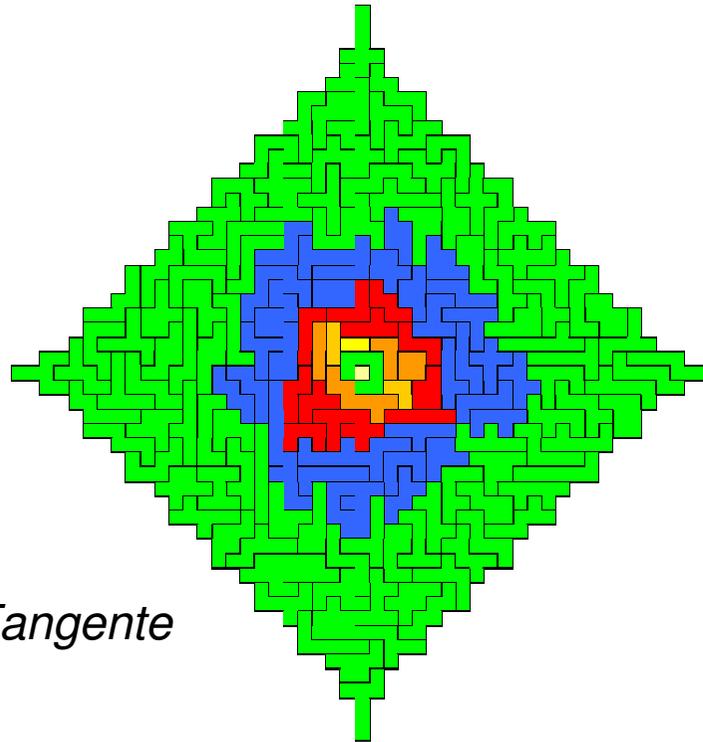


# Dans l'enfer des polyminos



Édouard Thomas  
Secrétaire de rédaction à *Tangente*



Kafemath  
Gathering For Gardner

La Commune Libre d'Aligre  
Lundi 21 octobre 2013



L'enfer est pavé de bonnes intentions.  
Il est aussi sans doute pavé de polyminos,  
mais on ne peut pas le prouver !

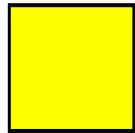
**Les polyminos posent de nombreux problèmes redoutables.** Sous l'apparence de jeux obsédants se trouve une invitation à explorer le monde extraordinaire des mathématiques.

Dès le début, Martin Gardner en parlait dans ses chroniques. Ainsi, des progrès ont été réalisés... souvent par des amateurs !

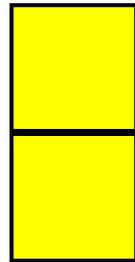
# Polymino

- Assemblage (connexe) de carrés unitaires
- On dit aussi « polyomino »
- Un domino est un polymino constitué de deux carrés unitaires
- Exemple : les motifs dans Tetris !
- Étude systématique par Solomon Golomb (à partir de **1952** avec *Polyominoes*)
- Diffusés par Martin Gardner **dès 1954** dans sa rubrique *Mathematical Games*

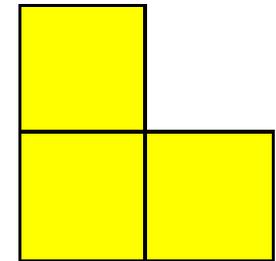
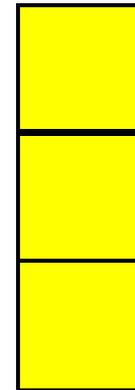
# Du monomino aux tétrominos



