Le ruban de Möbius

François Dubois [1]

une introduction élémentaire à la topologie

Kafemath
"La Coulée Douce", Paris 12$^{\text{ième}}$
jeudi 17 février 2011

[1] animateur du Kafemath, café mathématique à Paris.

Le bout du bout (Raymond Devos)

(L'artiste, s'adressant à son pianiste:)

Ne discutez plus, hein !... Parce que... vraiment...

(s'adressant au public:)

Ecoutez, l'autre jour, je taillais un morceau de bois...

Mon pianiste vient, il me dit :

- Voulez-vous me passer ce bout de bois, s'il vous plaît ?
- Lequel des deux bouts ?
- Quels deux bouts ? Je ne vois qu'un bout de bois.
- Parce que vous vous exprimez mal !
  Parce qu'un bois, ça a deux bouts.
  Alors il ne faudrait pas dire "un bout de bois",
  mais "les deux bouts d'un bois" !
- Les "deux bouts d'un bois"... D'abord, ça sonne curieux !
  On entend "les deux boudins", on ne sait pas
  s'il s'agit de bouts de bois ou de bouts de boudins !

Le bout du bout (Raymond Devos) *(ii)*

- Ne plaisantons pas ! S'il s'agissait de bouts de boudin,
on dirait "les deux bouts d'un boudin" !
On ne dirait pas "les deux bouts d'un bois".
- J'ai toujours appelé un bout de bois un bout de bois, moi !
Alors passez-moi ce bout de bois.

Il prend le bout, tire dessus et me dit:
- Lâchez l'autre bout !
- Vous voyez bien qu'il y a deux bouts !
- Bon, puisqu'il y a deux bouts, gardez ce bout-ci !
Moi, je garde ce bout-là ! Ça nous fera chacun un bout !
- Non, ça nous fait encore chacun deux bouts !

Une histoire de proximité

Le bout de bois :
"espace" qu'on peut modéliser mathématiquement
à l'aide d'un segment S;

Ce segment S est composés de points voisins les uns des autres.
Certains points du segment (en rouge) ont des voisins
"de chaque côté" : ils définissent l'intérieur du segment.

Deux points (en bleu) sont "au bout", sur la frontière :
ils ont des voisins "seulement d'un seul côté".

Une histoire de proximité *(ii)*

On formalise cette idée et on construit ainsi la

"topologie générale" :

un espace topologique est un ensemble muni de la notion de "proximité de deux points", de distance si on veut fixer les idées...

ou de "système de voisinage" d'un point de l'espace.

Intérêt des espaces topologiques : étudier des transformations qui "conservent les points voisins", c'est à dire sont continues.

On ne peut pas déchirer la feuille de papier...

mais on peut la plier ou même la froisser !

Une histoire de proximité *(iii)*

Discipline seulement centenaire

Propriété des fonctions continues : Bernard Bolzano (1817)
Définition d'une fonction continue
Exemple de fonction continue dérivable nulle part
Karl Weierstraß (1872)
"Vorstudien zur Topologie", Johann Benedict Listing (1847)
Axiomatique de la notion de limite
Maurice Fréchet, Frédéric Riesz (1906)
Homéomorphisme *Analysis situs*, Henri Poincaré (1895)

transformation qui préserve les points voisins,
où l'on peut "revenir en arrière",
et ce avec la même propriété de préserver les points voisins.

[fonction "one to one" (bijective) continue ainsi que sa réciproque]
Axiomatique et notion d'espace séparé Felix Hausdorff (1914)

Notion de frontière

Notion clef : le “bord” d’un espace topologique, noté ‘∂

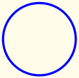
Si S est le “morceau de bois de Devos”, $\partial S = P_g \cup P_d$.

La frontière du segment S est composée de deux points.

Si P est un “point”, $\partial P = \phi$, ensemble vide,

que l’on note ici simplement 0.

La frontière d’un point est réduite à zéro : $\partial P = 0$



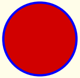
Si C désigne un cercle...

Le cercle est une “courbe fermée ; il n’a pas de frontière.

La frontière d’un cercle est réduite à zéro. $\partial C = 0$.

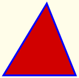
Notion de frontière *(ii)*

On désigne par D le “disque plein” dans le plan.



