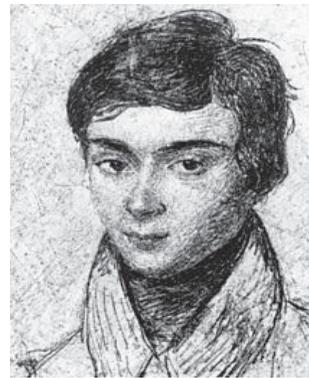


MATHÉMATIQUES ET ÉMOTIONS

Évariste Galois est l'incarnation même du choc des mots "mathématiques" et "émotions". Il est un point d'entrée privilégié pour une réflexion sur la place des émotions dans la logique et les mathématiques.

Galois et émotions

Les émotions structurent la vie de Galois en une accumulation de conflits. Il dut surmonter l'émotion que son père se donne la mort après avoir été maire de Bourg-la-Reine, que ses engagements républicains conduisent à son exclusion de l'École Normale, qu'une amie trop coquette se moque de ses sentiments. Enfin, dans un conflit entre ses sentiments et ses travaux mathématiques dont il pressent la valeur, il choisit d'aller, par un duel, à une mort certaine après avoir écrit dans la nuit un résumé de ses idées.



Evariste Galois

Les Chants de Maldoror



Isidore Ducasse

On comprend mieux Galois à travers un autre personnage, un poète qui l'a suivi de peu dans le dix-neuvième siècle. Alors que Galois a vécu 21 ans, de 1811 à 1832, Isidore Ducasse a vécu 24 ans de 1846 à 1870. Il a laissé une oeuvre poétique majeure, Les Chants de Maldoror, signée Comte de Lautréamont, que nous ne connaissons que parce qu'il a payé de ses deniers un éditeur pour qu'elle soit imprimée et diffusée. Ignoré pendant un demi-siècle, il est découvert par les surréalistes qui le mettent à sa juste place. Enfouis dans son oeuvre se trouvent quelques pages qui exaltent ses sentiments pour les mathématiques en des termes que le lecteur ne peut oublier.

"Arithmétique ! algèbre ! géométrie ! trinité grandiose ! triangle lumineux ! Celui qui ne vous a pas connues est un insensé !"

...
O mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées, depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon coeur, comme une onde rafraîchissante. J'aspirais instinctivement, dès le berceau, à boire à votre source, plus ancienne que le soleil, et je continue encore de fouler le parvis sacré de votre temple solennel, moi, le plus fidèle de vos initiés."

Comment exprimer plus fortement que les mathématiques sont autre chose que des suites de symboles savamment disposés ?

Violentes mathématiques ?

Dans un autre chant, Lautréamont évoque un étrange usage des mathématiques comme rempart contre les émotions indésirables :

"Vous me donnâtes la froideur qui surgit de vos conceptions sublimes exemptes de passion."

Gaston Bachelard, dans son "Lautréamont" consacré au poète, saisit l'occasion pour décrire la violence froide et rationnelle du professeur de mathématique.

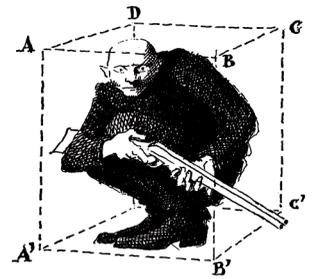
"Tapi au fond de la classe, comme une araignée dans son encoignure, il attend".

Doit-il nécessairement penser sa mission comme bornée à l'enseignement de la rigueur et de la démonstration ?

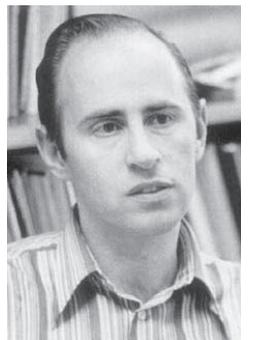
Passions historiques

Exemptes de passion, les "conceptions sublimes" chantées par Lautréamont ?

