

Les mystérieux carnets de Ramanujan

Édouard Thomas
Revue *Tangente*

Kafemath du jeudi 19 janvier 2012

La coulée douce
51 rue du Sahel
75012 Paris



Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

- Un mathématicien passionné
- Une destinée fulgurante
- Une intuition puissante et mystérieuse
- Des formules mathématiques inédites
- Un héritage inouï : les carnets

Qui suis-je ?

- Secrétaire de rédaction à *Tangente*
- Mathématiques à Nancy (1997–2009),
Université Henri-Poincaré
- Journalisme au CFPJ (2008–2010)
- Intérêt prononcé pour les carnets
de Ramanujan depuis 1998
- Piètre photographe pour le Kafemath...

Sommaire

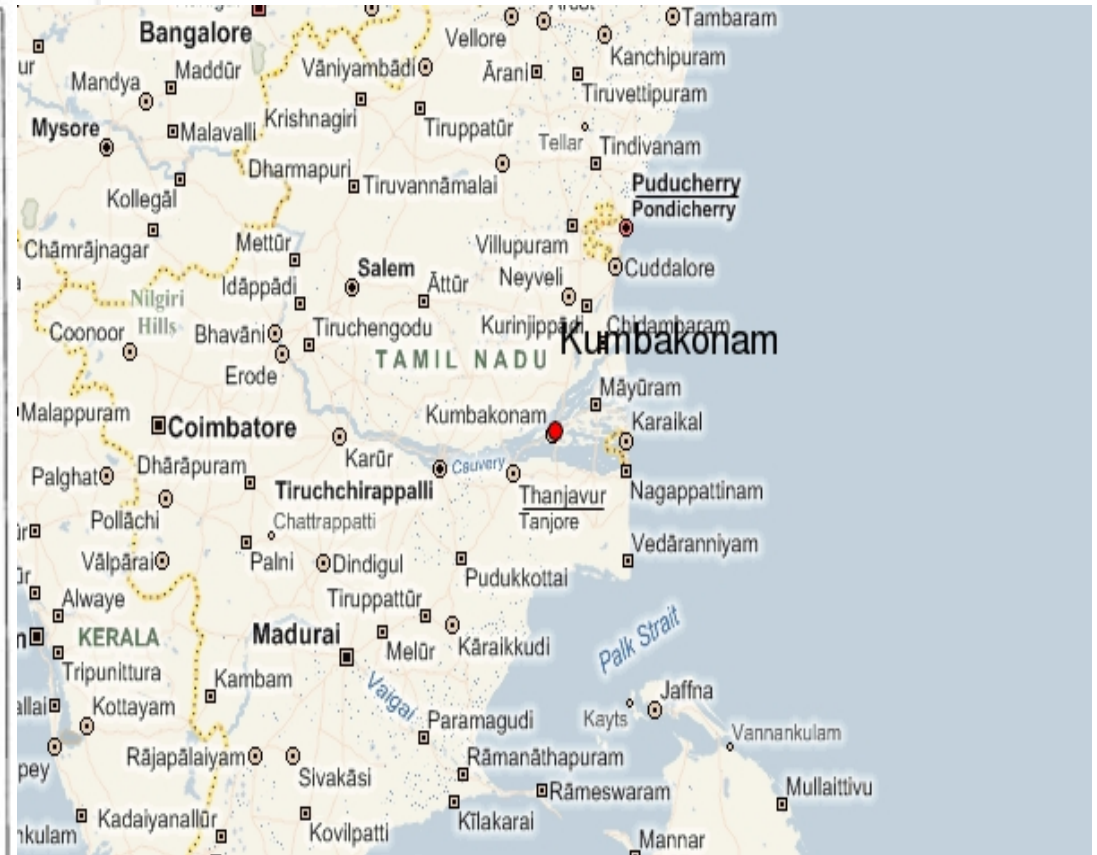
- L'Inde du Sud à la fin du XIX^e siècle
- Srinivasa Ramanujan (1887–1920)
- Cambridge, Hardy et la guerre
- Les contributions mathématiques
- Le voyage des carnets
- Un siècle d'édition
- Le « mystère Ramanujan » sur un exemple

L'Inde du Sud à la fin du XIX^e siècle

- Capitale : Madras (aujourd'hui Chennai)
- La colonisation britannique jusqu'en 1947
- Des traditions fortes (castes, religion, famille)
- La vie spirituelle encouragée (hindouisme...)
- Climat tropical
- Économie agricole et artisanale
- Train opérationnel depuis 1877

Kumbakonam

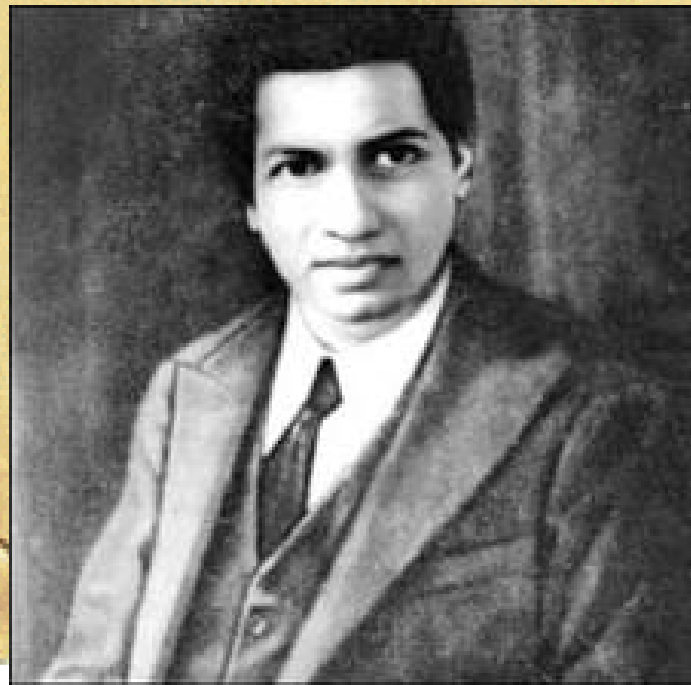
- État du Tamil Nadu, 300 km au sud de Chennai
- « Chef lieu de canton », district de Tanjore
- Ville réputée pour son tissu (saris en soie) et le travail fin des métaux (cuivre, argent...)
- 50 000 habitants en 1880, 60 000 en 1900
- Une ville de pèlerinage (plus de douze temples)
- Ville phare du brahmanisme (caste supérieure)
- Eau non potable (moustiques, éléphantiasis...)



La Kâverî est un fleuve sacré

Ramanujan

- Né à Érode le 22 décembre 1887
- Vit avec sa famille à Kumbakonam (!)
- Brahmane très observant (végétarien...)



