

Marcher sur le fil ?

François Dubois¹

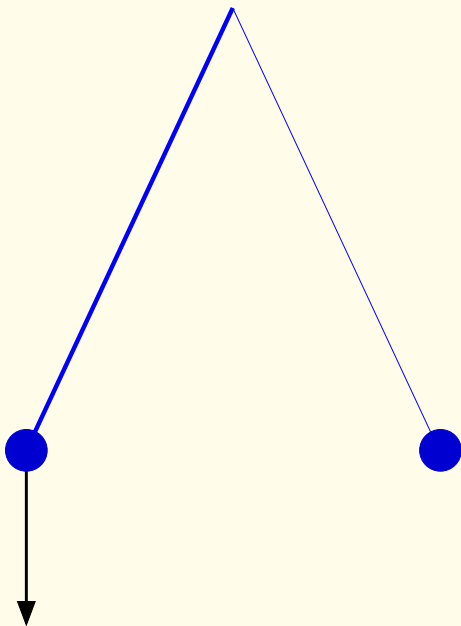
Kafemath au “Moulin à Café”

27 octobre 2012

pendule simple
contrôle du pendule inversé

¹ co-animateur du “Kafemath”, café mathématique à Paris

Pendule simple



Pendule de Foucault à Chicago (août 2011)

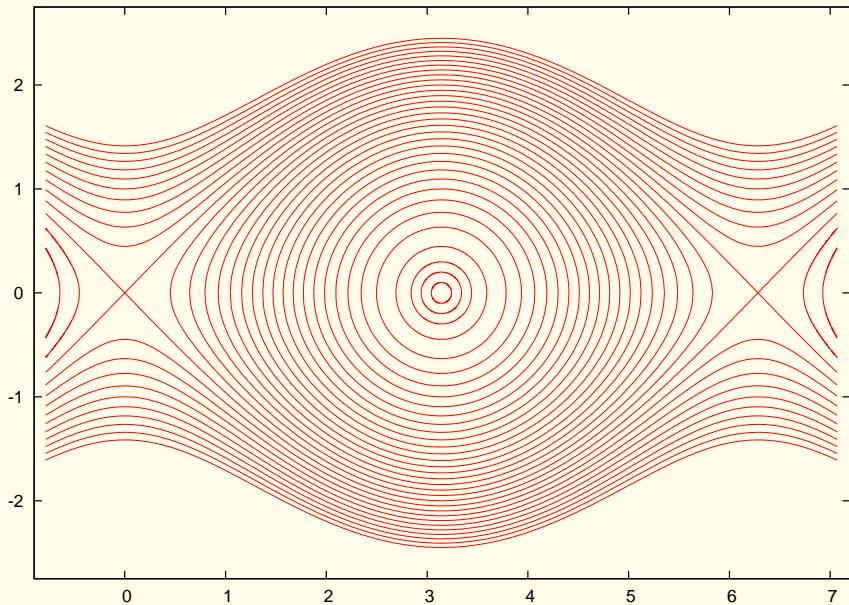
Foucault Pendulum

Once started each morning, the Foucault pendulum continues to swing in the same direction throughout the day. The direction of swing, however, appears to rotate clockwise by about ten degrees each hour, as is indicated by the markings on the base of the exhibit. It is the rotation of the Earth on its own axis that causes this apparent change of direction in the pendulum's path.