J'ai été personnellement témoin de la conclusion d'un affrontement passionnel entre mathématiciens, en assistant, en 1964, à l'Institut Henri Poincaré, à la démonstration par Paul Cohen, venu spécialement des États-Unis, de l'indépen-



dessin J Gourmelin



Paul Cohen



Georg Cantor

dance de l'hypothèse du continu. Cohen répondait à la question posée par Georg Cantor un demi-siècle plus tôt, se demandant s'il existait un infini distinct entre le dénombrable des entiers et le continu des réels. Il démontre que c'est un choix, une mathématique pouvant être développée avec ou sans. Or Poincaré, avant de donner son nom à l'institut qui nous recevait ce jour-là, s'était publiquement moqué de Cantor et prétendait que les mathématiques sauraient certainement se "guérir" de ce qu'il appela cette ridicule maladie ... Hélas, les mathématiques non seulement ne s'en sont pas guéries mais l'ont intégrée comme un domaine essentiel.

On pourrait mettre cet affrontement sur le compte d'une rivalité historique entre mathématiciens. En réalité le conflit est plus profond et plus riche d'enseignement car il touche à la relation personnelle de chaque mathématicien avec les mathématiques. Poincaré ressentit un malaise dans sa conception intime des mathématiques. Il était d'ailleurs, en cela, dans le même état d'esprit que les collègues de Cantor qui ont ressenti un malaise semblable, l'ont persécuté et ont même tenté de l'empêcher d'enseigner. Cantor, quant à lui, voyait et ressentait la validité de son propre univers mathématique.



Henri Poincaré

De quoi s'émeuvent les mathématiciens ?

Un survol intuitif de la question livre dans le désordre :

- le sentiment de démonstration satisfaisante
- l'orgueil d'une découverte
- la cohérence logique
- l'angoisse devant la "singularité" d'un objet indiscutablement présent mais hors du contexte (racine de 2 n'est pas un nombre)
- le suspense d'une conjecture non validée (Fermat)

- la signature personnelle d'une création
- l'assurance des fondements
- l'inquiétude devant l'éventuelle indécidabilité
- l'usage pratique d'une structure mathématique
- etc.

Un ressenti partagé : la démonstration

Au cœur des mathématiques, les démonstrations sont emblématiques de la solidité des théorèmes. Une fois démontré, un théorème apparaît comme coulé dans le bronze de la vérité absolue et éternelle. La situation n'est pourtant pas si simple.

Plus précisément en ce qui concerne Galois, le sentiment de démonstration l'a plusieurs fois cruellement affronté à son environnement. Son examinateur du concours d'entrée à Polytechnique, de même que Poisson, ont refusé ses travaux sous prétexte de peiner à suivre ses raisonnements et l'ont rejeté..

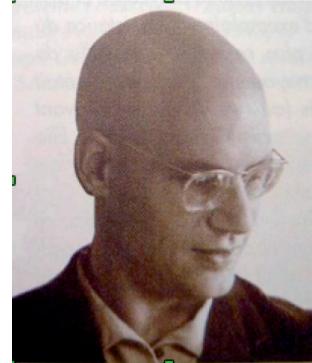
Une démonstration est en effet un ressenti partagé. Une proposition est réputée prouvée pour un certain nombre de mathématiciens quand "ils ressentent que leur esprit perçoit directement sa vérité". (Scott Aaronson).

Cette émergence du "ressenti" à l'occasion de la démonstration, l'aspect réputé le plus rationnel des mathématiques, pose l'émotion au même niveau que la raison. Du coup raisonner et avoir des émotions interviennent en même temps et non pas en des temps différés, et sont là pour fonder ensemble le partage de la vérité entre êtres humains. La démonstration, traditionnellement vue comme le ciment le plus solide des mathématiques, se révèle être un assemblage hybride de rationnel et d'émotions. Ces émotions interviennent de façon si essentielle qu'une bonne pratique consisterait à attacher à chaque théorème son fondement historique : les identités des personnes qui l'ont officiellement validé.