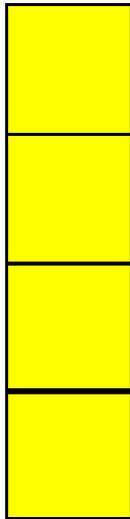
1 MONOMINO



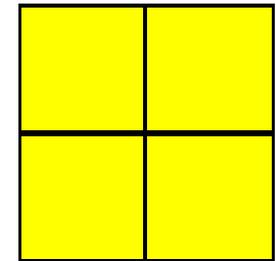
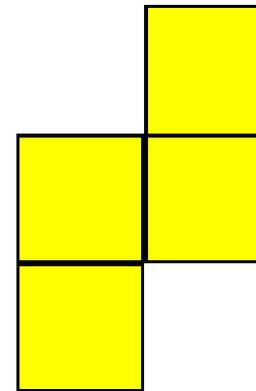
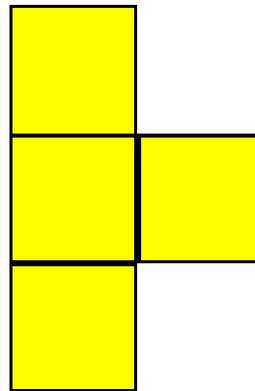
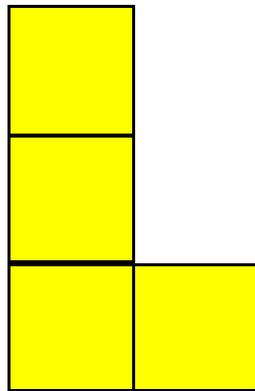
1 DOMINO



