



e puissance i fois π
plus 1 égale 0

Hervé Stève
Du KaféMath
07/02/2015
Péniche OPERA



La plus belle des égalités...

Les acteurs ... principaux

e l'exponentielle

i l'imaginaire

π le périmètre

1 l'unité

0 le zéro

Les opérateurs

^ la puissance

x la multiplication

+ l'addition

= l'égalité



Les entiers

- 1 est le premier, l'unité de temps, de lieu et d'action ...
- n entier : $n + 1 =$ l'entier suivant
... jusqu'à l'infini ∞
- $n - 1 =$ l'entier précédent
... jusqu'à zéro 0 puis -1, -2, ... $-\infty$
- $n + n + n + \dots + n$ (p fois) = $n \times p = m$
- $m = n \times p$ ou bien $m : p = m / p = n$
- $n \times n \times n \times \dots \times n$ (p fois) = n^p (n puissance p)



L'exponentielle e

$e \approx 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 4\dots$

- Constante de Neper (John Napier 1618)

Logarithme népérien : $\ln(e)=1= e^{\ln(1)}$

- devinette : au Kafémath, Mr Logarithme et Mlle Exponentielle prennent un café. Mais qui paie à boire ?

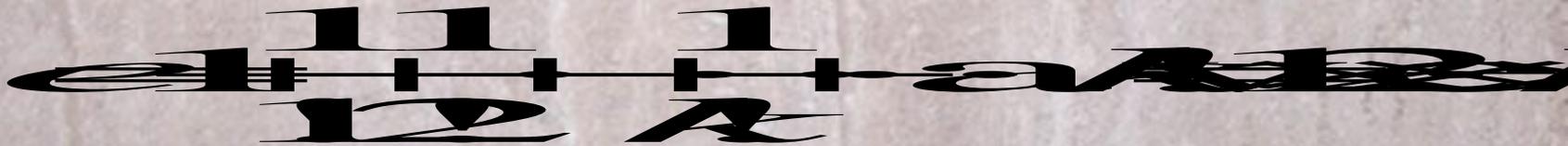
L'exponentielle parce que

Logarithme ne paie rien



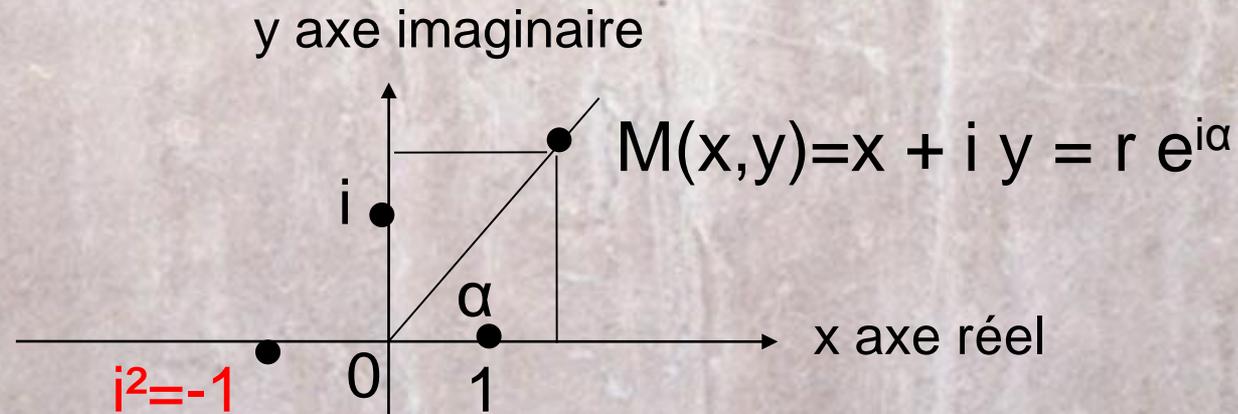
Léonard Euler

- e notation Léonard Euler (1731)





i comme imaginaire



avec x abscisse, y ordonnée du point M du plan
 r le module = distance(O, M)

α l'argument = angle(Ox, OM)