Une enfance difficile

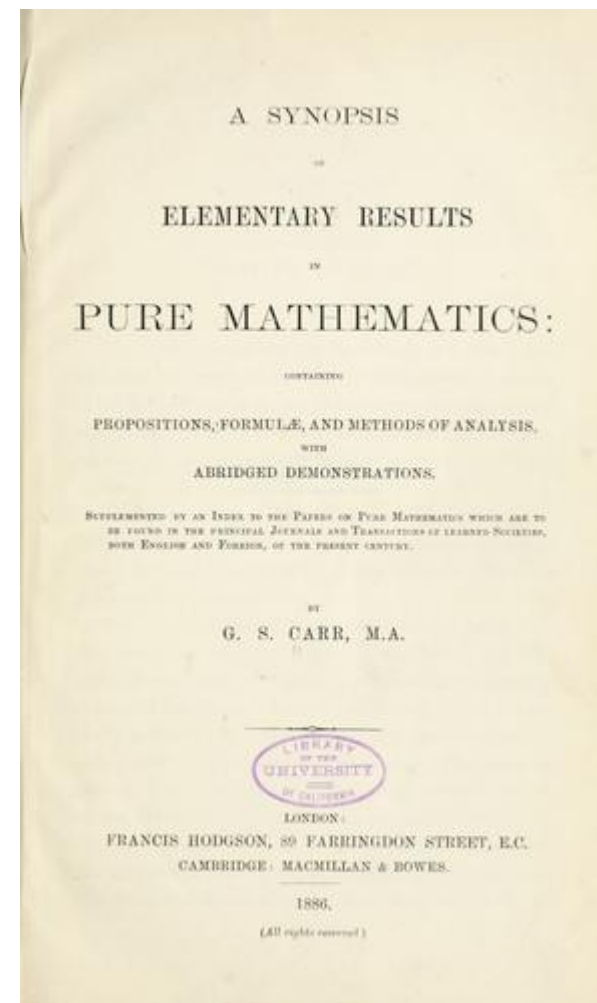
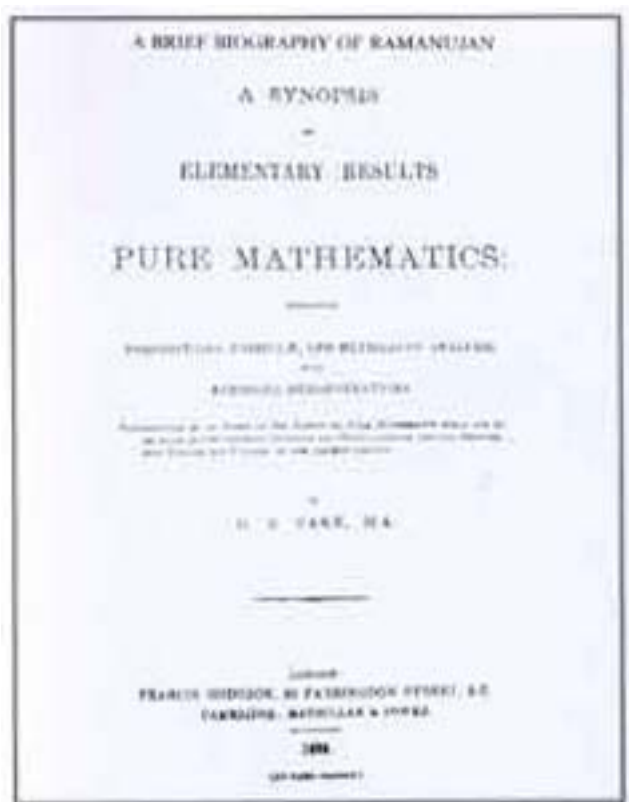
- Une famille non fortunée
- Variole et autres maladies, santé fragile
- Nombreux décès dans la famille



Scolarité

- « Primary examination » (arithmétique, tamoul, anglais, géographie) : 1^{er} du district, à 9 ans !
- À 14 ans : déjà célèbre dans l'académie pour ses capacités en mathématiques
- À 15 ans : découvre le livre de Carr
décide de se consacrer aux maths
abandon des autres matières

A synopsis of elementary results in pure mathematics, George Shoobridge Carr, 1880



Conséquences...

- Se consacre jour et nuit aux mathématiques
- Recense ses découvertes dans des carnets
- Échec à tous les examens à venir
- Perte de sa bourse d'études
- Mariage arrangé avec Janaki (9 ans) pour l'obliger à s'assumer, petits boulots
 - Tente de faire reconnaître **la valeur de son travail**

Des contacts

- Ramanujan constitue un réseau
- Problème : est-ce un génie ou un illuminé ?
- Mécénat de Ramachandra Rao (Chennai)
- Aide de l'Indian Mathematical Society
- Aide de l'université
- Travaille **intensément**
- Doit demander conseil à des experts...

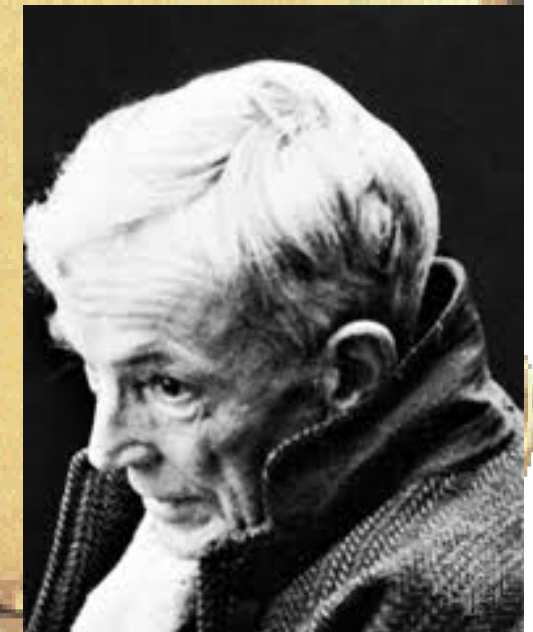
Les lettres

1912–1913

- Première lettre : Henry Frederick Baker
(48 ans, Fellow of the Royal Society)
Pas de réponse positive...
- Deuxième lettre : Ernest William Hobson
(56 ans, Fellow of the Royal Society)
Pas de réponse positive...
- Troisième lettre : **Godfrey Harold Hardy**

Godfrey Hardy (1877–1947)

- Né le 7 février 1877
- Incontestablement le plus grand scientifique britannique depuis Newton



En 1913...

- 35 ans
- 100 articles publiés depuis quinze ans
- 3 livres à son crédit
- Fellow of the Royal Society depuis 1910
- A commencé à constituer une école
- Bien installé à Cambridge et dans sa carrière
- Fin janvier 1913, il reçoit une lettre...

Quelques
formules
(notations
modernes)
contenues
dans la lettre
de Ramanujan
à Hardy,
datée du
16 janvier 1913

$$1 - \frac{3!}{(1!2!)^3}x^2 + \frac{6!}{(2!4!)^3}x^4 - \dots = \left(1 + \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \dots\right) \left(1 - \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} - \dots\right) \quad (1)$$

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi} \quad (2)$$

$$1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^4 + \dots = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{3}{2})]^2} \quad (3)$$

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^5 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^5 + \dots = \frac{2}{[\Gamma(\frac{3}{2})]^4} \quad (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{1 + \left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a+1}\right)^2} \dots dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2}) \Gamma(b+1) \Gamma(b-a + \frac{1}{2})}{\Gamma(a) \Gamma(b + \frac{1}{2}) \Gamma(b-a+1)} \quad (5)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\dots} = \frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^5+r^7+\dots)} \quad (6)$$

$$\text{Si } \alpha\beta = \pi^2, \text{ alors } \alpha^{-\frac{1}{2}} \left(1 + 4\alpha \int_0^\infty \frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right) = \beta^{-\frac{1}{2}} \left(1 + 4\beta \int_0^\infty \frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right) \quad (7)$$

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} - \frac{e^{-a^2}}{2a + \frac{1}{a + \frac{1}{2a + \frac{3}{2a + \frac{4}{2a + \dots}}}}} \quad (8)$$

$$4 \int_0^\infty \frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x} dx = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \frac{4^2}{1 + \dots}}}}} \quad (9)$$

$$\text{Si } u = \frac{x}{1 + \frac{x^5}{x^{10}}} \text{ et } v = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{x}{x^2}}, \text{ alors } v^5 = u \frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4} \quad (10)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \dots}}} = \left[\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right] e^{\frac{2}{5}\pi} \quad (11)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \dots}}} = \left[\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right] e^{\frac{2}{5}\pi} \quad (12)$$

L'invitation

- Hardy invite Ramanujan à Cambridge
- Le 17 mars 1914, le prodige embarque
- Il cesse de consigner ses découvertes dans des carnets
- À peine Ramanujan arrivé, la Grande Guerre éclate (4 août 1914)

Ramanujan à Cambridge

- De nombreux problèmes :
Le climat, le régime alimentaire, les vêtements, l'ostracisme, la solitude, une autre culture
- Accentués par la guerre :
Le rationnement, l'explosion des prix, les pénuries, des mathématiciens mobilisés
- L'université de Cambridge :
Hôpital et camp d'entraînement, pas de lumière la nuit, coupures d'électricité

La maladie

- Un séjour qui se prolonge
- Tensions entre sa femme et sa mère
- Privations, travail intense, vie rude, guerre

La maladie (amibiase hépatique)

