue**, un certain volume au sein d'une étendue, d'un volume nécessairement plus grands que lui et qui peuvent être mesurés.
- Étendue, **surface ou volume** dont on a besoin autour de soi : *manquer d'espace dans une chambre trop petite.*
- **Portion de l'étendue** occupée par quelque chose ou distance entre deux choses, deux points : *laisser un espace de 2 mètres entre les deux éléments.*
- Étendue, **surface, région** : Survoler de vastes espaces désertiques.
- Surface, étendue, volume destinés à un usage particulier : *la cuisine devient un espace à vivre.*
- **Domaine localisé** dans lequel s'exercent certaines activités : *espace judiciaire européen.*
- **Milieu situé au-delà** de l'atmosphère terrestre et dans lequel évoluent les corps célestes : *La conquête de l'espace.*
- **Géométrie** : ensemble des points dont la position est définie par trois coordonnées.
- **Mathématique** : ensemble sur lequel on a défini une structure (algébrique et/ou topologique). Exemple) un espace vectoriel



... mesures de l'espace ...

- depuis l'antiquité, besoin de mesures des longueurs, surfaces et volumes
=> Hétérogénéités suivant les coutumes, de nombreuses unités possible

- besoin d'une unité de longueur : l'étalon mètre

1795 : la dix millionième partie du quart du méridien terrestre

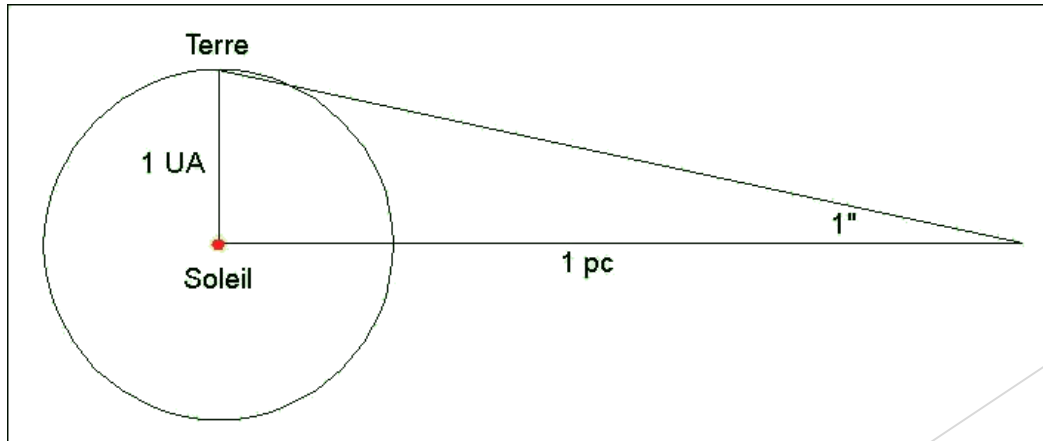
Dématérialisé depuis 1960 au CGPM



Janvier 1793

- l'unité SI standard est le mètre (m), à l'échelle atomique c'est le nanomètre (nm), à l'échelle de l'univers il y a :

- l'unité astronomique : 1 UA (Terre-Soleil) = 149 597 870 700 m (2012)
- l'année lumière : 1 aL = 9 460 730 472 580,8 km ~ 63 241 UA
- le parsec : 1 pc = 648 000/π UA (2015) ~ 3,26 aL ~ 206 265 UA



Diamètre de l'Univers : environ 13 milliard d'année lumière !



4 modèles d'espace

- **Mécanique classique ou newtonienne :**

à l'échelle humaine, c'est un **espace euclidien** de dimension 3. On le muni de la métrique $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; le temps est dissocié mais on le relie à l'aide de la vitesse : $v = dr / dt$

- **Relativité restreinte (Einstein 1905) :**

l'espace est lié au temps par l'intermédiaire de la vitesse de la lumière dans le vide $c=299\,792\,458$ m/s (SI 1983), sans champ de gravitation (restreint) donc pas de courbure. Modélisé par **l'espace de Minkowski** (espace pseudo-euclidien de dimension 4), muni de la métrique :

$$ds^2 = c^2 dt^2 + i^2 dx^2 + i^2 dy^2 + i^2 dz^2 = (c^2 - v^2) dt^2 \rightarrow v \leq c \text{ avec } i^2 = -1$$

- **Relativité générale (Einstein 1915) :**

l'espace, la masse-énergie et le temps sont liés induisant une **courbure** de l'espace dans l'Univers. Modélisé par une **variété* de dimension 4** (la sphère est une variété riemannienne de dimension 2), les trajectoires suivent alors des **géodésiques**.