Alors $\partial D = C$.

On remplace le disque par un triangle “plein” θ.

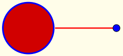


Alors $\partial\theta = T$.

La frontière du triangle “plein” θ est la “ligne triangulaire” T.

La “ligne triangulaire” T n'a pas de frontière : $\partial T = 0$.

Un exemple E plus élaboré

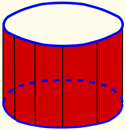


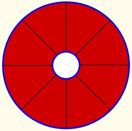
$\partial E = C \cup P$.

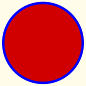
Notion de frontière *(iii)*

A trois dimensions sans difficulté

Si Γ désigne un morceau de cylindre, alors $\partial\Gamma = C_h \cup C_b$.







Notons B la boule tridimensionnelle

Son bord ∂B est la sphère S^2 : $\partial B = S^2$.

Mais la sphère n'a pas de bord : $\partial(S^2) = 0$.

La sphère S^2 est une surface fermée.

Une propriété fondamentale

Théorème

Si une courbe est le bord d'une surface,
alors son bord est réduit à zéro.
Si une surface est le bord d'un volume,
alors son bord est réduit à zéro.

Un bord n'a pas de bord $\partial \circ \partial \equiv 0$

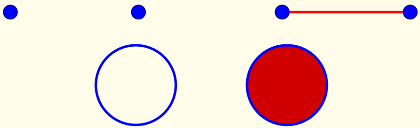
Cette propriété est vraie pour tous les exemples déjà rencontrés...

Question naturelle :

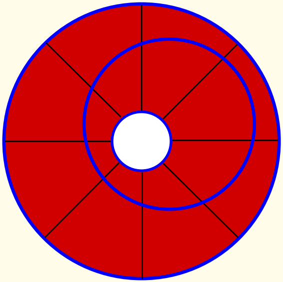
Si un espace topologique n'a pas de bord, est-il un bord ?
Si K est tel que $\partial K = 0$, existe-t-il L tel que $K = \partial L$?

Si je n'ai pas de bord, je suis un bord ?

Parfois oui...

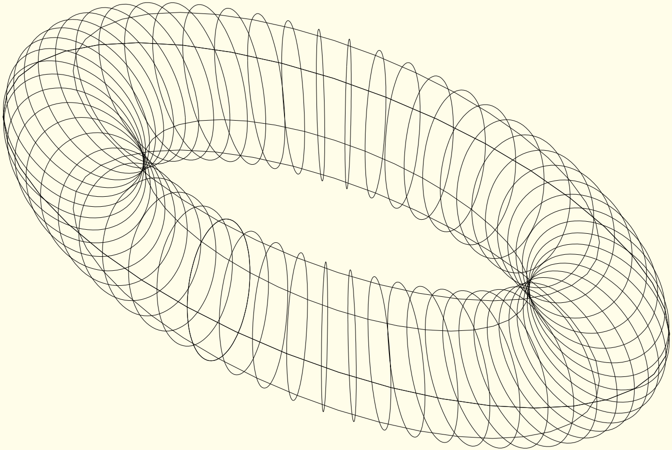


Parfois non,



quand il y a un trou...

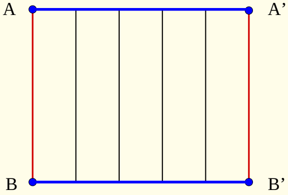
Tore T^2



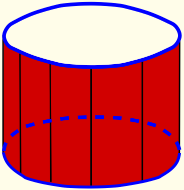
surface non simplement connexe

Collages

On peut former de nouveaux espaces topologiques (quotients) en recollant les points.



On identifie les segments $[A\,,\,B]$ et $[A'\,,\,B']$



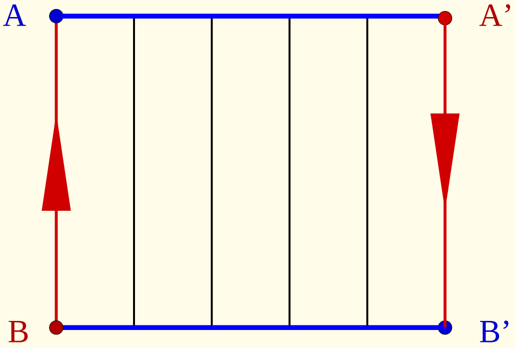
On obtient d'une nouvelle façon le cylindre Γ.