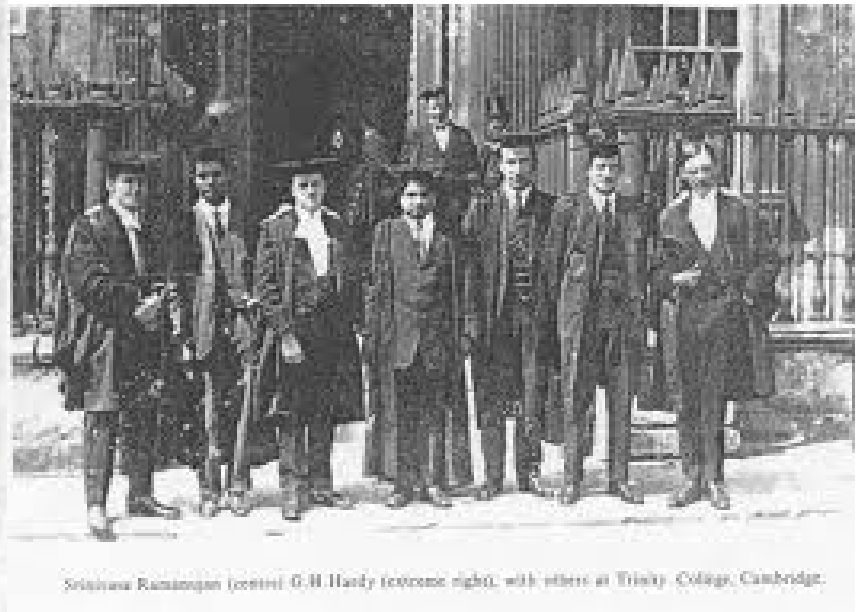
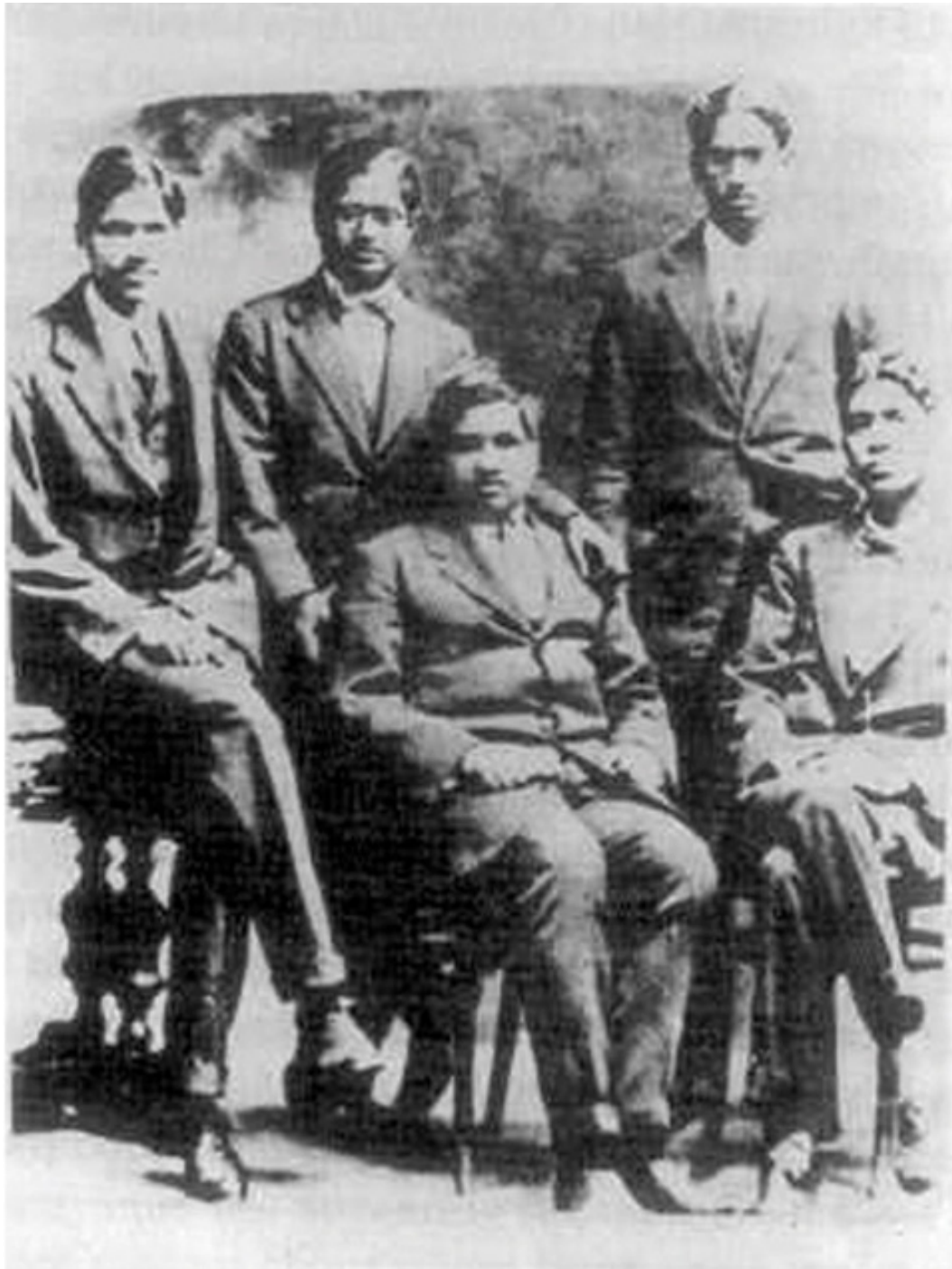
Terrible souffrance physique

Diagnostics erronés (tuberculose...)

Aucun traitement ne semble efficace

Retour en Inde

- 1917–1918 : sanatoriums
- 1917 : Fellow of the London Mathematical Society
- 1918 : Fellow of the Royal Society (30 ans !)
Fellow of Trinity College, Cambridge
retrouve de l'énergie pour ses recherches
- 1919 : retour en Inde, période heureuse avec Janaki
la maladie empire
- 1920 : ultimes contributions mathématiques
décès le 26 avril 1920 (32 ans)



Srinivasa Ramanujan (centre), G.H. Hardy (extreme right), with others at Trinity College, Cambridge.

Les contributions mathématiques

De nombreux domaines abordés :

séries (séries hypergéométriques, séries de Dirichlet, q -séries, séries de Lambert, séries d'Eisenstein, séries bilatérales), **fonctions spéciales** (fonctions thêta, fausses fonctions thêta, fonctions thêta déguisées, fonctions elliptiques), **analyse combinatoire** (nombres de Bernoulli, transformations, identités remarquables, invariants de classe, équations modulaires, modules singuliers), **théorie des nombres** (fonctions arithmétiques, fractions continues et réduites), **analyse** (produits infinis, calcul intégral, développements asymptotiques, formules d'inversion, produit de Hadamard), géométrie...

Points d'orgue

- Une théorie des séries divergentes
- Une théorie des fonctions elliptiques en bases alternatives
- La fraction continue de Rogers–Ramanujan
- De nouvelles formules pour approximer π
- Travaux sur la fonction tau
- **La théorie des partitions**

Partitions

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

On écrit : $p(4) = 5$.

On calcule que $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3 \dots$

$p(7) = 15$, $p(100) = 190\,569\,292 \dots$

Question :

quelles sont les propriétés
de la fonction p ?

Un exemple

- 50,12 % des $p(n)$ inférieurs à 200 000 sont pairs, et 50,04 % des $p(n)$ inférieurs à 10^6

La proportion des nombres pairs est-elle $\frac{1}{2}$?

- 33,1 % des $p(n)$ inférieurs à 3 200 sont multiples de 3. La proportion est-elle $\frac{1}{3}$?
- 34,6 % des $p(n)$ inférieurs à 2 000 sont multiples de 5...
- **Quelle est la distribution des valeurs $p(n)$?**
- Pas le moindre angle d'attaque...

Des réponses

- $p(5k + 4)$ est un multiple de 5
- $p(7k + 5)$ est un multiple de 7
- $p(11k + 6)$ est un multiple de 11

- $$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

- Vers une formule *exacte* (Rademacher, 1943)

Publications

- Une vingtaine d'articles en Europe
- Une vingtaine de notes
- Une abondante correspondance (Hardy...)
- 3 rapports trimestriels (université de Chennai)
formules d'interpolation, théorème maître de Ramanujan
- 58 problèmes soumis au *Journal of the Indian Mathematical Society*
- ... et 3 carnets

Les carnets

- Compilés entre 1903 et 1914
- Assemblage grossier de feuilles de papier
- Uniquement des résultats aboutis
 - Absence de développements, d'explications, de définitions, de conventions, de notations...
 - Calculs réalisés sur ardoise
 - Coût du papier
 - « Carte de visite », non destinés à publication