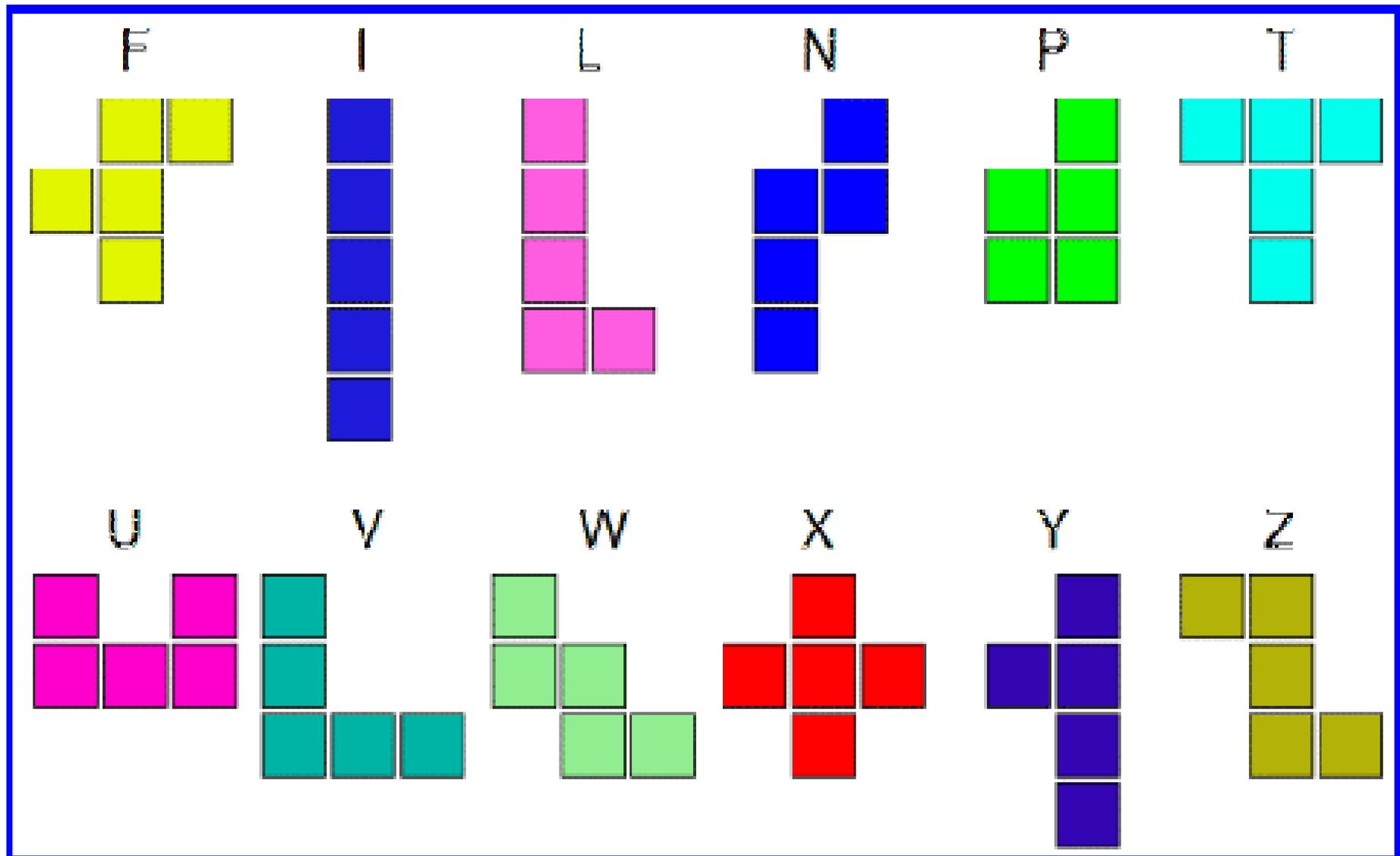
2 TROMINOS



5 TÉTROMINOS



# Les 12 pentaminos



# Une première question

**Combien existe-t-il de polyminos constitués de  $n$  carrés unitaires ?**

- On note  $A_n$  ce nombre
- Croissance exponentielle de  $A_n$
- $3,98 \leq \lim (A_n)^{1/n} \leq 4,65$  (la limite existe)
- Application en physique (transition de phase dans le modèle d'Ising)

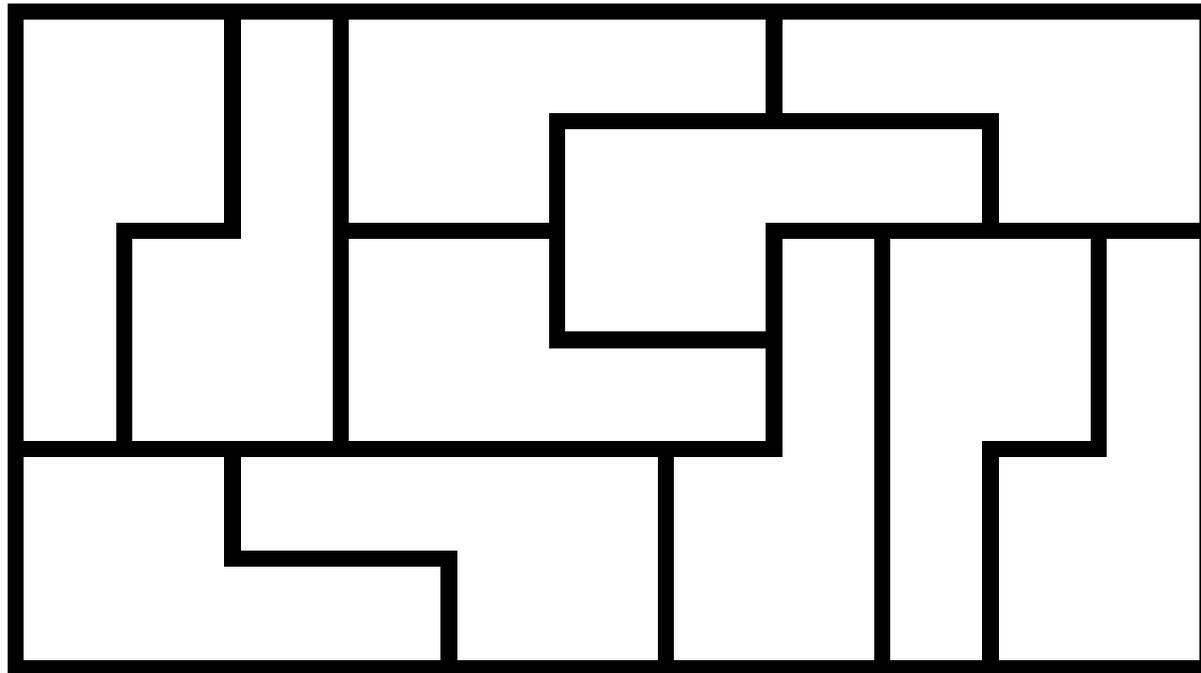
# Paver un rectangle

- Paver un rectangle avec un carré unitaire (ou avec un rectangle adéquat) : facile !
- Question très difficile par contre avec un nombre **impair** d'exemplaires d'un polymino **non rectangulaire** (c'est facile si on autorise un nombre pair)
- S'il existe, le plus petit nombre (impair) de polyminos qui convient est l'*ordre impair* du polymino

# Les ordres impairs connus

- Il existe des polyminos d'ordre impair 1 (le rectangle lui-même !), 11,  $15 + 6m$ , 35, 49 et 221
- Il n'existe pas de polymino d'ordre impair 3 (Ian Stewart et Albert Wormstein, 1992)
- Cette liste est-elle complète ?
- En particulier, existe-t-il un polymino d'ordre impair 5, d'ordre impair 7 ou d'ordre impair 9 ?