Collages *(ii)*

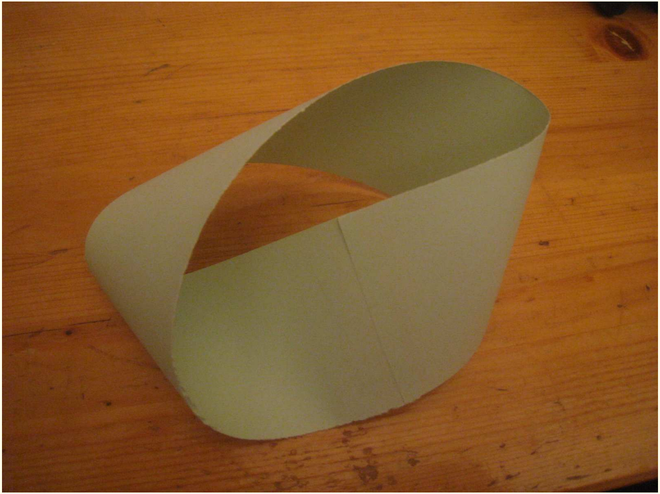
Que se passe-t-il si on se trompe

et qu'on colle le segment $[A\,,\,B]$ sur $[B'\,,\,A']$

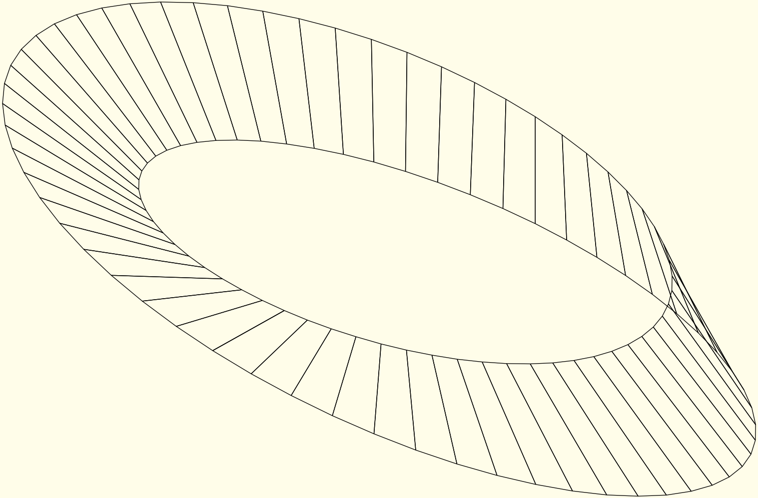
en alignant les deux flèches rouges ?



Collages *(iii)*



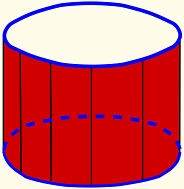
ruban de Möbius

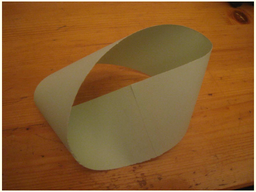


August Möbius (1790-1868)

une figure très populaire...

Le logo des produits recyclables est-il

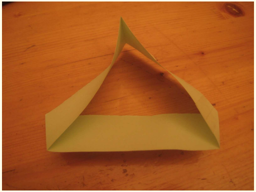




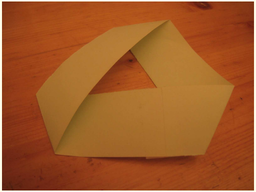
un cylindre ? un ruban de Möbius ?

une figure très populaire... *(ii)*

Le logo des produits recyclés est-il



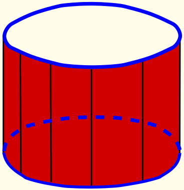
un cylindre ?



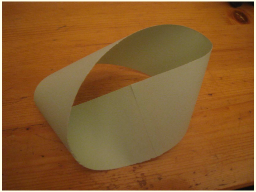
un ruban de Möbius ?

une figure très populaire... *(iii)*

Le logo de Renault est-il



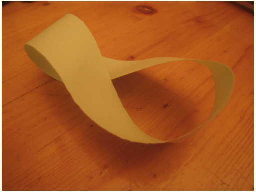
un cylindre ?