MANUSCRIPT BOOK 2
OF
SHRIVASA SAMANTHAN

MANUSCRIPT BOOK 3
OF
SHRIVASA SAMANTHAN

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$
 $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{7}{24}$
 $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$
 $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{5}{36}$
 $\frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{4}{60} + \frac{3}{60} = \frac{7}{60}$
 $\frac{1}{20} + \frac{1}{25} = \frac{5}{100} + \frac{4}{100} = \frac{9}{100}$
 $\frac{1}{24} + \frac{1}{30} = \frac{5}{120} + \frac{4}{120} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40}$
 $\frac{1}{30} + \frac{1}{35} = \frac{7}{210} + \frac{6}{210} = \frac{13}{210}$
 $\frac{1}{35} + \frac{1}{40} = \frac{8}{280} + \frac{7}{280} = \frac{15}{280} = \frac{3}{56}$
 $\frac{1}{40} + \frac{1}{45} = \frac{9}{360} + \frac{8}{360} = \frac{17}{360}$
 $\frac{1}{45} + \frac{1}{50} = \frac{10}{450} + \frac{9}{450} = \frac{19}{450}$
 $\frac{1}{50} + \frac{1}{55} = \frac{11}{550} + \frac{10}{550} = \frac{21}{550}$
 $\frac{1}{55} + \frac{1}{60} = \frac{12}{660} + \frac{11}{660} = \frac{23}{660}$
 $\frac{1}{60} + \frac{1}{65} = \frac{13}{660} + \frac{12}{660} = \frac{25}{660} = \frac{5}{132}$
 $\frac{1}{65} + \frac{1}{70} = \frac{14}{770} + \frac{11}{770} = \frac{25}{770} = \frac{5}{154}$
 $\frac{1}{70} + \frac{1}{75} = \frac{15}{1050} + \frac{14}{1050} = \frac{29}{1050}$
 $\frac{1}{75} + \frac{1}{80} = \frac{16}{1200} + \frac{15}{1200} = \frac{31}{1200}$
 $\frac{1}{80} + \frac{1}{85} = \frac{17}{1360} + \frac{16}{1360} = \frac{33}{1360}$
 $\frac{1}{85} + \frac{1}{90} = \frac{18}{1530} + \frac{17}{1530} = \frac{35}{1530} = \frac{7}{306}$
 $\frac{1}{90} + \frac{1}{95} = \frac{19}{1710} + \frac{18}{1710} = \frac{37}{1710}$
 $\frac{1}{95} + \frac{1}{100} = \frac{20}{1900} + \frac{19}{1900} = \frac{39}{1900}$
 $\frac{1}{100} + \frac{1}{105} = \frac{21}{2100} + \frac{20}{2100} = \frac{41}{2100}$
 $\frac{1}{105} + \frac{1}{110} = \frac{22}{2310} + \frac{21}{2310} = \frac{43}{2310}$
 $\frac{1}{110} + \frac{1}{115} = \frac{23}{2530} + \frac{22}{2530} = \frac{45}{2530} = \frac{9}{506}$
 $\frac{1}{115} + \frac{1}{120} = \frac{24}{2760} + \frac{23}{2760} = \frac{47}{2760}$
 $\frac{1}{120} + \frac{1}{125} = \frac{25}{3000} + \frac{24}{3000} = \frac{49}{3000}$
 $\frac{1}{125} + \frac{1}{130} = \frac{26}{3250} + \frac{25}{3250} = \frac{51}{3250}$
 $\frac{1}{130} + \frac{1}{135} = \frac{27}{3510} + \frac{26}{3510} = \frac{53}{3510}$
 $\frac{1}{135} + \frac{1}{140} = \frac{28}{3780} + \frac{27}{3780} = \frac{55}{3780} = \frac{11}{756}$
 $\frac{1}{140} + \frac{1}{145} = \frac{29}{4060} + \frac{28}{4060} = \frac{57}{4060}$
 $\frac{1}{145} + \frac{1}{150} = \frac{30}{4500} + \frac{29}{4500} = \frac{59}{4500}$
 $\frac{1}{150} + \frac{1}{155} = \frac{31}{4650} + \frac{30}{4650} = \frac{61}{4650}$
 $\frac{1}{155} + \frac{1}{160} = \frac{32}{4960} + \frac{31}{4960} = \frac{63}{4960}$
 $\frac{1}{160} + \frac{1}{165} = \frac{33}{5280} + \frac{32}{5280} = \frac{65}{5280} = \frac{13}{1056}$
 $\frac{1}{165} + \frac{1}{170} = \frac{34}{5610} + \frac{33}{5610} = \frac{67}{5610}$
 $\frac{1}{170} + \frac{1}{175} = \frac{35}{5950} + \frac{34}{5950} = \frac{69}{5950}$
 $\frac{1}{175} + \frac{1}{180} = \frac{36}{6300} + \frac{35}{6300} = \frac{71}{6300}$
 $\frac{1}{180} + \frac{1}{185} = \frac{37}{6660} + \frac{36}{6660} = \frac{73}{6660}$
 $\frac{1}{185} + \frac{1}{190} = \frac{38}{7030} + \frac{37}{7030} = \frac{75}{7030} = \frac{15}{1406}$
 $\frac{1}{190} + \frac{1}{195} = \frac{39}{7410} + \frac{38}{7410} = \frac{77}{7410}$
 $\frac{1}{195} + \frac{1}{200} = \frac{40}{7800} + \frac{39}{7800} = \frac{79}{7800}$
 $\frac{1}{200} + \frac{1}{205} = \frac{41}{8200} + \frac{40}{8200} = \frac{81}{8200}$
 $\frac{1}{205} + \frac{1}{210} = \frac{42}{8580} + \frac{39}{8580} = \frac{81}{8580} = \frac{13}{1430}$
 $\frac{1}{210} + \frac{1}{215} = \frac{43}{8970} + \frac{42}{8970} = \frac{85}{8970}$
 $\frac{1}{215} + \frac{1}{220} = \frac{44}{9360} + \frac{43}{9360} = \frac{87}{9360} = \frac{17}{2160}$
 $\frac{1}{220} + \frac{1}{225} = \frac{45}{9900} + \frac{44}{9900} = \frac{89}{9900}$
 $\frac{1}{225} + \frac{1}{230} = \frac{46}{10260} + \frac{45}{10260} = \frac{91}{10260}$
 $\frac{1}{230} + \frac{1}{235} = \frac{47}{10630} + \frac{46}{10630} = \frac{93}{10630}$
 $\frac{1}{235} + \frac{1}{240} = \frac{48}{11040} + \frac{47}{11040} = \frac{95}{11040} = \frac{19}{2208}$
 $\frac{1}{240} + \frac{1}{245} = \frac{49}{11460} + \frac{48}{11460} = \frac{97}{11460}$
 $\frac{1}{245} + \frac{1}{250} = \frac{50}{11900} + \frac{49}{11900} = \frac{99}{11900}$
 $\frac{1}{250} + \frac{1}{255} = \frac{51}{12350} + \frac{48}{12350} = \frac{99}{12350}$
 $\frac{1}{255} + \frac{1}{260} = \frac{52}{12840} + \frac{49}{12840} = \frac{101}{12840}$
 $\frac{1}{260} + \frac{1}{265} = \frac{53}{13350} + \frac{50}{13350} = \frac{103}{13350}$
 $\frac{1}{265} + \frac{1}{270} = \frac{54}{13860} + \frac{49}{13860} = \frac{103}{13860} = \frac{17}{2772}$
 $\frac{1}{270} + \frac{1}{275} = \frac{55}{14385} + \frac{50}{14385} = \frac{105}{14385}$
 $\frac{1}{275} + \frac{1}{280} = \frac{56}{14920} + \frac{49}{14920} = \frac{105}{14920}$
 $\frac{1}{280} + \frac{1}{285} = \frac{57}{15465} + \frac{50}{15465} = \frac{107}{15465}$
 $\frac{1}{285} + \frac{1}{290} = \frac{58}{16020} + \frac{49}{16020} = \frac{107}{16020}$
 $\frac{1}{290} + \frac{1}{295} = \frac{59}{16585} + \frac{50}{16585} = \frac{109}{16585}$
 $\frac{1}{295} + \frac{1}{300} = \frac{60}{17160} + \frac{49}{17160} = \frac{109}{17160} = \frac{19}{3432}$
 $\frac{1}{300} + \frac{1}{305} = \frac{61}{17745} + \frac{50}{17745} = \frac{111}{17745}$
 $\frac{1}{305} + \frac{1}{310} = \frac{62}{18340} + \frac{49}{18340} = \frac{111}{18340}$
 $\frac{1}{310} + \frac{1}{315} = \frac{63}{18945} + \frac{50}{18945} = \frac{113}{18945}$