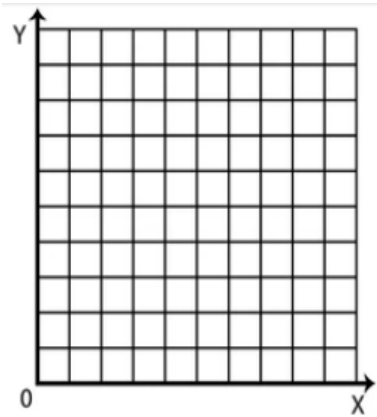
- **Mécanique quantique :**

à l'échelle subatomique, les changements d'états ne sont plus continus (**quantas**). La notion de position est remplacée par celle de **fonction d'onde** (incertitude entre position et mouvement). L'espace de modélisation est un **espace de Hilbert** (espace de probabilités).

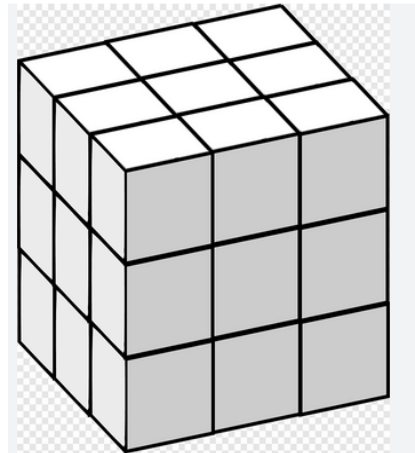
(*) variété : un espace localement (pseudo-)euclidien 7