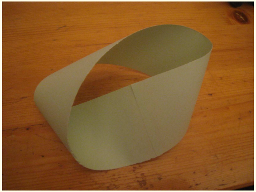
un ruban de Möbius ?

une figure très populaire... *(iv)*

Le logo de Renault est-il

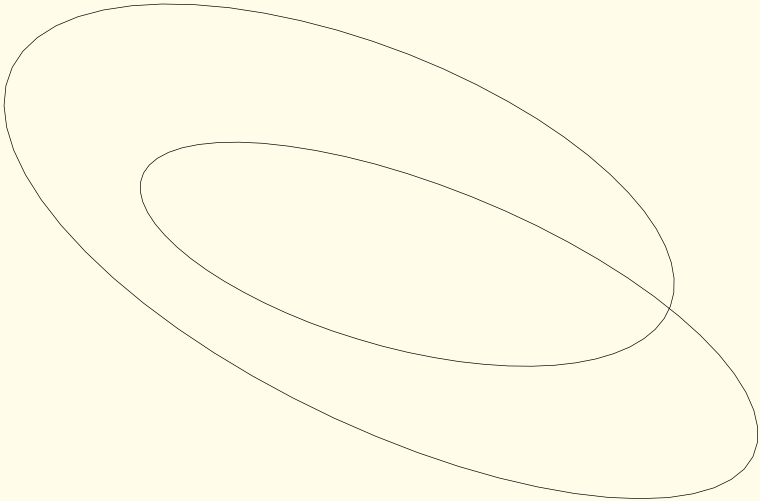


un cylindre ?

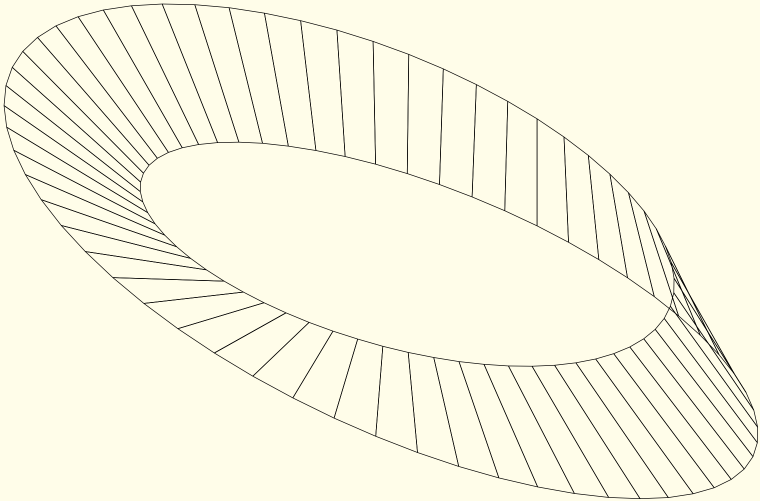


un ruban de Möbius ?

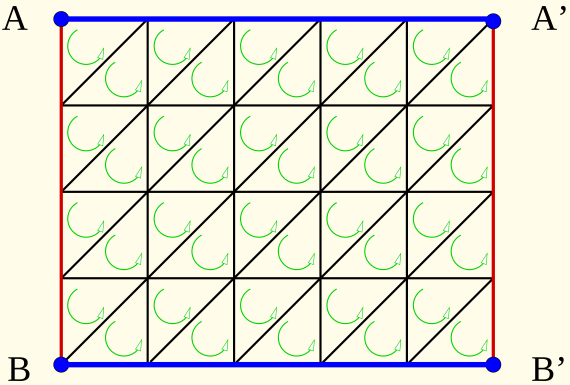
Le bord du ruban de Möbius est d'un seul tenant !