 $\frac{1}{315} + \frac{1}{320} = \frac{64}{19560} + \frac{49}{19560} = \frac{113}{19560} = \frac{19}{3912}$
 $\frac{1}{320} + \frac{1}{325} = \frac{65}{20185} + \frac{50}{20185} = \frac{115}{20185}$
 $\frac{1}{325} + \frac{1}{330} = \frac{66}{20820} + \frac{49}{20820} = \frac{115}{20820}$
 $\frac{1}{330} + \frac{1}{335} = \frac{67}{21465} + \frac{50}{21465} = \frac{117}{21465}$
 $\frac{1}{335} + \frac{1}{340} = \frac{68}{22120} + \frac{49}{22120} = \frac{117}{22120}$
 $\frac{1}{340} + \frac{1}{345} = \frac{69}{22785} + \frac{50}{22785} = \frac{119}{22785}$
 $\frac{1}{345} + \frac{1}{350} = \frac{70}{23460} + \frac{49}{23460} = \frac{119}{23460} = \frac{19}{4692}$
 $\frac{1}{350} + \frac{1}{355} = \frac{71}{24145} + \frac{50}{24145} = \frac{121}{24145}$
 $\frac{1}{355} + \frac{1}{360} = \frac{72}{24840} + \frac{49}{24840} = \frac{121}{24840}$
 $\frac{1}{360} + \frac{1}{365} = \frac{73}{25545} + \frac{50}{25545} = \frac{123}{25545}$
 $\frac{1}{365} + \frac{1}{370} = \frac{74}{26260} + \frac{49}{26260} = \frac{123}{26260}$
 $\frac{1}{370} + \frac{1}{375} = \frac{75}{26985} + \frac{50}{26985} = \frac{125}{26985}$
 $\frac{1}{375} + \frac{1}{380} = \frac{76}{27720} + \frac{49}{27720} = \frac{125}{27720} = \frac{19}{5544}$
 $\frac{1}{380} + \frac{1}{385} = \frac{77}{28465} + \frac{50}{28465} = \frac{127}{28465}$
 $\frac{1}{385} + \frac{1}{390} = \frac{78}{29220} + \frac{49}{29220} = \frac{127}{29220}$
 $\frac{1}{390} + \frac{1}{395} = \frac{79}{29985} + \frac{50}{29985} = \frac{129}{29985}$
 $\frac{1}{395} + \frac{1}{400} = \frac{80}{30760} + \frac{49}{30760} = \frac{129}{30760}$
 $\frac{1}{400} + \frac{1}{405} = \frac{81}{31545} + \frac{50}{31545} = \frac{131}{31545}$
 $\frac{1}{405} + \frac{1}{410} = \frac{82}{32340} + \frac{49}{32340} = \frac{131}{32340}$
 $\frac{1}{410} + \frac{1}{415} = \frac{83}{33145} + \frac{50}{33145} = \frac{133}{33145}$
 $\frac{1}{415} + \frac{1}{420} = \frac{84}{33960} + \frac{49}{33960} = \frac{133}{33960} = \frac{19}{6792}$
 $\frac{1}{420} + \frac{1}{425} = \frac{85}{34785} + \frac{50}{34785} = \frac{135}{34785}$
 $\frac{1}{425} + \frac{1}{430} = \frac{86}{35620} + \frac{49}{35620} = \frac{135}{35620}$
 $\frac{1}{430} + \frac{1}{435} = \frac{87}{36465} + \frac{50}{36465} = \frac{137}{36465}$
 $\frac{1}{435} + \frac{1}{440} = \frac{88}{37320} + \frac{49}{37320} = \frac{137}{37320}$
 $\frac{1}{440} + \frac{1}{445} = \frac{89}{38185} + \frac{50}{38185} = \frac{139}{38185}$
 $\frac{1}{445} + \frac{1}{450} = \frac{90}{39060} + \frac{49}{39060} = \frac{139}{39060} = \frac{19}{8012}$
 $\frac{1}{450} + \frac{1}{455} = \frac{91}{39945} + \frac{50}{39945} = \frac{141}{39945}$
 $\frac{1}{455} + \frac{1}{460} = \frac{92}{40840} + \frac{49}{40840} = \frac{141}{40840}$
 $\frac{1}{460} + \frac{1}{465} = \frac{93}{41745} + \frac{50}{41745} = \frac{143}{41745}$
 $\frac{1}{465} + \frac{1}{470} = \frac{94}{42660} + \frac{49}{42660} = \frac{143}{42660}$
 $\frac{1}{470} + \frac{1}{475} = \frac{95}{43585} + \frac{50}{43585} = \frac{145}{43585}$
 $\frac{1}{475} + \frac{1}{480} = \frac{96}{44520} + \frac{49}{44520} = \frac{145}{44520} = \frac{19}{8904}$
 $\frac{1}{480} + \frac{1}{485} = \frac{97}{45465} + \frac{50}{45465} = \frac{147}{45465}$
 $\frac{1}{485} + \frac{1}{490} = \frac{98}{46420} + \frac{49}{46420} = \frac{147}{46420}$
 $\frac{1}{490} + \frac{1}{495} = \frac{99}{47385} + \frac{50}{47385} = \frac{149}{47385}$
 $\frac{1}{495} + \frac{1}{500} = \frac{100}{48360} + \frac{49}{48360} = \frac{149}{48360}$
 $\frac{1}{500} + \frac{1}{505} = \frac{101}{49345} + \frac{50}{49345} = \frac{151}{49345}$
 $\frac{1}{505} + \frac{1}{510} = \frac{102}{50340} + \frac{49}{50340} = \frac{151}{50340}$
 $\frac{1}{510} + \frac{1}{515} = \frac{103}{51345} + \frac{50}{51345} = \frac{153}{51345}$
 $\frac{1}{515} + \frac{1}{520} = \frac{104}{52360} + \frac{49}{52360} = \frac{153}{52360} = \frac{19}{10472}$
 $\frac{1}{520} + \frac{1}{525} = \frac{105}{53385} + \frac{50}{53385} = \frac{155}{53385}$
 $\frac{1}{525} + \frac{1}{530} = \frac{106}{54420} + \frac{49}{54420} = \frac{155}{54420}$
 $\frac{1}{530} + \frac{1}{535} = \frac{107}{55465} + \frac{50}{55465} = \frac{157}{55465}$
 $\frac{1}{535} + \frac{1}{540} = \frac{108}{56520} + \frac{49}{56520} = \frac{157}{56520}$
 $\frac{1}{540} + \frac{1}{545} = \frac{109}{57585} + \frac{50}{57585} = \frac{159}{57585}$
 $\frac{1}{545} + \frac{1}{550} = \frac{110}{58660} + \frac{49}{58660} = \frac{159}{58660} = \frac{19}{11732}$
 $\frac{1}{550} + \frac{1}{555} = \frac{111}{59745} + \frac{50}{59745} = \frac{161}{59745}$
 $\frac{1}{555} + \frac{1}{560} = \frac{112}{60840} + \frac{49}{60840} = \frac{161}{60840}$
 $\frac{1}{560} + \frac{1}{565} = \frac{113}{61945} + \frac{50}{61945} = \frac{163}{61945}$
 $\frac{1}{565} + \frac{1}{570} = \frac{114}{63060} + \frac{49}{63060} = \frac{163}{63060}$
 $\frac{1}{570} + \frac{1}{575} = \frac{115}{64185} + \frac{50}{64185} = \frac{165}{64185}$
 $\frac{1}{575} + \frac{1}{580} = \frac{116}{65320} + \frac{49}{65320} = \frac{165}{65320} = \frac{19}{13064}$
 $\frac{1}{580} + \frac{1}{585} = \frac{117}{66465} + \frac{50}{66465} = \frac{167}{66465}$
 $\frac{1}{585} + \frac{1}{590} = \frac{118}{67620} + \frac{49}{67620} = \frac{167}{67620}$
 $\frac{1}{590} + \frac{1}{595} = \frac{119}{68785} + \frac{50}{68785} = \frac{169}{68785}$
 $\frac{1}{595} + \frac{1}{600} = \frac{120}{69960} + \frac{49}{69960} = \frac{169}{69960}$
 $\frac{1}{600} + \frac{1}{605} = \frac{121}{71145} + \frac{50}{71145} = \frac{171}{71145}$
 $\frac{1}{605} + \frac{1}{610} = \frac{122}{72340} + \frac{49}{72340} = \frac{171}{72340}$
 $\frac{1}{610} + \frac{1}{615} = \frac{123}{73545} + \frac{50}{73545} = \frac{173}{73545}$
 $\frac{1}{615} + \frac{1}{620} = \frac{124}{74760} + \frac{49}{74760} = \frac{173}{74760} = \frac{19}{14940}$
 $\frac{1}{620} + \frac{1}{625} = \frac{125}{75985} + \frac{50}{75985} = \frac{175}{75985}$