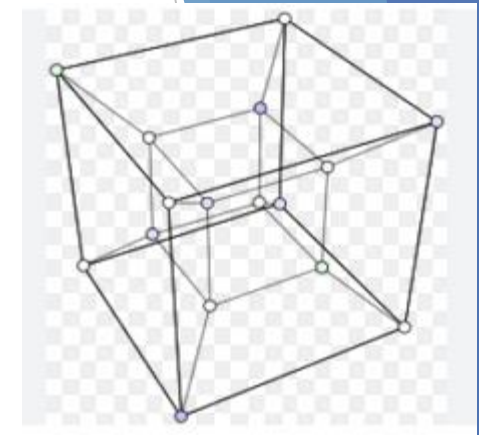
Quelques cartes de l'espace



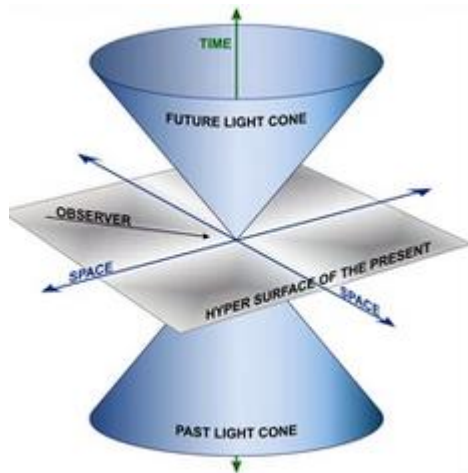
Espace euclidien 2D



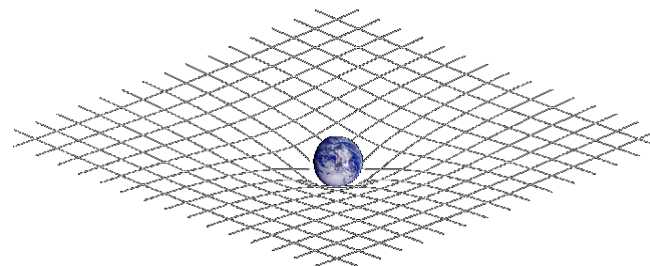
Espace euclidien 3D



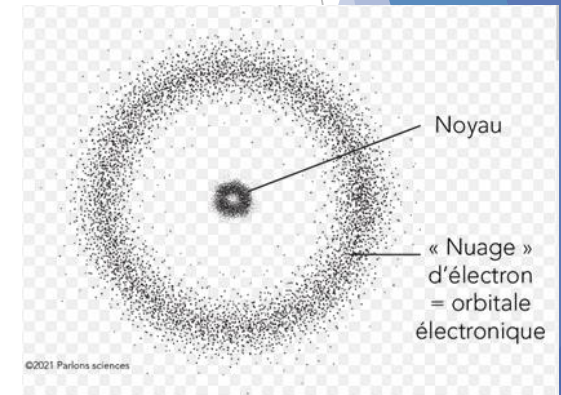
Hypercube dans espace euclidien 4D



Espace-temps conique avec $v \leq c$



Espace-temps non euclidien 2D

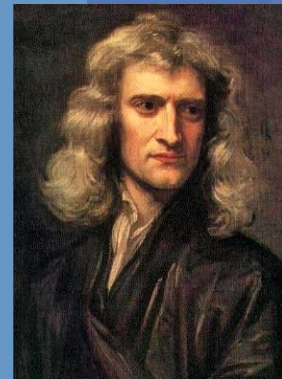


Nuage électronique

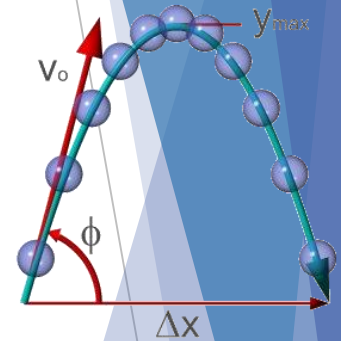


Mécanique classique ou newtonienne

- Science depuis l'antiquité
- Pendant longtemps, branche des mathématiques
- Mécanique statique : ex) bras de levier (Archimède), force ...
- Au 18^{ème} siècle : mécanique du point (centre de gravité) / mécaniques des fluides
- Au 19^{ème} siècle : mécanique des solides non déformable et déformables / mécanique des milieux continus (matériaux et fluides)



Isaac Newton
1642-1727



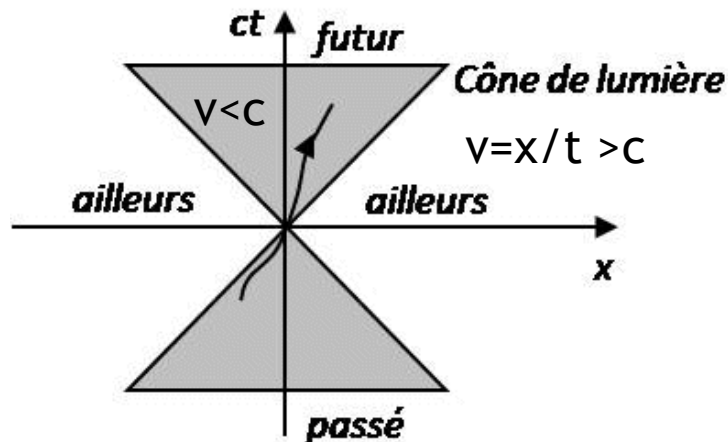
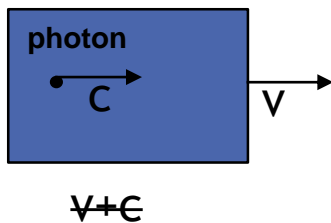
Équations de
la balistique

	Mécanique du point	Mécanique des milieux continus	
		Mécanique du solide	Mécanique des fluides
Cinématique	Cinématique du point	Cinématique du solide	Cinématique des fluides (en)
Dynamique	Dynamique du point	Dynamique du solide	Dynamique des fluides
Statique	Statique du point	Statique du solide	Statique des fluides (hydrostatique)



Relativité restreinte

- De l'invariance de l'espace (x,y,z) et du temps (t) (mécanique newtonienne) à l'invariance de l'espace-temps (ct,x,y,z)
- **Relativité galiléenne (17^{ème})** : les lois physiques restent inchangées dans les référentiels « galiléens » (inertiels, pour les mouvements uniformes). Principe de relativité : dans une bouteille, les gouttes d'eau tombent verticalement quelque soit la vitesse du bateau où se trouve cette bouteille.
- **Equations de Maxwell** en électromagnétisme dans le vide (19^{ème}) : la relativité restreinte postule que la vitesse de la lumière est invariante au changement de repère galiléen => on ne dépasser cette valeur : un photon ayant une vitesse c dans une boite se déplaçant à une vitesse v dans la même direction que celle du photon aura une vitesse c pour tout repère mobile ou pas.