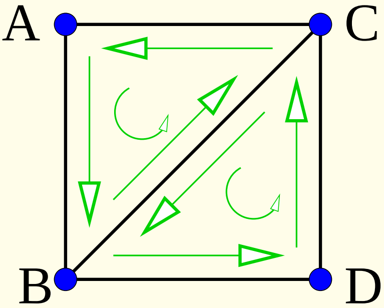
Le bord du ruban de Möbius est d'un seul tenant ! *(ii)*



Surfaces orientables



Surfaces orientables *(ii)*



Les deux triangles (A, B, C) et (B, D, C)

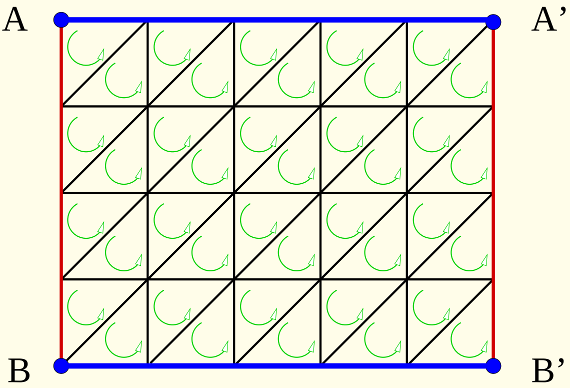
sont d'orientations compatibles :

l'arête commune (B, C) est orientée

de B vers C au sein du triangle (A, B, C)

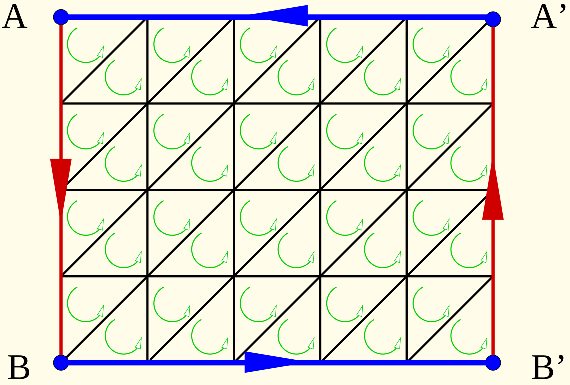
de C vers B au sein du triangle (B, D, C) .

Surfaces orientables *(iii)*



Le carré (A, B, B', A') est orientable :
on peut construire une triangulation
dont tous les triangles adjacents ont des orientations compatibles.

Surfaces orientables *(iv)*



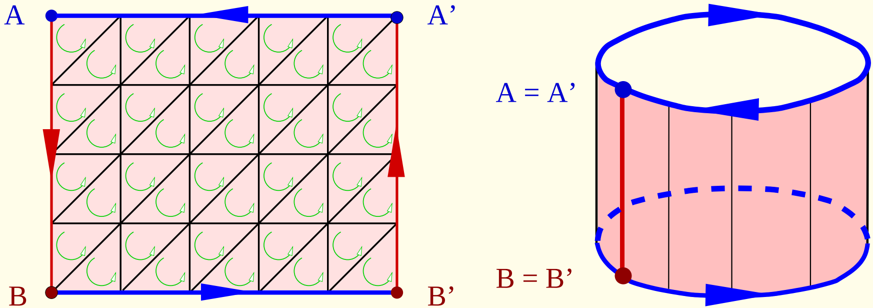
Que se passe-t-il si on recolle deux segments ?

On conserve l'orientabilité si deux arêtes

qui vont être confondues

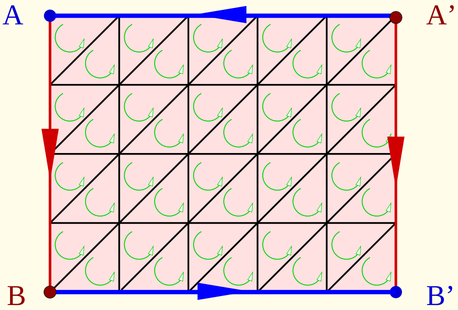
ont les orientations opposées .