Une logique de rêveur

Sur ces bases, certains groupes d'humains s'accordent ainsi sur la mise en commun d'entités qu'ils ne peuvent ni voir ni toucher, que nous sommes donc bien forcés d'appeler des chimères ou des rêves. Pour les traiter, on est tenté de se rapprocher de Sigmund Freud, qui a largement fondé son travail sur l'observation des rêves. Or il les identifie comme "... réalisations de désirs reconnus par la conscience, insatisfaits dans la vie quotidienne mais parfaitement dignes d'intérêt." Cela nous conduira évidemment plus loin dans les explorations.

Alexandre Grothendieck ne nous contredirait pas, qui s'est consacré aux dialogues avec "le Rêveur" après 20 ans de traversée fulgurante des mathématiques. Tout se passe comme s'il n'avait jamais cessé d'être dans les maths, mais à un niveau plus profond de la pensée. Ici, l'objectif est à la fois de respecter sa posture d'observation des rêves, tout en restant au niveau de l'observation des mathématiques.



Alexandre Grothendieck

Un espace virtuel commun

Les mathématiciens ont donc en commun un espace virtuel dont l'imaginaire et le rationnel se partagent la structure. Cela peut se décrire dans le vocabulaire d'un domaine équivalent mais considéré comme éloigné, celui des jeux vidéo en réseau, espaces virtuels

- persistants
- massivement multi joueurs
- universellement partageables

Chaque joueur, comme chaque mathématicien, peut entrer, explorer, créer puis sortir et revenir en retrouvant exactement l'univers qu'il avait quitté.

Les espaces virtuels ludiques sont récents, le premier ayant été historiquement créé et mis en oeuvre à Pompidou en 1984. L'espace virtuel ma-

thématique est plus ancien de deux millénaires et demi. Euclide, Pythagore et d'autres pionniers relevèrent le défi d'échanger entre êtres humains les phénomènes complexes des mathématiques, résidant à l'intérieur du cerveau de chacun. Les inventeurs du langage avaient depuis longtemps permis ce genre d'échange entre pensées mais les mathématiques étaient un défi particulier, leur transmission exigeant d'équilibrer l'imaginaire par une grande précision dans la logique. Ils développèrent rapidement l'arsenal nécessaire de codes, symboles et axiomes pour partager, hors des cortex individuels, "les mathématiques".

Notons au passage qu'un langage est aussi un espace virtuel persistant, massivement multi joueurs et universellement partageable.

Dès le dix-septième siècle, l'espace mathématique devenait massivement multi joueurs. À travers les pays et les continents, de Fermat à Franklin, tous réussirent à se convaincre qu'ils avaient les mêmes visions et vivaient les mêmes émotions réputées abstraites.

Un paysage ambigu

Le mathématicien vit une ambiguïté quotidienne entre un univers de rêves et de sentiments partagés et le truchement d'un arsenal de symboles pour l'exprimer et en assurer la persistance. L'enseignant est un "évangéliste" contemporain, il est l'acteur le plus exposé et son action est essentielle : il est sur le front, au contact des élèves, pour leur apprendre à pénétrer, éprouver et explorer l'univers virtuel des mathématiques.

Dans cette démarche, Hans Freudenthal est un pionnier exceptionnel qui va plus loin encore. Il a bâti et développé LINCOS, "Langage pour rencontres cosmiques", conçu pour que des extraterrestres, quelle que soit leur civilisation, à la seule lecture de son ouvrage, puissent partager nos mathématiques.

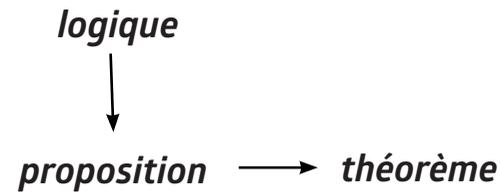
Songes charnels de mathématiques

Dans sa Clé des Songes, écrite après sa sortie des mathématiques, Alexandre Grothendieck nous amène à Freud :

"La pulsion de connaissance dans mon travail de mathématicien était

de la même nature que la pulsion amoureuse. Les paroles et les images qui me venaient spontanément, voulant évoquer la pulsion de découverte dans son essence, étaient paroles et images de l'amour charnel que me soufflait Éros."