 $\frac{1}{625} + \frac{1}{630} = \frac{126}{77220} + \frac{49}{77220} = \frac{175}{77220}$
 $\frac{1}{630} + \frac{1}{635} = \frac{127}{78465} + \frac{50}{78465} = \frac{177}{78465}$
 $\frac{1}{635} + \frac{1}{640} = \frac{128}{79720} + \frac{49}{79720} = \frac{177}{79720}$
 $\frac{1}{640} + \frac{1}{645} = \frac{129}{80985} + \frac{50}{80985} = \frac{179}{80985}$
 $\frac{1}{645} + \frac{1}{650} = \frac{130}{82260} + \frac{49}{82260} = \frac{179}{82260} = \frac{19}{16452}$
 $\frac{1}{650} + \frac{1}{655} = \frac{131}{83545} + \frac{50}{83545} = \frac{181}{83545}$
 $\frac{1}{655} + \frac{1}{660} = \frac{132}{84840} + \frac{49}{84840} = \frac{181}{84840}$
 $\frac{1}{660} + \frac{1}{665} = \frac{133}{86145} + \frac{50}{86145} = \frac{183}{86145}$
 $\frac{1}{665} + \frac{1}{670} = \frac{134}{87460} + \frac{49}{87460} = \frac{183}{87460}$
 $\frac{1}{670} + \frac{1}{675} = \frac{135}{88785} + \frac{50}{88785} = \frac{185}{88785}$
 $\frac{1}{675} + \frac{1}{680} = \frac{136}{90120} + \frac{49}{90120} = \frac{185}{90120} = \frac{19}{18024}$
 $\frac{1}{680} + \frac{1}{685} = \frac{137}{91465} + \frac{50}{91465} = \frac{187}{91465}$
 $\frac{1}{685} + \frac{1}{690} = \frac{138}{92820} + \frac{49}{92820} = \frac{187}{92820}$
 $\frac{1}{690} + \frac{1}{695} = \frac{139}{94185} + \frac{50}{94185} = \frac{189}{94185}$
 $\frac{1}{695} + \frac{1}{700} = \frac{140}{95560} + \frac{49}{95560} = \frac{189}{95560}$
 $\frac{1}{700} + \frac{1}{705} = \frac{141}{96945} + \frac{50}{96945} = \frac{191}{96945}$
 $\frac{1}{705} + \frac{1}{710} = \frac{142}{98340} + \frac{49}{98340} = \frac{191}{98340}$
 $\frac{1}{710} + \frac{1}{715} = \frac{143}{99745} + \frac{50}{99745} = \frac{193}{99745}$
 $\frac{1}{715} + \frac{1}{720} = \frac{144}{101160} + \frac{49}{101160} = \frac{193}{101160} = \frac{19}{20232}$
 $\frac{1}{720} + \frac{1}{725} = \frac{145}{102585} + \frac{50}{102585} = \frac{195}{102585}$
 $\frac{1}{725} + \frac{1}{730} = \frac{146}{104020} + \frac{49}{104020} = \frac{195}{104020}$
 $\frac{1}{730} + \frac{1}{735} = \frac{147}{105465} + \frac{50}{105465} = \frac{197}{105465}$
 $\frac{1}{735} + \frac{1}{740} = \frac{148}{106920} + \frac{49}{106920} = \frac{197}{106920}$
 $\frac{1}{740} + \frac{1}{745} = \frac{149}{108385} + \frac{50}{108385} = \frac{199}{108385}$
 $\frac{1}{745} + \frac{1}{750} = \frac{150}{109860} + \frac{49}{109860} = \frac{199}{109860} = \frac{19}{21972}$
 $\frac{1}{750} + \frac{1}{755} = \frac{151}{111345} + \frac{50}{111345} = \frac{201}{111345}$
 $\frac{1}{755} + \frac{1}{760} = \frac{152}{112840} + \frac{49}{112840} = \frac{201}{112840}$
 $\frac{1}{760} + \frac{1}{765} = \frac{153}{114345} + \frac{50}{114345} = \frac{203}{114345}$
 $\frac{1}{765} + \frac{1}{770} = \frac{154}{115860} + \frac{49}{115860} = \frac{203}{115860}$
 $\frac{1}{770} + \frac{1}{775} = \frac{155}{117385} + \frac{50}{117385} = \frac{205}{117385}$
 $\frac{1}{775} + \frac{1}{780} = \frac{156}{118920} + \frac{49}{118920} = \frac{205}{118920}$
 $\frac{1}{780} + \frac{1}{785} = \frac{157}{120465} + \frac{50}{120465} = \frac{207}{120465}$
 $\frac{1}{785} + \frac{1}{790} = \frac{158}{122020} + \frac{49}{122020} = \frac{207}{122020}$
 $\frac{1}{790} + \frac{1}{795} = \frac{159}{123585} + \frac{50}{123585} = \frac{209}{123585}$
 $\frac{1}{795} + \frac{1}{800} = \frac{160}{125160} + \frac{49}{125160} = \frac{209}{125160} = \frac{19}{23964}$
 $\frac{1}{800} + \frac{1}{805} = \frac{161}{126745} + \frac{50}{126745} = \frac{211}{126745}$
 $\frac{1}{805} + \frac{1}{810} = \frac{162}{128340} + \frac{49}{128340} = \frac{211}{128340}$
 $\frac{1}{810} + \frac{1}{815} = \frac{163}{129945} + \frac{50}{129945} = \frac{213}{129945}$
 $\frac{1}{815} + \frac{1}{820} = \frac{164}{131560} + \frac{49}{131560} = \frac{213}{131560}$
 $\frac{1}{820} + \frac{1}{825} = \frac{165}{133185} + \frac{50}{133185} = \frac{215}{133185}$
 $\frac{1}{825} + \frac{1}{830} = \frac{166}{134820} + \frac{49}{134820} = \frac{215}{134820}$
 $\frac{1}{830} + \frac{1}{835} = \frac{167}{136465} + \frac{50}{136465} = \frac{217}{136465}$
 $\frac{1}{835} + \frac{1}{840} = \frac{168}{138120} + \frac{49}{138120} = \frac{217}{138120}$
 $\frac{1}{840} + \frac{1}{845} = \frac{169}{139785} + \frac{50}{139785} = \frac{219}{139785}$
 $\frac{1}{845} + \frac{1}{850} = \frac{170}{141460} + \frac{49}{141460} = \frac{219}{141460} = \frac{19}{26260}$
 $\frac{1}{850} + \frac{1}{855} = \frac{171}{143145} + \frac{50}{143145} = \frac{221}{143145}$
 $\frac{1}{855} + \frac{1}{860} = \frac{172}{144840} + \frac{49}{144840} = \frac{221}{144840}$
 $\frac{1}{860} + \frac{1}{865} = \frac{173}{146545} + \frac{50}{146545} = \frac{223}{146545}$
 $\frac{1}{865} + \frac{1}{870} = \frac{174}{148260} + \frac{49}{148260} = \frac{223}{148260}$
 $\frac{1}{870} + \frac{1}{875} = \frac{175}{149985} + \frac{50}{149985} = \frac{225}{149985}$
 $\frac{1}{875} + \frac{1}{880} = \frac{176}{151720} + \frac{49}{151720} = \frac{225}{151720}$
 $\frac{1}{880} + \frac{1}{885} = \frac{177}{153465} + \frac{50}{153465} = \frac{227}{153465}$
 $\frac{1}{885} + \frac{1}{890} = \frac{178}{155220} + \frac{49}{155220} = \frac{227}{155220}$
 $\frac{1}{890} + \frac{1}{895} = \frac{179}{156985} + \frac{50}{156985} = \frac{229}{156985}$
 $\frac{1}{895} + \frac{1}{900} = \frac{180}{158760} + \frac{49}{158760} = \frac{229}{158760} = \frac{19}{29760}$
 $\frac{1}{900} + \frac{1}{905} = \frac{181}{160545} + \frac{50}{160545} = \frac{231}{160545}$
 $\frac{1}{905} + \frac{1}{910} = \frac{182}{162340} + \frac{49}{162340} = \frac{231}{162340}$
 $\frac{1}{910} + \frac{1}{915} = \frac{183}{164145} + \frac{50}{164145} = \frac{233}{164145}$
 $\frac{1}{915} + \frac{1}{920} = \frac{184}{165960} + \frac{49}{165960} = \frac{233}{165960}$
 $\frac{1}{920} + \frac{1}{925} = \frac{185}{167785} + \frac{50}{167785} = \frac{235}{167785}$
 $\frac{1}{925} + \frac{1}{930} = \frac{186}{169620}$