# Le polymino de Klarner



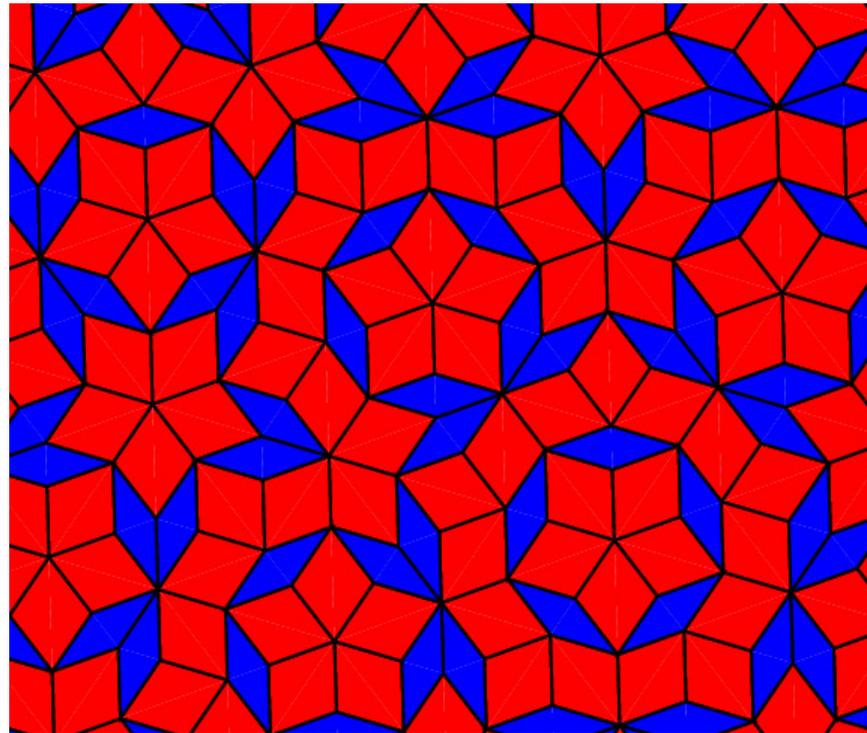
Cet hexamino est d'ordre impair 11  
(David Klarner, 1969)

# Toujours le rectangle

- De combien de manières peut-on découper un rectangle de  $k$  cases par  $2k$  cases en deux parties congruentes ?
- Un ensemble donné de polyminos peut-il paver un rectangle (ou le plan) ? Problème indécidable, même restreint à un ensemble de cinq polyminos (Robert Berger, 1966, et Raphael Robinson, 1971)

# Les pavages apériodiques

Existe-t-il un polymino qui permette de paver le plan de manière apériodique (et uniquement de manière apériodique) ?



Pavage apériodique de Penrose, avec deux motifs différents (et qui ne sont pas des polyminos)

# Et en dimension supérieure ?

- Polymino (dans l'espace) : assemblage (connexe) de cubes unitaires par les faces
- Polymino (en toute dimension) : assemblage (connexe) d'hypercubes unitaires par leurs facettes
- Soit  $P$  un polymino dans  $\mathbb{R}^m$ . Existe-t-il toujours un entier  $n$  tel que le polymino  $P \times [0,1]^n$  pave  $\mathbb{R}^{m+n}$  ?

# Références

- *Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions: The First Scientific American Book of Puzzles and Games.* Martin Gardner, University of Chicago Press, 1988
- *Polyominoes.* Solomon Golomb, Princeton Science Library, 1996 (deuxième édition)
- Taper polyomino dans Math Overflow ([mathoverflow.net](http://mathoverflow.net))
- La page Internet de Mike Reid :  
<http://math.cos.ucf.edu/~reid/Polyomino/index.html>
- Pour jouer à paver des rectangles avec des polyminos :  
<http://gfredericks.com/sandbox/polyominoes>