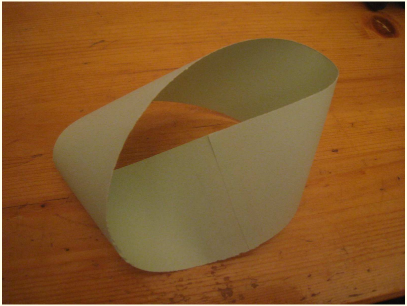
Surfaces orientables *(v)*



Le cylindre est une surface orientable

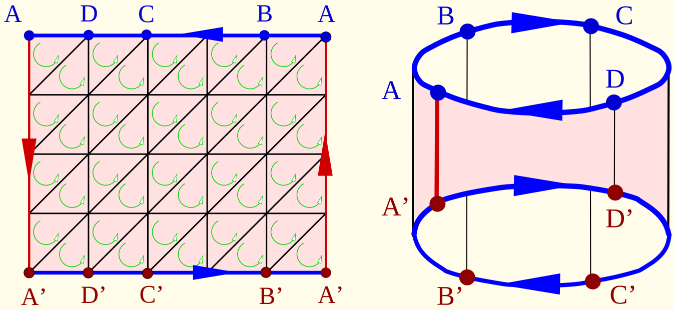
Surfaces non orientables *(i)*





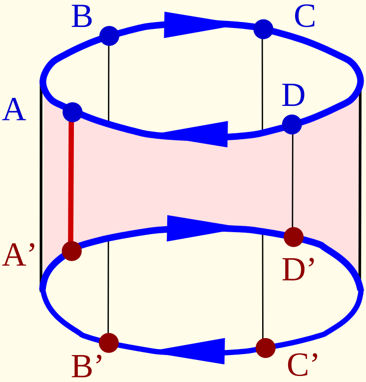
Le ruban de Möbius est une surface non orientable

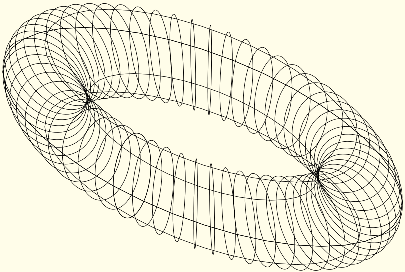
Surfaces non orientables *(ii)*



Comment fabriquer une surface sans bord à partir du cylindre ?

Surfaces orientables *(vi)*





Première solution

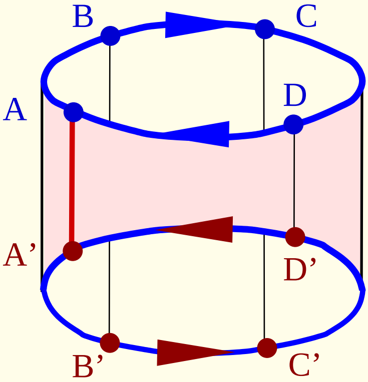
recoller les deux cercles $(ABCD)$ et $(A'B'C'D')$

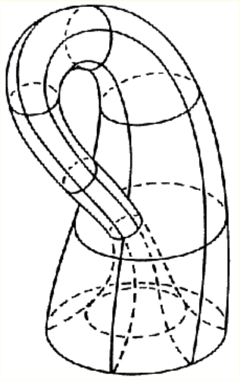
en respectant l'orientation :

$A \equiv A'$, $B \equiv B'$, $C \equiv C'$, $D \equiv D'$,

Tore, surface orientable !

Surfaces non orientables *(iii)*





Seconde solution

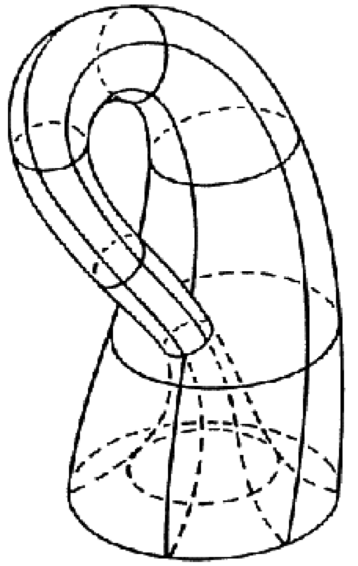
recoller les deux cercles $(ABCD)$ et $(A'B'C'D')$

sans respecter l'orientation !

$A \equiv A'$, $B \equiv D'$, $C \equiv C'$, $D \equiv B'$!