On est fondé à rechercher sous quelle forme se manifeste cet amour charnel ... et le couple central qui nous tend les bras est la dualité théorème / logique. L'un expose et affirme du contenu, l'autre le fonde et le féconde.



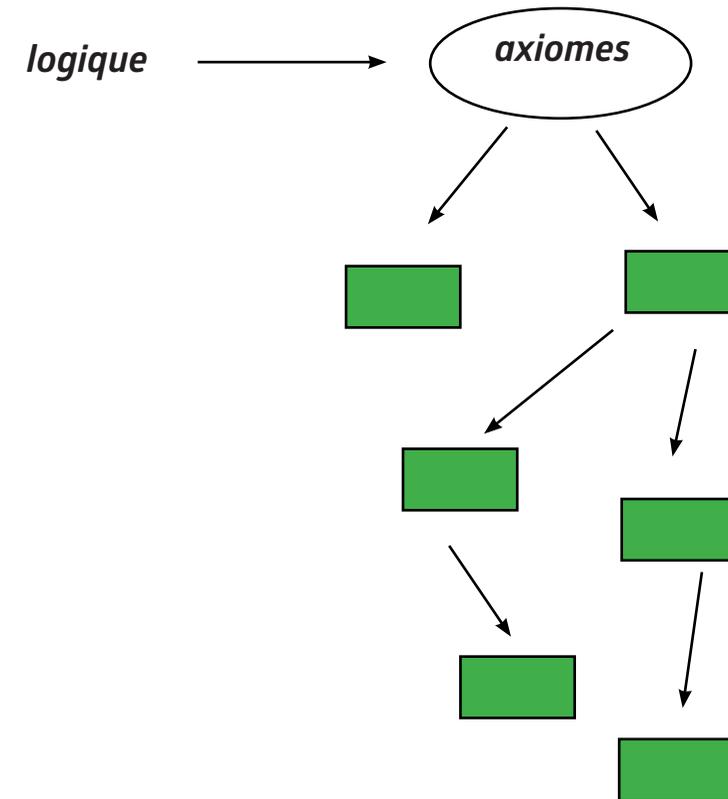
Le schéma **matrice de gestation - fécondation logique - théorème valide**, est la dynamique fondamentale de structuration des mathématiques. L'histoire de la découverte de la droite d'Euler est exemplaire. Leonhard Euler griffonne un triangle sur lequel il trace les hauteurs, les médiatrices et les bissectrices des angles. Regardant les points de rencontre des hauteurs, des médiatrices et des bissectrices, il croit remarquer que les trois points sont alignés.

Pressentant un théorème, il griffonne un autre triangle de forme très différente et remarque que les trois points semblent encore alignés. Pressentant une propriété vraie pour tous les triangles, il entreprend de bâtir une démonstration et y parvient d'une manière qui le satisfait. Il diffuse sa démonstration par lettre auprès de quelques amis. À la lecture de la lettre d'Euler, tous éprouvent le même sentiment de satisfaction et renvoient la validation de sa démonstration. Euler a "démontré" un nouveau théorème : l'alignement des trois points sur la "droite d'Euler", qui est ajouté officiellement à l'univers des mathématiques.

Le ruissellement axiomatique

Le couple **proposition - démonstration logique** paraissant productif, l'idée est venue à des mathématiciens d'aller plus loin et d'installer ce schéma comme production automatique de mathématiques. On pouvait

s'attendre à ce qu'il en découle un ruissellement de propositions accompagnées de leurs émotions de vérité. Giuseppe Peano entreprit ainsi à la fin du dix-neuvième siècle, de rebâtir l'arithmétique. Pour l'occasion, il remit en usage le vieux concept d'axiome, proposition qu'on ne démontre pas. Euclide l'avait introduit et nommé en renonçant à prouver logiquement qu'une seule parallèle à une droite donnée passe par un point. De l'extérieur semblable en tout point à un théorème, mais intrinséquement différent puisqu'indémontrable, l'axiome resta emblématique du fondement d'une théorie mathématique.