Albert Einstein
1879-1955



Galilée
1564-1642



James C. Maxwell
1831-1879

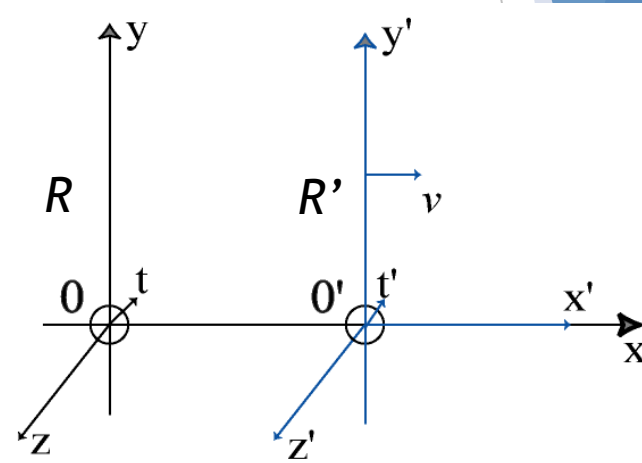


Repères Galiléens

- **Transformations galiléennes** des coordonnées spatiales et temporelles entre 2 référentiels galiléens ou inertiels notés $R(0,x,y,z,t)$ et $R'(0',x',y',z',t')$.
- **Référentiel inertiel** (aucune force n'est appliquée) : tout corps ponctuel libre est un mouvement de translation rectiligne uniforme ou au repos. C'est-à-dire la vitesse du corps v est constante en direction et en norme (valeur).
- **Exemple** : selon la direction x

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Le temps est absolu : invariance des variations temporelles Δt et $\Delta t'$



Que se passe-t-il lorsque v se rapproche de c ?

Transformations de Lorentz

- **Transformations de Lorentz** des coordonnées spatiales et temporelles entre 2 référentiels galiléens $R(0,x,y,z,t)$ et $R'(0',x',y',z',t')$ se déplaçant à une vitesse v constante qui ne peut dépasser la vitesse de la lumière c .
- **Exemple** : selon la direction x

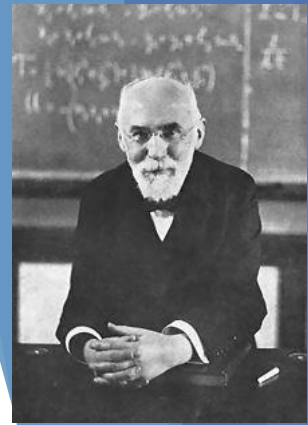
$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \\ x' = \gamma(x - \frac{v}{c}ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Avec γ le facteur de Lorentz :

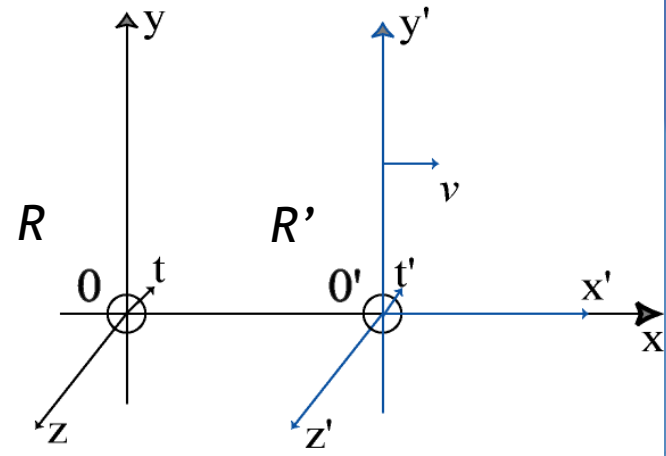
$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Si $v \ll c$, on retrouve la transformation galiléenne avec $\gamma \sim 1$.

Sinon on observe une **contraction des longueur** et une **dilatation du temps** : **le temps est devenu relatif** ce qui garantit que la vitesse de la lumière c est invariante dans tous les repères galiléens.

