

Les diviseurs d'un entier et leurs mystères

JEAN-MARIE DE KONINCK

Université Laval

Résumé d'un éventuel exposé au Kafémath

Un entier positif d est appelé un *diviseur* de l'entier positif n si n/d est un entier. Il est coutume de désigner par $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n et par $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n . Deux fonctions apparemment fort simples. Pourtant, il n'en est rien. Bien qu'on sait démontrer assez facilement qu'en moyenne un entier positif n possède environ $\log n$ diviseurs, jusqu'en 1984, on ne savait même pas démontrer qu'il existe une infinité d'entiers positifs n tels que $\tau(n) = \tau(n+1)$. Par ailleurs, on ne sait toujours pas s'il existe des nombres parfaits impairs, c'est-à-dire des entiers impairs n tels que $\sigma(n) = 2n$. L'étude des comportements local et global de ces deux fonctions est fascinante et occupe les mathématiciens amateurs et professionnels depuis plus de 2000 ans. Dans cet exposé, nous ferons un survol des résultats et des mystères qui entourent ces deux fonctions. Nous parlerons également de fonctions "plus récentes" liées aux diviseurs d'un entier et qui portent également leurs lots de mystères.