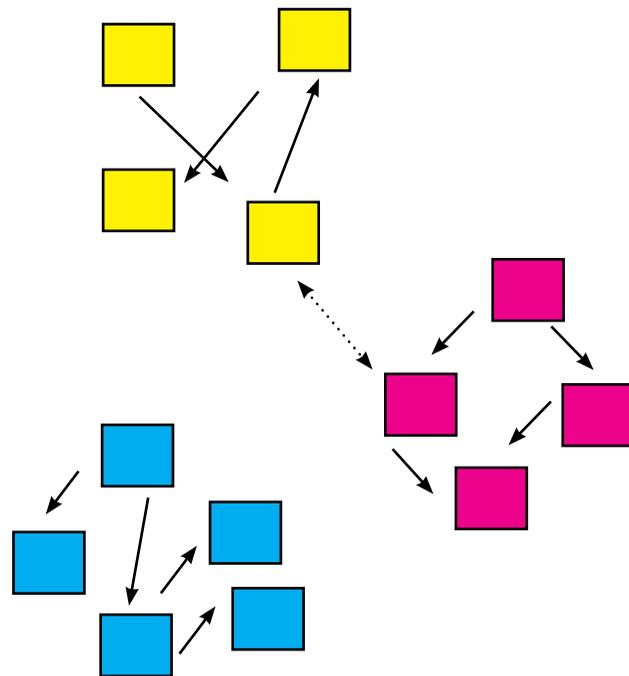


Peano appela donc axiomes cinq propositions qu'il jugea a priori fertiles et que la logique devait féconder pour engendrer et récolter une arithmétique à la fois mieux organisée et plus riche. Cette culture axiomatique se révéla largement stérile : la production attendue de nouveaux résultats fut décevante. Cela ne découragea pas pour autant certains mathématiciens

du vingtième siècle, plus fascinés par la logique de la structure générale que par l'expansion et la richesse des contenus.

Récoltes, semailles et écologie

C'est l'occasion d'observer que Grothendieck a titré son livre, écrit après sa sortie des mathématiques, "Récoltes et Semailles" et non "Semailles et Récoltes" et de se souvenir que le Collège de France l'a finalement exclu pour un trop grand intérêt pour l'écologie, dépassant les pures mathématiques qu'on attendait de lui. Or un écologiste engagé n'est pas un cultivateur conventionnel qui achète des semences, les sème et en récolte le produit. Au contraire, il explore la nature, récolte les semences des plantes qui attirent son attention, puis les sème pour développer sa culture. On retrouve la démarche d'Euler, explorant l'univers mathématique sans idée préconçue et rencontrant un objet prometteur, le récolte pour mieux le cultiver dans un environnement logique protégé, jusqu'à ce qu'il fleurisse et devienne un objet mathématique fructueux.