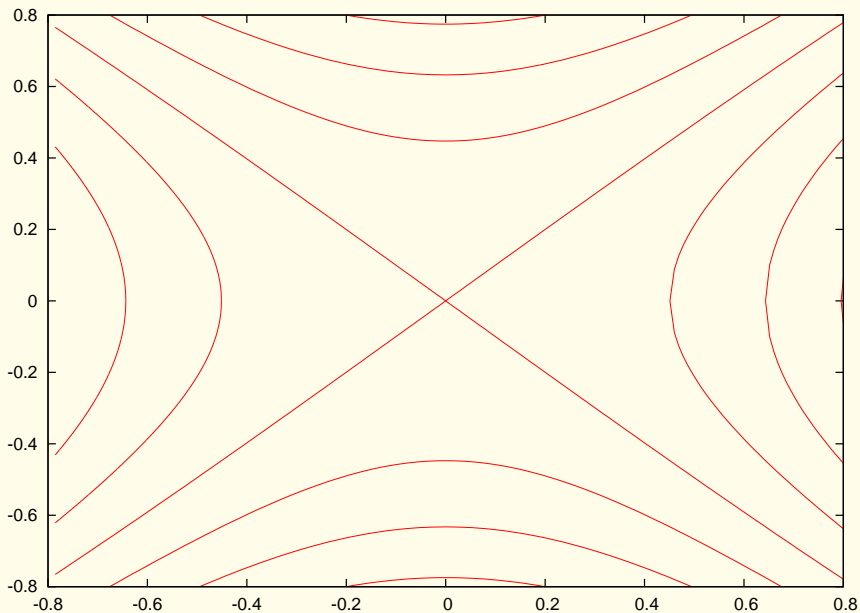
This demonstration, which proved that the earth rotates, was first performed by Jean B.L. Foucault in Paris in 1851.

Further information is given on the walls around you.