Le voyage des carnets

- Ne quittent jamais Ramanujan en Inde
- Aujourd'hui à l'Université de Chennai
- 1927 : édition des œuvres complètes *publiées* de Ramanujan, par Hardy
- 1957 : le Tata Institute of Fundamental Research à Bombay publie un Photostat des carnets (2 volumes, aucune édition)

Le premier carnet

- 351 pages, 16 chapitres
- Une recension des recherches menées par Ramanujan
- Un premier chapitre datant de l'enfance (!)
- Peu d'organisation
- Gestion confuse des pages

Le deuxième carnet

- 356 pages
- Une réorganisation du premier carnet en 21 chapitres
- Volonté de publier ces résultats
- Contient 100 pages de contenus mathématiques divers et non organisés

Le troisième carnet

- 33 pages
- Aucune structuration logique apparente
- Carnet plus tardif que les deux premiers

Remarques : sur les trois carnets, moins d'une vingtaine de résultats sont accompagnés d'une quelconque indication de nombreux résultats sont déjà connus

Un style lacunaire

- Des carnets personnels, pas destinés à être lus
- Ramanujan adopte un style proche de celui de Carr : des formules sans preuves
- Il sait (ou croit savoir) prouver ce qu'il écrit
- Au lecteur de se fabriquer ses démonstrations
- Ramanujan refuse de dévoiler ses techniques

Il faut les éditer !

- 1920 : Hardy plaide pour une édition des trois carnets de Ramanujan
- Pour les résultats déjà connus : produire une référence précise
- Pour les résultats corrects : en fournir une preuve, si possible dans l'esprit de l'auteur
- Pour les résultats faux : un résultat correct n'est sans doute pas loin, il faut le chercher...

L'édition

- 1920–1947 : Hardy produit une vingtaine d'articles inspirés des carnets
- 1927 : pas d'argent pour l'édition des carnets avec les œuvres complètes
- 1927–1940 : travail d'édition systématique entrepris par **Bertram Martin Wilson** et **George Neville Watson**

Watson et Wilson

- 1929–1931 : début du chantier
- 1931 : la tâche est estimée à cinq ans
- Le carnet 2 est privilégié (Wilson : chapitres 2 à 14, Watson : chapitres 15 à 21)
- 1935 : décès de Wilson (38 ans)
- Années 1930 : Watson produira des notes et plus de 30 articles, avant d'abandonner

La transition

- 1923 : manuscrits envoyés à Hardy
- 1934–1947 : passe ces documents à Watson
- 1947 : mort de Hardy (70 ans)
- 1965 : mort de Watson (79 ans)

que faire des documents retrouvés ?

- 1965, 1968, 1969 : envoi à Trinity College
- Les documents dorment à la bibliothèque...

1976

- George Andrews (né en 1938) : spécialiste des q -séries et des fonctions spéciales
- Connaît bien les travaux de Ramanujan
- 1976 : visite Trinity College pour consulter les notes de Watson

découvre des manuscrits inattendus



Le carnet perdu

- 138 pages manuscrites de Ramanujan
- 600 résultats (q -séries, fonctions thêta...)
- Travaux réalisés durant l'année 1920
- Ni un « carnet », ni « perdu »
- Absence de texte
- Difficile à lire
- 1987 : copie élargie rendue disponible

Un siècle d'édition

- Hardy : une vingtaine d'articles
- Watson, Wilson : 6 à 8 chapitres du carnet 2
- Facs-similés des carnets disponibles en 1957
- Fac-similé du carnet perdu en 1987 (Narosa)
- Andrews : une trentaine d'articles
- Travaux épars et non concertés

Bruce Berndt

- Né en 1939
- Théoricien des nombres (analyse et séries)
- 1974 : en résidence à Princeton pour un an
lit deux articles de Grosswald
qui prouvent des formules de Ramanujan

Berndt sait les prouver !
peut-il en prouver d'autres ?



Chapitre 14

- Toutes les formules sont dans le carnet 2, chapitre 14
- Mai 1977 : prouver les 87 formules (1 an !)
- Depuis 1978 : éditer les trois carnets
- Démarche systématique, rigoureuse, tenace
- Aide de nombreux mathématiciens, de Springer, de fondations...

21 ans plus tard...

- L'édition des carnets est achevée !!!
- 3 254 résultats (comptabilité de Berndt)
- Moins d'une dizaine sont faux
- Les deux tiers sont originaux
- 5 livres (2 300 pages)
- Plus de 100 articles

5 livres

- 1985 : carnet 2 (ch. 1 à 9) + rapports
- 1989 : carnet 2 (chapters 10 à 15)
- 1991 : carnet 2 (16 à 21)
- 1994 : carnets 2 et 3 + carnet 1 (ch. 1 à 16)
- 1998 : carnets 1, 2 et 3
- Plus : édition de la correspondance

The Ramanujan Journal

essais, articles, ouvrages techniques

Quid du carnet perdu ?

- Plusieurs dizaines d'articles de G. Andrews
- Éditions systématique avec B. Berndt :
 - 2005, volume I, 440 pages
 - 2009, volume II, 420 pages
- Nombreux articles de mathématiciens et physiciens
- Des recherches d'une grande actualité

Citations 1

- « *Des formules telles que, s'il ne les avait pas écrites, personne ne les aurait trouvées, même dans cent ans, même dans deux cents ans* » (Berndt)
- « *Sans aucun doute, Ramanujan pensait comme tout autre mathématicien, il pensait simplement with more insight que la majorité d'entre nous* » (Berndt)

Citations 2

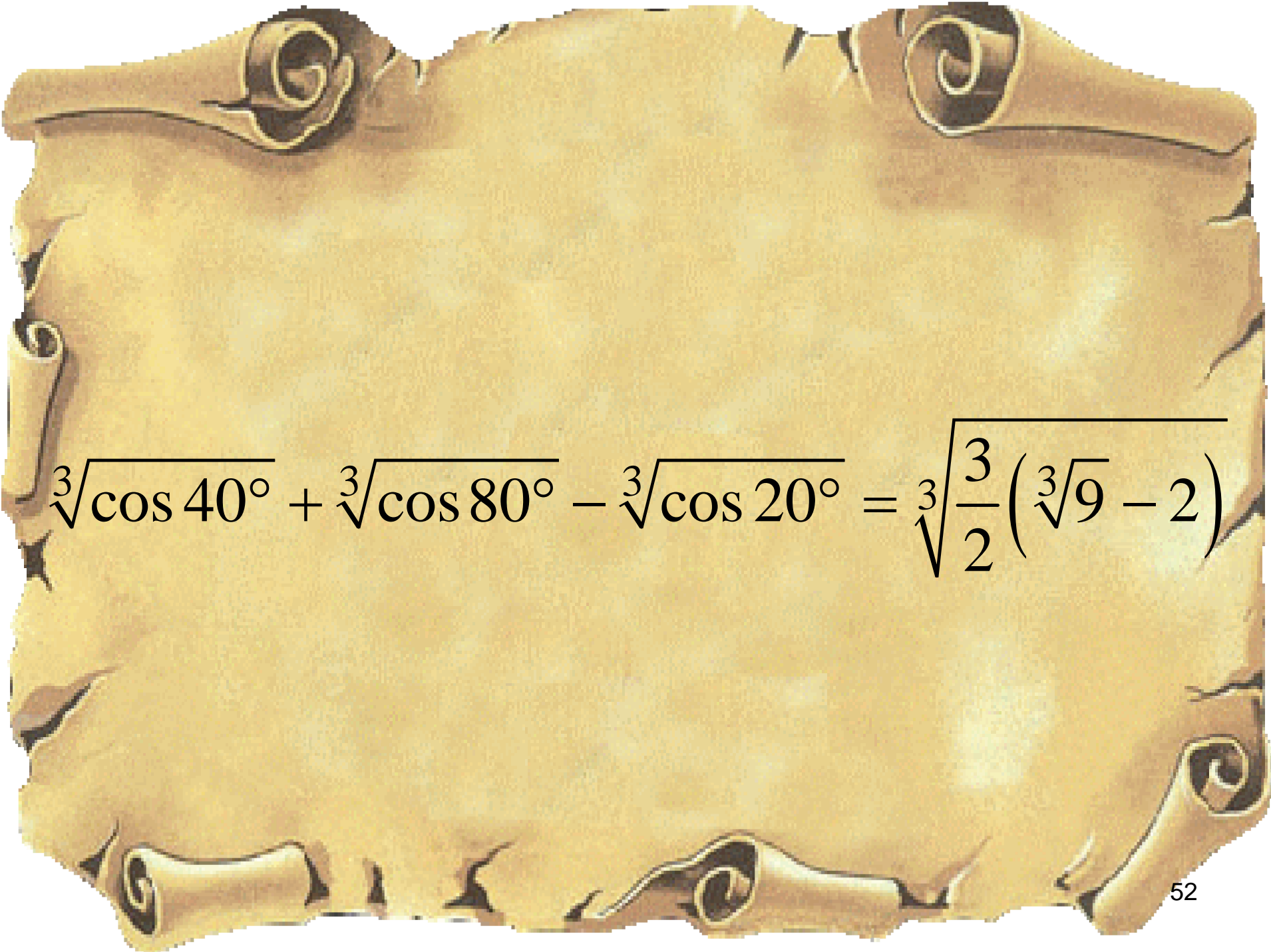
- « *Ramanujan savait parfaitement quand ses méthodes heuristiques le conduisaient à des résultats corrects, et quand ce n'était pas le cas* » (Berndt)
- « *Personne, dans l'histoire des mathématiques, ne possédait l'habileté de Ramanujan dans le domaine des fractions continues ou des radicaux imbriqués* » (Berndt)