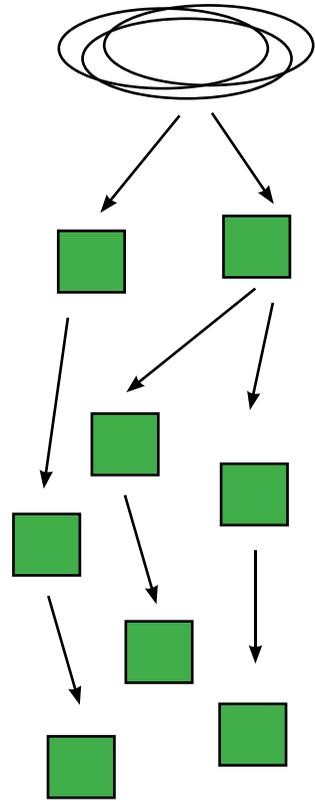


On aboutit ainsi, à côté d'une axiomatique structurée mais peu productive, à une écologie foisonnante de rêves mathématiques. La logique n'est plus dévolue à un rôle de béton, devant garantir une pyramide de vérités absolues. Elle n'intervient qu'ensuite, par surcroît, quand des rêves séduisants ont pris formes et demandent à être validés pour être en harmonie avec leurs semblables. Le schéma idéal devient : "**récolte - culture - intégration dans le rêve mathématique local**". Du coup, les "topos" emblématiques de Grothendieck interviennent naturellement. Il ne s'agit plus d'une logique universelle et carcérale, dictant sa puissance sur la totalité de l'univers, mais au contraire de logiques locales, d'"états de vérité", assurant la cohésion de régions, organisées chacune autour d'une posture particulière de mathématiciens. La posture de l'algébriste, par exemple, n'est pas celle du géomètre. Et pourtant, l'univers mathématique est si potentiellement riche qu'il ne se laisse pas enfermer. Au contraire, des postures au départ éloignées peuvent s'hybrider. Géométrie et algèbre peuvent développer la géométrie algébrique.

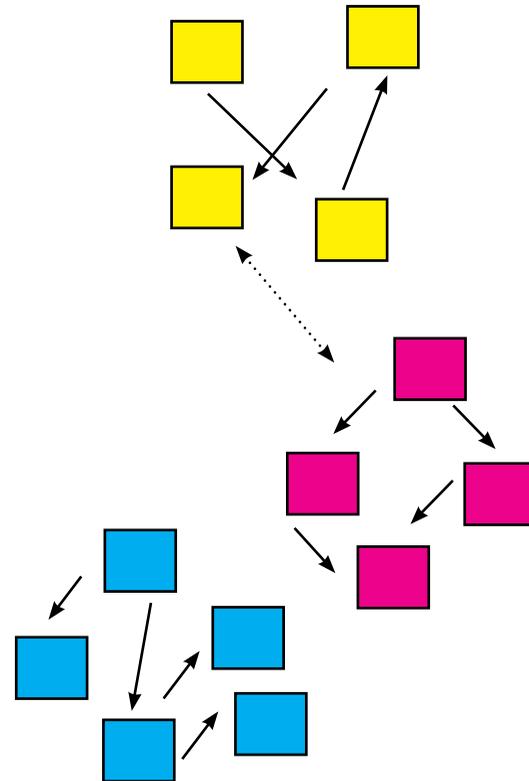
Aride rigueur ou foisonnante écologie ?

Du mode d'existence des sentiments mathématiques : les postures coexistent, rêves d'axiomatiques rigoureuses et rêves écologiques.

Rêves axiomatiques



Rêves écologiques



Certains mathématiciens, sur le modèle de certains physiciens, poursuivent le rêve d'un modèle unitaire des mathématiques, où une structure générale unifiée rendrait compte de tout l'univers. D'autres explorent au contraire sans vergogne les domaines qui les séduisent ; dans des directions ou à des niveaux hétéroclites, ils s'aventurent dans les fractales, les catastrophes ou les catégories.