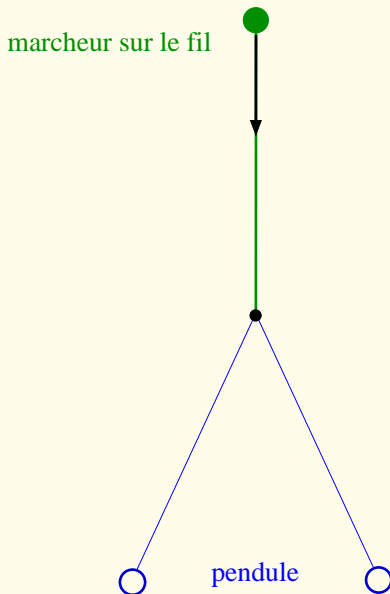
portrait de phase du pendule simple



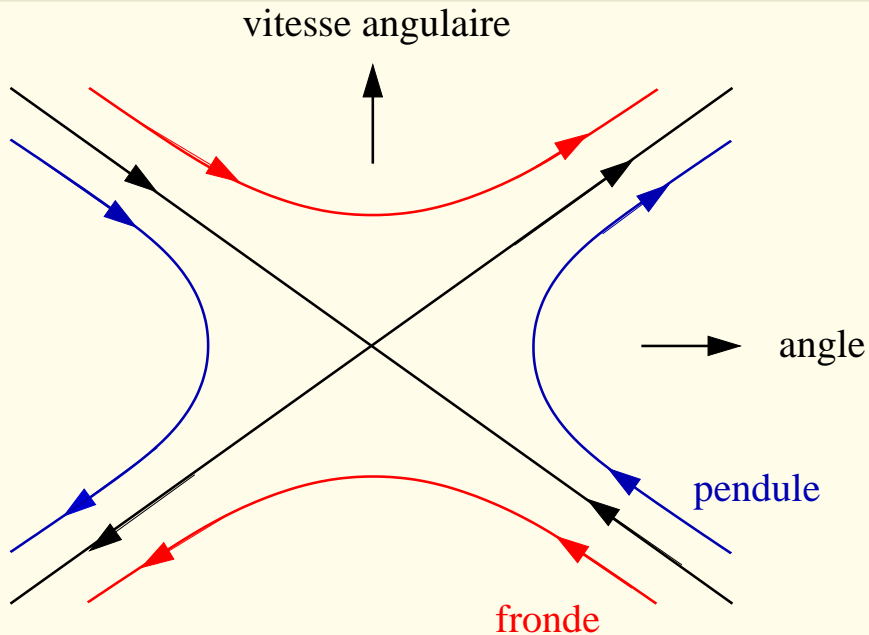
Zoom autour de l'instabilité



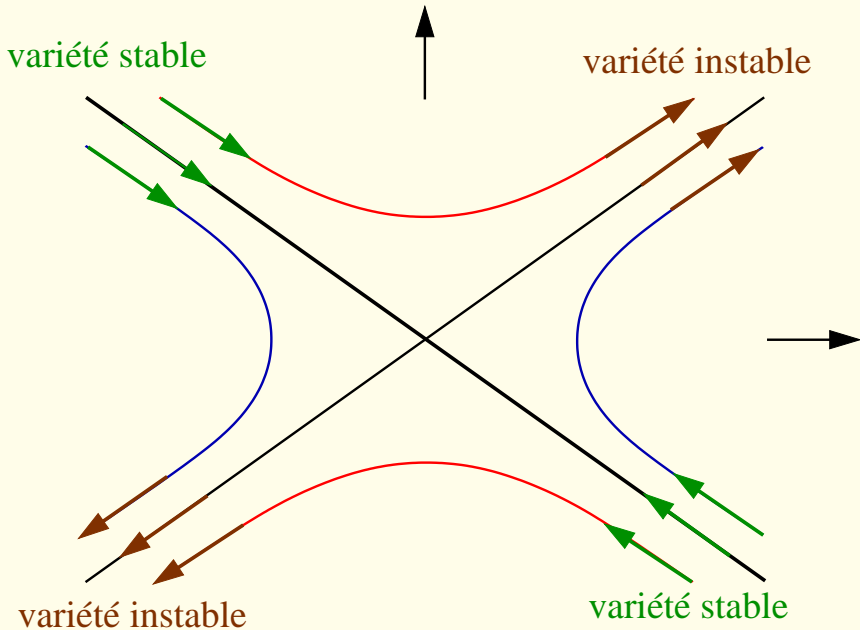
L'instabilité vue depuis le pendule



Pendule ou fronde ?



Quelle dynamique autour de l'instabilité ?



Quelle dynamique autour de l'instabilité ?

θ angle par rapport à la direction verticale
Il vaut zéro pour l'équilibre instable

Equation de la dynamique linéarisée autour de l'équilibre instable

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{T^2} \theta$$

Solution stable $\theta \simeq \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$

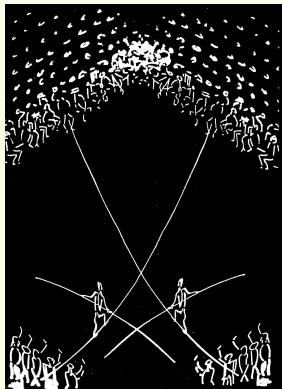
Solution instable $\theta \simeq \exp\left(\frac{t}{T}\right)$

Quelle dynamique autour de l'instabilité ?

Contrôle de la solution :

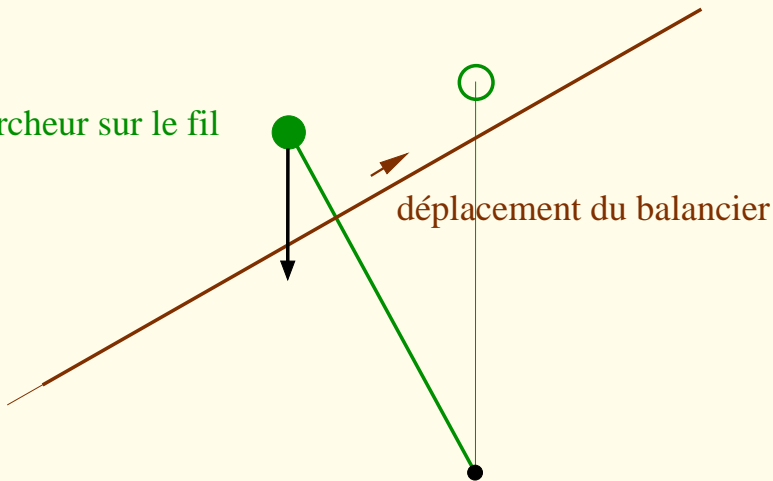
rester le plus près possible de la variété stable

Modifier le système avec un nouvel élément : le balancier



un balancier pour le contrôle de l'instabilité

marcheur sur le fil



Nouvelle dynamique avec le contrôle

θ angle par rapport à la direction verticale

φ déplacement du balancier (unités *ad hoc*)

Equation de la dynamique obtenue

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{T^2}\theta - \frac{\varphi}{\tau^2}$$

Loi de commande proportionnelle : $\varphi = \beta\theta$

Dynamique contrôlée : $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{\beta^2}{\tau^2} - \frac{1}{T^2}\right)\theta$

Système stable pour $\beta > \frac{\tau}{T}$.