$M(0,1) = i$ module 1 argument $\pi/2$

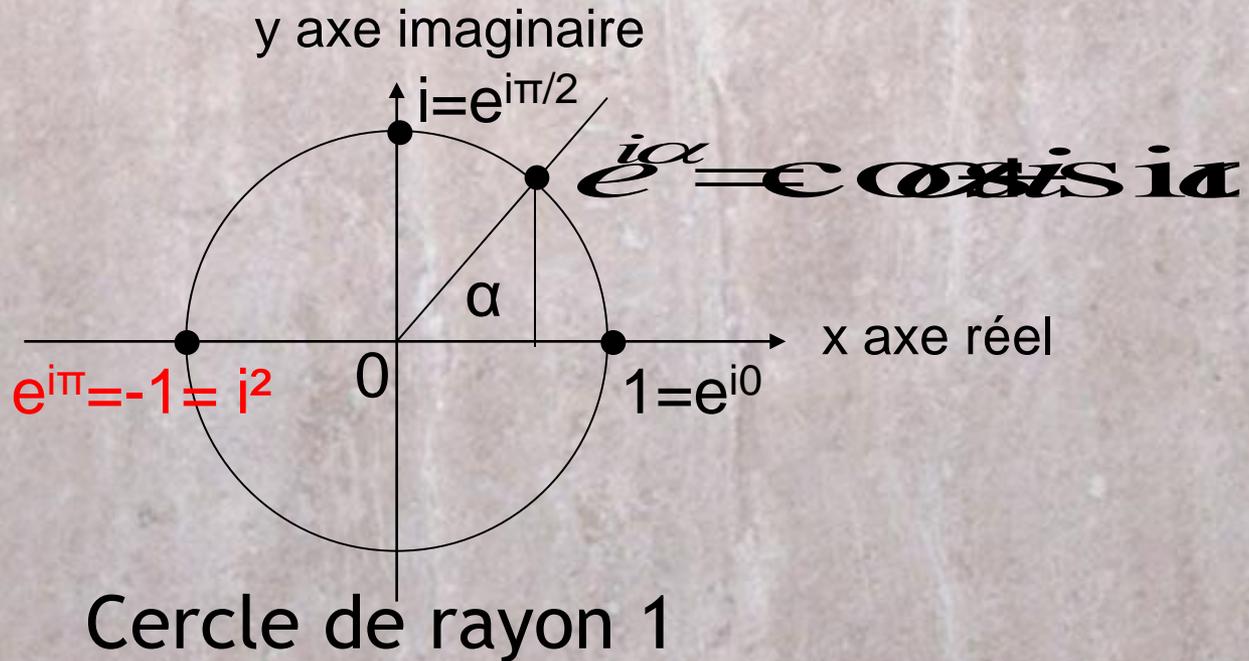
$M(-1,0) = -1 = i^2$ module 1 argument π





Identité d'Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$





Le nombre π

- Constante d'Archimède, Pi

$$\pi = C / d = \text{circonférence d'un cercle de diamètre } 1$$

$$= A / r^2 = \text{aire d'un cercle de rayon } 1$$

- Calculs ordinateurs : 13 300 milliards de décimales calculées en 208 jours en octobre 2014 (et 9 jours de vérification) !

- $$\frac{\text{cheval} \times \text{va} \times \text{ach}}{\text{oiseau} \times \text{ise} \times \text{oise}} = \pi$$





Antiquité de π

- Tablettes babyloniennes (-2000 JC) :

$$\pi \approx 3 + 7/60 + 30/3600 = 3 + 1/8 = \underline{3,125}$$

- Nombre 3 : Bible 1. Rois 7.23 (-550 JC)

"Il fit la Mer en métal fondu, de dix coudées de bord à bord, à pourtour circulaire de 5 coudées de hauteur ; un fil de 30 coudées en mesurait le tour"

- Ptolémée (+150 JC) :

$$\pi = 3 + 8/60 + \cancel{30/3600} \approx \underline{3,1416666...}$$

'trois castors cent sans chaise'



Mémorisation de Pi

*Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste, ingénieur
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages ...*

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

8 9 7 9

3 2 3 8 4 6 2 6

4 3 3 8 3 2 7 9 ...



Transcendance de π

- Ferdinand von Lindemann (1882) généralise Hermite (transcendance de e) : *si x est algébrique non nul alors e^x est transcendant* → beaucoup de transcendants !

Contraposée : si e^x est non transcendant alors x est non algébrique

Identité d'Euler : $e^{i\pi} = -1$ est entier donc $x = i\pi$ est non algébrique et π est transcendant

→ **non quadrature du cercle**

