Le nombre π

Initialement π était défini comme un rapport de grandeurs :

- **1ère manip.** : Sylvie + projection ou paper board : $\pi = \dfrac{aire\ du\ cercle\ de\ rayon\ r}{aire\ du\ carré\ de\ côté\ r}$

  π est égal au rapport de l'aire d'un cercle à l'aire du carré construit sur son rayon.

- **2ème manip. (un disque de bois de diamètre 30 cm + un ruban + un mètre)**:
  Blandine + projection : $\pi = \dfrac{circonférence\ du\ cercle\ de\ diamètre\ d}{d}$

  π est le rapport de la longueur d'un cercle à son diamètre.

C'est Archimède, au 3ème siècle avant J.C. qui a prouvé que ces rapports sont indépendants du rayon du cercle considéré.
Pour les Grecs, les nombres représentaient des longueurs. Ils avaient compris, sans pouvoir le démontrer, qu'il existait des longueurs, comme la diagonale d'un carré de côté 1 (projection ou dessins paper board : d'un carré de côté 1, avec sa diagonale mesurant $\sqrt{2}$.), qui ne pouvaient être mesurées en nombres entiers dans la même unité. Ces longueurs sont des nombres irrationnels.

Au 17 ème siècle, les rapports des grandeurs acquirent le statut de nombres. π devint un nombre supposé irrationnel, non encore prouvé.

La notation π apparaît pour la première fois en 1663 dans le livre d'un auteur anglais. Elle doit être comprise comme la première lettre du mot grec : peripheria.

L'irrationnalité de π fut prouvée en 1761 par un Suisse.

La question de la transcendance de π se posa, puis fut démontrée par le mathématicien allemand Lindemann en 1884.
Qu'est ce qu'un nombre transcendant ?
Un nombre transcendant est un nombre réel qui n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers relatifs.
Contre exemple : $\sqrt{2}$ n'est pas transcendant car $\sqrt{2}$ est solution de l'équation $x^2 = 2$

π est irrationnel et transcendant. Mais cela ne suffit pas à connaître sa nature !

On s'intéresse notamment depuis le 20ème siècle à la distribution statistique de ses décimales. π n'étant pas rationnel, son développement décimale n'est pas périodique, mais aurait-il une particularité ? Jusqu'à présent, on n'a trouvé aucune particularité. La suite de ses décimales sont elles des chiffres pris au hasard ? Ce type de question oblige à s'interroger sur la notion de hasard !

Encore actuellement, on se pose la question de savoir si π est un nombre normal.
Qu'est ce qu'un nombre normal ?
La notion de nombre normal a été définie par le mathématicien français Borel en 1909. En bref, un nombre est normal si ses décimales sont des chiffres entre 0 et 9 équiréparties.

Avec l'apparition des ordinateurs, une chasse aux décimales de π est lancée. « Tous les jours » une nouvelle décimale est trouvée !
Le calcul des valeurs approchées de π remonte à des temps très anciens.

La première trace d'estimation de π remonte à la civilisation babylonienne. Sur une tablette datant d'environ 4000 ans avant J.C. on a trouvé l'estimation : $3+\frac{1}{8}=3{,}125$.

Sur le célèbre papyrus Rhind, datant de 1650 avant J.C. le scribe égyptien indique $\frac{16}{9}$ comme estimation de π.

Les Babyloniens et les Égyptiens avaient des préoccupations pratiques : aire d'une parcelle agraire, volume d'un silo à grains. Les Grecs commencent à avoir un souci de rigueur mathématique. Une démonstration par Archimède utilise des approximations du cercle par des polygones réguliers inscrits ou circonscrits au cercle. L'estimation $\frac{22}{7}$ de π est apparue.
De nombreuses estimations par des méthodes géométriques ont été établies de par le monde.

Puis des méthodes analytiques ont été utilisées, le nombre π n'étant plus directement lié avec le cercle, prend un plein statut de nombre.
Ces méthodes utilisent des expressions de π sous forme de produit ou de somme infini de termes.
En 1579, Viète mathématicien français (le premier mathématicien a noté par des symboles les éléments d'une équation) a établi :

$$\pi = 2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\ldots$$

En 1655, Wallis mathématicien anglais, grâce à des méthodes arithmetico-géométriques, a établi :

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times2}{1\times3}\times\frac{4\times4}{3\times5}\times\ldots\times\frac{2n\times2n}{(2n-1)\times(2n-1)}\times\ldots$$

Projections des 3 formules
En 1579, Viète mathématicien français (le premier mathématicien a noté par des symboles les éléments d'une équation) a établi :

$$\pi = 2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\ldots$$

En 1655, Wallis mathématicien anglais, grâce à des méthodes arithmético-géométriques, a établi :

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\ldots\times\frac{2n\times 2n}{(2n-1)\times(2n-1)}\times\ldots$$

En 1735, Euler a établi :

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

Amusons nous un peu !

Projections ou dessins paper board : Rébus pi
Hippie Pigé Pierre Plié Pissenlit Picollé

Projections ou dessins paper board : pi animaux
Un cheval pi Un pi veau Un python