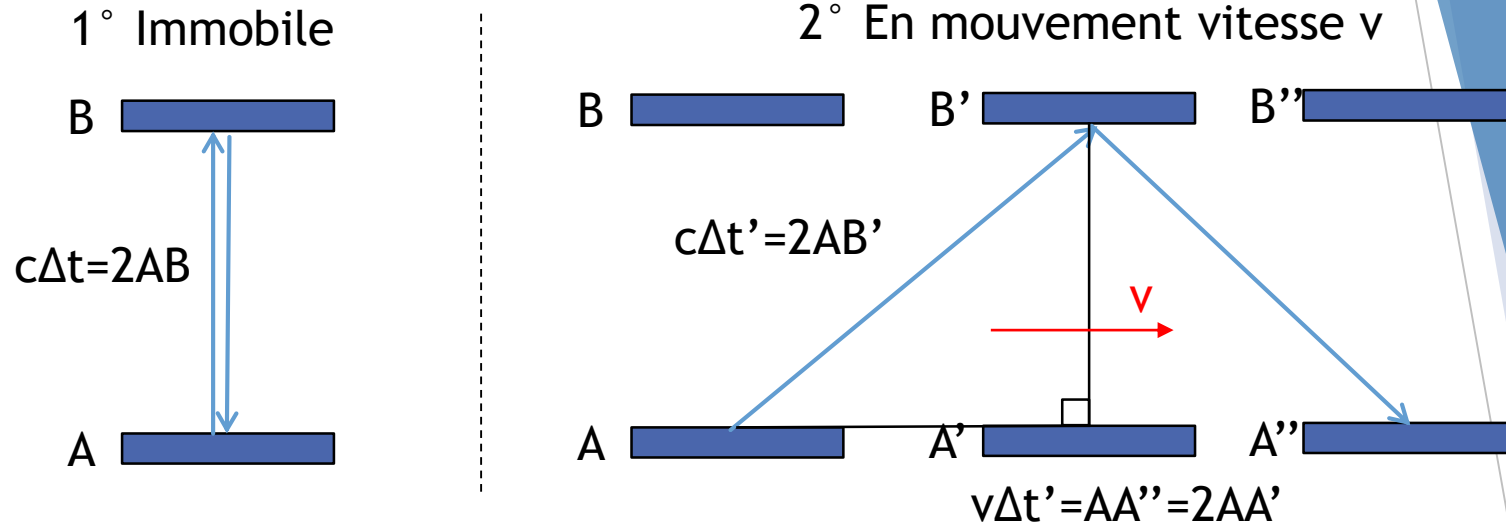


Henrik Lorentz
1853-1928



Dilatation des durées

- **Expérience du système miroir** : en 2 temps d'horloge



Comme $AB' > AB$ alors $\Delta t' > \Delta t$:

le temps est ralenti lorsque le système est en mouvement !

Théorème de Pythagore : $AB'^2 = AA'^2 + A'B'^2$

$$\text{d'où } \frac{1}{4} c^2 \Delta t'^2 = \frac{1}{4} v^2 \Delta t'^2 + \frac{1}{4} c^2 \Delta t^2$$

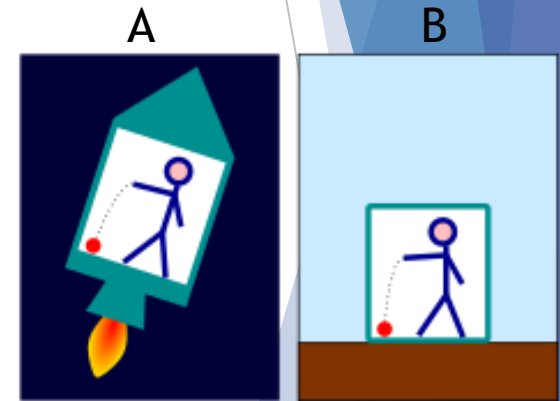
$$\text{ainsi } (1 - v^2/c^2) \Delta t'^2 = \Delta t^2$$