A piece of aged, yellowed parchment with a decorative border of rolled-up scrolls. The parchment is rectangular with irregular, torn edges. The word "Florilège" is written in the center in a bold, black, sans-serif font. The background is white.

Florilège

$$2 \sin \frac{\pi}{18} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{\dots}}}}}$$

où la suite des signes $-$, $+$, $+$ a pour période 3


$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left(\sqrt[3]{9} - 2 \right)$$

Pour tout réel positif u et tout entier n ,

on définit $v = u^n - u^{n-1}$

On pose $\varphi(n) = \int_0^1 \frac{\log u}{v} dv$

Alors $\varphi(n) + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi^2}{6}$

$$\frac{\sum_{n \geq 0} e^{-7\pi n^2}}{\sum_{m \geq 0} e^{-\pi m^2}} = \sqrt[8]{28} \frac{\sqrt{13 + \sqrt{7}} + \sqrt{13 + 3\sqrt{7}}}{14}$$

Pour $0 < a < b + \frac{1}{2}$,

$$\int_0^{+\infty} \prod_{j \geq 1} \frac{1 + \left(\frac{x}{b+j}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a+j-1}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma(b+1) \Gamma\left(b - a + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right) \Gamma(b - a + 1)}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) e^{\frac{2\pi}{5}}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{j \geq 1} \frac{1}{(1-q^{5j-1})(1-q^{5j-4})}$$

Soit q un complexe tel que $|q| < 1$.

On définit les fonctions suivantes :

$$\Psi(q) = \sum_{n \geq 0} q^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad f(-q) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} \quad \text{et} \quad R(q) = \frac{q^{1/5}}{1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{\ddots}}}}$$

On pose $\varepsilon = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$R\left(e^{-8\pi}\right) = \sqrt{c^2 + 1 - c}, \quad \text{où} \quad 2c = 1 + \frac{a+b}{a-b}\sqrt{5},$$

$$\text{avec} \quad a = 3 + \sqrt{2} - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad b = \sqrt[4]{20}$$

$$5^{3/5} \int_0^q \frac{f^2(-t) f^2(-t^5)}{\sqrt{t}} dt$$

$$= 2 \int_{\arccos\left(\left(\varepsilon R(q)\right)^{5/2}\right)}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^{-5} 5^{-3/2} \sin^2 \varphi}}$$

$$= \sqrt{5} \int_0^{2 \arctan\left(5^{1/4} \sqrt{q} \frac{f^3(-q^5)}{f^3(-q)}\right)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^{-5} 5^{-3/2} \sin^2 \varphi}}$$

$$= \int_0^{2 \arctan\left(5^{3/4} \sqrt{q} \frac{\Psi(q^5)}{\Psi(q)}\right)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon 5^{-1/2} \sin^2 \varphi}}$$

On définit $P = \frac{f^2(-q)}{q^{1/6} f^2(-q^3)}$ et $Q = \frac{f^2(-q^2)}{q^{1/3} f^2(-q^6)}$

Alors $PQ + \frac{9}{PQ} = \left(\frac{Q}{P}\right)^3 + \left(\frac{P}{Q}\right)^3$

Page 209
du carnet perdu

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad q' = e^{-\pi \frac{K}{K'}}, \quad 0 < k < 1.$$

$$\left(\prod_{n \geq 0} \left(\frac{1 - (-1)^n q^{\frac{2n+1}{2}}}{1 + (-1)^n q^{\frac{2n+1}{2}}} \right)^{2n+1} \right)^{\log q} \left(\prod_{m \geq 1} \left(\frac{1 + (-1)^m i q'^m}{1 - (-1)^m i q'^m} \right)^m \right)^{2i\pi} = \exp \left(\frac{\pi^2}{4} - k \frac{\sum_{r \geq 0} \frac{((r+1)!)^3 k^{2r}}{r! \left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \dots \times \frac{2r+3}{2} \right)^2}}{\sum_{j \geq 0} \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{2j+1}{2} \right)^2 k^{2j}}{j!(j+1)!}} \right)$$

Déchiffrage

- Formule presque illisible (copie médiocre)
- Seuls les trois premiers termes de chaque série sont écrits
- K et K' non définis
- Aucune telle formule dans la littérature
- Pas même dans les travaux de Ramanujan !

$$K = K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad K' = K(k'), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

Explication (?)

- Découle d'une connexion unique et presque miraculeuse entre séries hypergéométriques et fonctions elliptiques
- Cette connexion n'est pas comprise
- Accident, ou y en a-t-il d'autres ?
- Comment concevoir qu'une telle formule existe ?
- Comment en déterminer les éléments ?

Voici cette connexion :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{ch} \left(\frac{2n+1}{2} \frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)} \right)} = \frac{k \sum_{r \geq 0} \frac{r+1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{2r+3}{2}\right)^2} \frac{((r+1)!)^2 k^{2r}}{2 \sum_{m \geq 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}{(m!)^2} \frac{k^{2m}}{m+1}}$$

Fonctions elliptiques

Séries hypergéométriques

On trouve cette formule dans le carnet 2...

Conclusion

- Un personnage romantique
- Un mathématicien de génie
- Une productivité inouïe
- Une ténacité à toute épreuve
- Une intuition fulgurante
- Des méthodes qui restent inconnues
- Un travail d'édition titanesque

Un génie

« Son talent était exceptionnellement hors du commun, et il est l'un des rares mathématiciens contemporains que je qualifierais de génie au sens populaire du terme » (Tao)

Mystères...

« Les méthodes de Ramanujan pour calculer les invariants de classe demeurent en grande partie dans une obscurité impénétrable ; c'est regrettable qu'il ne nous ait laissé aucun indice » (Berndt)

Références

The Man Who Knew Infinity – A Life of the Genius Ramanujan. Robert Kanigel, Washington Square Press, 1991

Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan. Bernard Randé, Cassini, 2002

An Overview of Ramanujan's Notebooks.

In:

*Charlemagne and his Heritage:
1200 Years of Civilization and Science
in Europe, volume 2 (Mathematical Arts),
édité par P.L. Butzer, H.T. Jongen et
W. Oberschelp, Brepolz, Turnhout,
pp. 119–146, 1998*



Ramanujan's Notebooks – Part I.

Bruce Berndt, Springer, 1985

Ramanujan's Notebooks – Part II.

Bruce Berndt, Springer, 1989

Ramanujan's Notebooks – Part III.


Bruce Berndt, Springer, 1991

Ramanujan's Notebooks – Part IV.

Bruce Berndt, Springer, 1994

Ramanujan's Notebooks – Part V.

Bruce Berndt, Springer, 1998



Ramanujan's Lost Notebook – Part I.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2005

Ramanujan's Lost Notebook – Part II.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2009