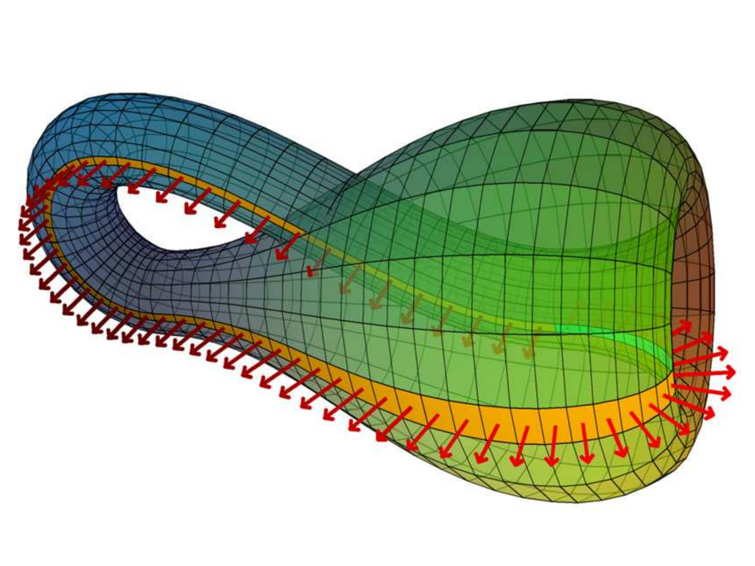
Bouteille de Klein, surface non orientable !

Bouteille de Klein



sur la page de Zbigniew Fiedorowicz (Ohio State University)

Bouteille de Klein



sur la page http://seansturm.wordpress.com (2009)

Felix Klein (1849 - 1925)

Henri Poincaré (1854 - 1912)

Conjecture de Henri Poincaré

La conjecture (1904)

Soit une variété compacte V simplement connexe,
à trois dimensions et sans bord.

Alors V est homéomorphe à une hypersphère de dimension 3.

Résolution en changeant une hypothèse par Stephen Smale (1961)

Cas de la dimension supérieure ou égale à quatre

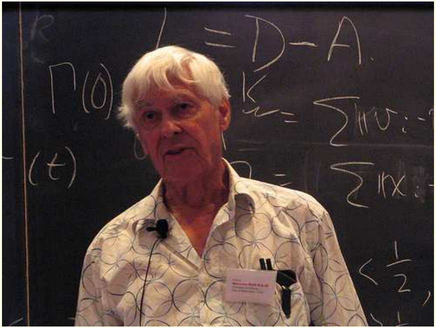
"Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four", Annals of Mathematics, vol. 74, 391 - 406, 1961.

Introduction de la méthode des flots de Ricci

Richard Hamilton (1982)

"Three-manifolds with positive Ricci curvature", J. Differential Geometry, vol. 17, 255-306, 1982.

Conjecture de Poincaré *(ii)*



Stephen Smale (né en 1930)

Richard Hamilton (né en 1943)

Prix "Clay"

Prix "Clay"
Depuis, 2000, sept conjectures, voient leur solution dotée d'une récompense d'un million de dollars chacun.

Ce sont les sept problèmes "Clay" .

1 - Hypothèse de Riemann (théorie des nombres)
2 - Conjecture de Poincaré (topologie)
3 - P=NP (informatique)
4 - Conjecture de Hodge (géométrie algébrique)
5 - Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (géométrie algébrique)
6 - Equations de Navier-Stokes (mécanique des fluides)
7 - Equations de Yang-Mills (physique quantique)

Les trois contributions de Grigoriy Perelman (2002-2003)

Grisha Perelman

“The entropy formula for the Ricci flow
and its geometric applications”
http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159, 11 Nov 2002

“Ricci flow with surgery on three-manifolds”
http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109, 10 Mar 2003

“Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow
on certain three-manifolds”
http://arxiv.org/abs/math.DG/0307245, 17 Jul 2003.

Un esprit authentiquement indépendant

Les démonstrations de Perelman, bien que "non publiées" (dans des "revues internationales à comité de lecture") ont été récompensées par la médaille Fields en 2006.

Mais il l'a déclinée.

l'Institut Clay lui décerne le prix Clay le 18 mars 2010 pour la résolution de la conjecture de Poincaré.

On June 8-9 Clay Mathematics Institute held a conference in Paris to celebrate the resolution of the Poincaré conjecture by Grigoriy Perelman. Dr. Perelman has subsequently informed us that he has decided not to accept the one million dollar prize. In early 2011, Clay Mathematics Institute will make an announcement of how the prize money will be used to benefit mathematics.

(Site du "Clay Mathematics Institute", 01 juillet 2010)

Grigoriy Perelman (né en 1966)