$$\text{soit } \Delta t' = \Delta t / \sqrt{1 - v^2/c^2} = \gamma \Delta t$$

→ transformations de Lorentz : **lois de changement de repère relativiste**

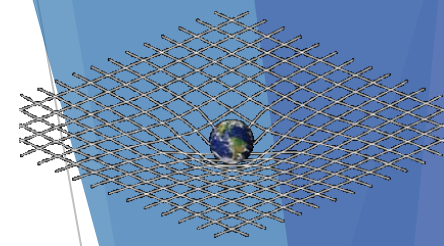
Principes d'équivalence

1. **Galilée** : la chute libre des corps est universelle
 2. **Newton** : la masse gravitationnelle est égale à la masse inertielle
 3. **Einstein 1905** : sans gravitation (relativité restreinte), les effets d'un champ gravitationnel sont identiques aux effets d'une accélération du référentiel d'un observateur.
 4. **Einstein 1908** : avec la gravitation (relativité générale), le référentiel précédent est localement un espace-temps de Minkowski (pseudo-euclidien).
- **Expérience de l'ascenseur** : chute d'un objet vue par un observateur extérieur B, et vue par celui A de la fusée subissant une accélération constante : ce dernier peut penser, si la paroi de la fusée est opaque, qu'il est immobile comme dans B.
 - **Courbure de l'espace-temps** : pour Newton la boule rouge est attirée par la Terre, pour Einstein la boule suit une ligne droite dans un espace-temps courbé.



le temps passe moins vite à la surface de la Terre que dans l'espace

L'équation des champs d'Einstein



- **Équation tensorielle 4 x 4 symétrique fondamentale de la relativité générale** présenté par **Albert Einstein** à l'Académie des Sciences de Berlin le 25/11/1915

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

- $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci (déformation de l'espace-temps)
 - R est la courbure scalaire (trace du tenseur de Ricci)
 - $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique de signature (+ - - -)
 - Λ est la constante cosmologique (densité moyenne du vide)
 - $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion (quadrivecteur)
 - $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ est la constante d'Einstein avec G constante gravitationnelle
- Dans le vide $T_{\mu\nu}=0$, avec $\Lambda=0$ alors $R_{\mu\nu}$ s'annule : **l'Univers est dit Ricci-plat**
 - En l'absence de courbure, **l'Univers est plat** : espace de Minkowski
 - Dans un trou noir, **l'Univers est courbé** : métrique de Schwarzschild (1916)

Équation de Schrödinger (1926)

- **Principe de superposition quantique** : la fonction d'onde ψ est régie par l'équation déterministe de Schrödinger, mais la mesure d'une observable donne plusieurs résultats possibles prises de manière aléatoires :

$$\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} |\Psi(t)\rangle + V(\hat{\mathbf{r}}, t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle$$

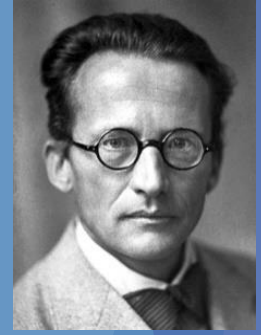
Avec i nombre imaginaire tq $i^2 = -1$

\hbar constante de Dirac tq $\hbar = h/2\pi$ et h constante de Planck

$H = P^2/2m + V$ est l'**Hamiltonien** (énergie totale du système), P impulsion et V potentiel

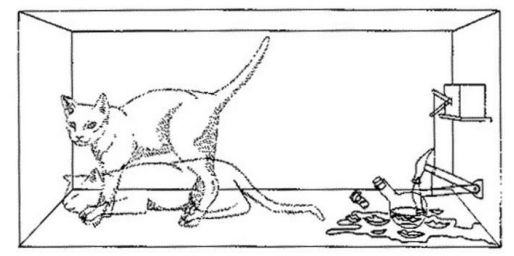
$|\psi(t)\rangle$ **élément de l'espace de Hilbert** (fonction d'onde), son module au carré est la densité de probabilité de résultats de toutes les mesures possibles
 r observable position

- **Dualité onde-corpuscule** décrite par la fonction d'onde
- **Principe/théorème d'incertitude d'Heisenberg** : on ne peut connaître avec précision la vitesse et la position d'une particule
- **L'observation influe sur le système observé**
- **Décohérence** : transition vers la mécanique classique
- **Intrication ou non localité** : répercussion immédiate d'une interaction à un endroit (contredit la relativité restreinte car $v \leq c$)



Erwin Schrödinger

1887-1961



Le chat de Schrödinger

Conciliation avec la relativité générale : gravité quantique



Conclusion

- Aucun des 4 modèles présentés est le bon modèle
- Mais chaque modèle est valide dans son domaine d'application
- Y-aura-t-il un jour un modèle général englobant toutes les échelles des particules élémentaires jusqu'aux systèmes d'astres les plus gros ?

1^{ère} lumière émise après le Big-Bang d'après le télescope Planck 05/08/2014
assez proche du modèle standard de l'Univers