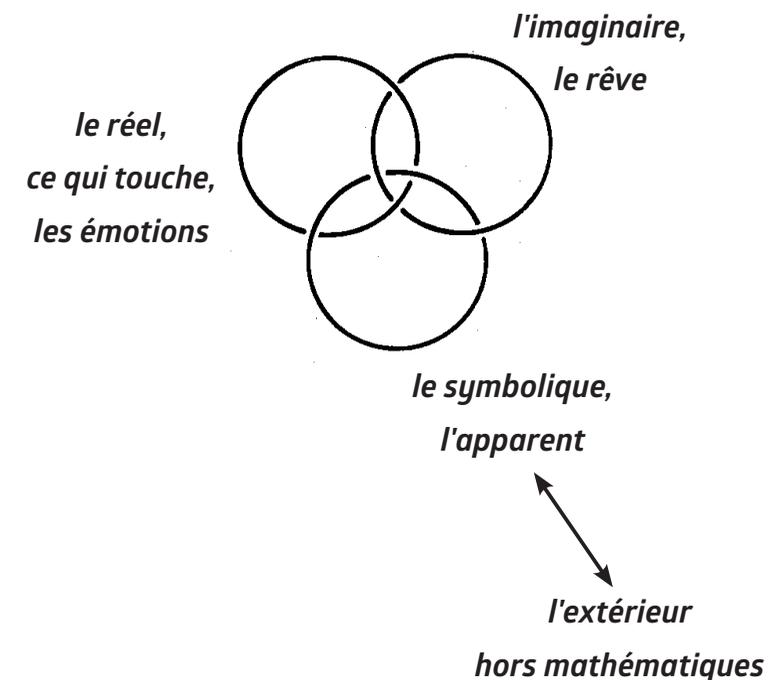
Rêve symptôme ou rêve aventure ?

Le traitement complet du rêve exige de mentionner deux auteurs aux attitudes opposées.

- Sigmund Freud, avec « Le Rêve et son Interprétation », pose le rêve comme symptôme clinique à exploiter pour traiter de l'équilibre ou de la santé mentale du rêveur.
- Hervé de Saint-Denis, avec « Les Rêves et les Moyens de les Diriger », pose au contraire le rêve comme phénomène principal, à explorer en tant que tel et pour lui-même.

Grothendieck, pour être clairement conscient de ses pulsions freudiennes, ne suit pas Freud sur le chemin de la thérapie. Il suit plutôt ses rêves comme des ouvertures sur les richesses du Rêveur qui est en lui.

Un univers massivement boroméen



Le classique schéma boroméen de Jacques Lacan aide à situer les trois éléments de l'univers des mathématiques. Il est possible de poser dans ce domaine les trois cercles du réel, de l'imaginaire et du symbolique constituant une communauté où les cercles ne se coupent pas mais sont à la fois inséparables et assemblés de telle sorte que chacun d'eux lie et délie les deux autres.

- **le réel** est ce qu'on peut toucher, ici : ce qui touche, les émotions
- **l'imaginaire** est le rêve, le contenu proprement mathématique du rêve universel massivement partagé
- **le symbolique** est le langage des symboles, à la fois l'apparence naïve de l'univers virtuel mathématique et sa communication avec l'extérieur.

La distinction cantorienne entre le dénombrable et le continu éclaire l'écart entre le symbolique d'une part et le réel et l'imaginaire mathématiques d'autre part. Le symbolique, littéralement cantonné aux alignements de symboles, ne va jamais au-delà du dénombrable tandis que le rêve mathématique et ses émotions évoluent dans le continu.

Le régicide et l'anarchiste

Galois était républicain sous un régime royaliste du dix-neuvième siècle, époque où la république évoquait fortement la mort du roi à la guillotine. Il est sorti d'une situation qu'il ne pouvait gérer, comme son père, par la mort.

Grothendieck se vivait comme héritier de son père anarchiste, donc pour l'éradication du pouvoir paternaliste pyramidal. Il est sorti des mathématiques par la nature et l'écologie.

Tous les deux ont été profondément marqués par leur passage en univers mathématique, comme, après Galois, Georg Cantor dont la santé mentale n'a pas résisté, comme Alan Turing qui a payé de sa vie ou comme Kurt Gödel dont le rêve était peuplé de démons.

Il reste à établir un statut sain du rêve mathématique. Cela implique une critique résolue de la façade strictement logique des mathématiques, qui s'efforce de les présenter comme une construction entièrement rigoureuse, sans prise avec les émotions.

Or les émotions sont la chair même des mathématiques.

Pierre Berloquin,

Journée Évariste Galois du 28 juin 2019

Amphi Évariste Galois 45 rue d'Ulm,

Soirée Kafémath du 9 janvier 2020

La Coulée Douce, 51 rue du Sahel.