Solution d’un problème posé par Martin Gardner en 1976.

Mais qui résoudra son autre problème posé en 1996 ?

Christian Boyer

G4G, Paris, 21 octobre 2010

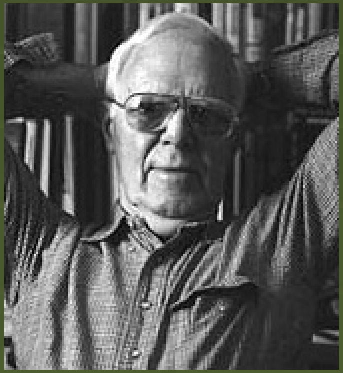
Problème du plus petit cube magique parfait

"Is there a perfect magic cube of order 5? No one knows."

Martin Gardner

Scientific American (1976)

Travel and Other Mathematical Bewilderments (1988)



(ici en 1988)

Ordres 1 et 2

Réglons une fois pour toute le sort de ces deux ordres
à la fois pour les carrés et les cubes magiques

Ordre 1

1

« je suis magique… mais stupide… »

Ordre 2

a	b
c	

« je suis un vilain copieur »

si $a + b = S$
et si $a + c = S$,
… alors $b = c$…

Cube magique d’ordre 3

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Il existe un seul carré magique d’ordre 3

Mais il existe quatre cubes magiques d’ordre 3 (aux rotations et symétries près)

1	17	24
15	19	8
26	6	10
23	3	16
7	**14**	21
12	25	5
18	22	2
20	9	13
4	11	27

2	18	22
24	1	17
16	23	3
15	19	8
7	**14**	21
20	9	13
25	5	12
11	27	4
6	10	26

10	26	6
24	1	17
8	15	19
23	3	16
7	**14**	21
12	25	5
9	13	20
11	27	4
22	2	18

12	26	4
23	1	18
7	15	20
22	3	17
9	**14**	19
11	25	6
8	13	21
10	27	5
24	2	16

Même somme pour les n^2 lignes, n^2 colonnes, n^2 piles et 4 grandes diagonales

$S = n(n^3 + 1) / 2$ pour l’ordre 3 : 31 alignements avec $S = 3(3^3 + 1) / 2 = 42$

Mais les petites diagonales ne donnent pas toutes la bonne somme

Exemple premier cube : $1 + 19 + 10 = 30 \neq 42$

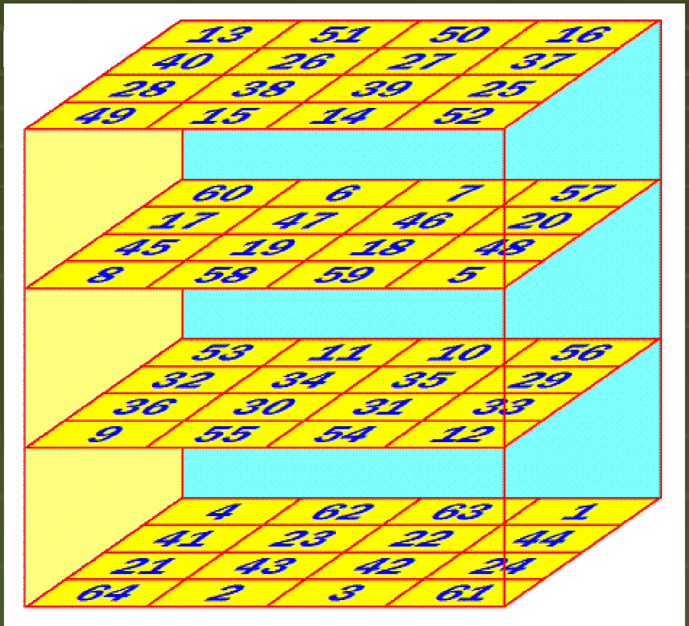
Un cube est dit « parfait » s’il a en plus toutes ses diagonales magiques

$(3n^2 \underline{+ 6n} + 4)$ alignements doivent donc donner la même somme S

Aucun des quatre cubes magiques existants d’ordre 3 n’est parfait

Cube magique d'ordre 4

1640, Fermat envoie à Mersenne ce cu



- Il annonce à Mersenne 72 alignements magiques
  - Mais son cube n'en a réellement que 64. C'est quand même excellent, puisque meilleur que les $3n^2 + 4 = 52$ alignements demandés pour un cube magique
- Un cube magique parfait d'ordre 4 sera ensuite prouvé impossible
  - Richard Schroeppel prouve mathématiquement en 1972 qu'il est impossible que les $3n^2 + 6n + 4 = 76$ alignements soient magiques

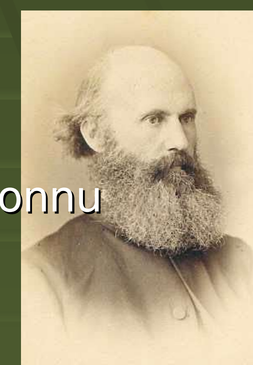
Histoire des cubes magiques parfaits

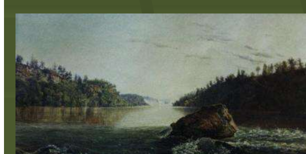
3	Impossible	
4	Impossible, Schroeppel	1972
5	Pb de Martin Gardner	?
6	Walter Trump	sept. 2003
7	Révérend A.H. Frost	1866
8	Gustavus Frankenstein	1875
…	*(nombreux autres)*	XIX^{e}-XX^{e}
8192	Christian Boyer	début 2003

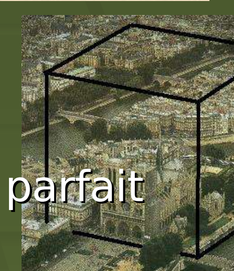
Presque parfait, par Fermat, 1640

Schroeppel: si solution, centre=63

Premier parfait connu







Cube tétramagique parfait

Le plus petit cube magique parfait

La réponse au problème de Gardner est « Yes » !

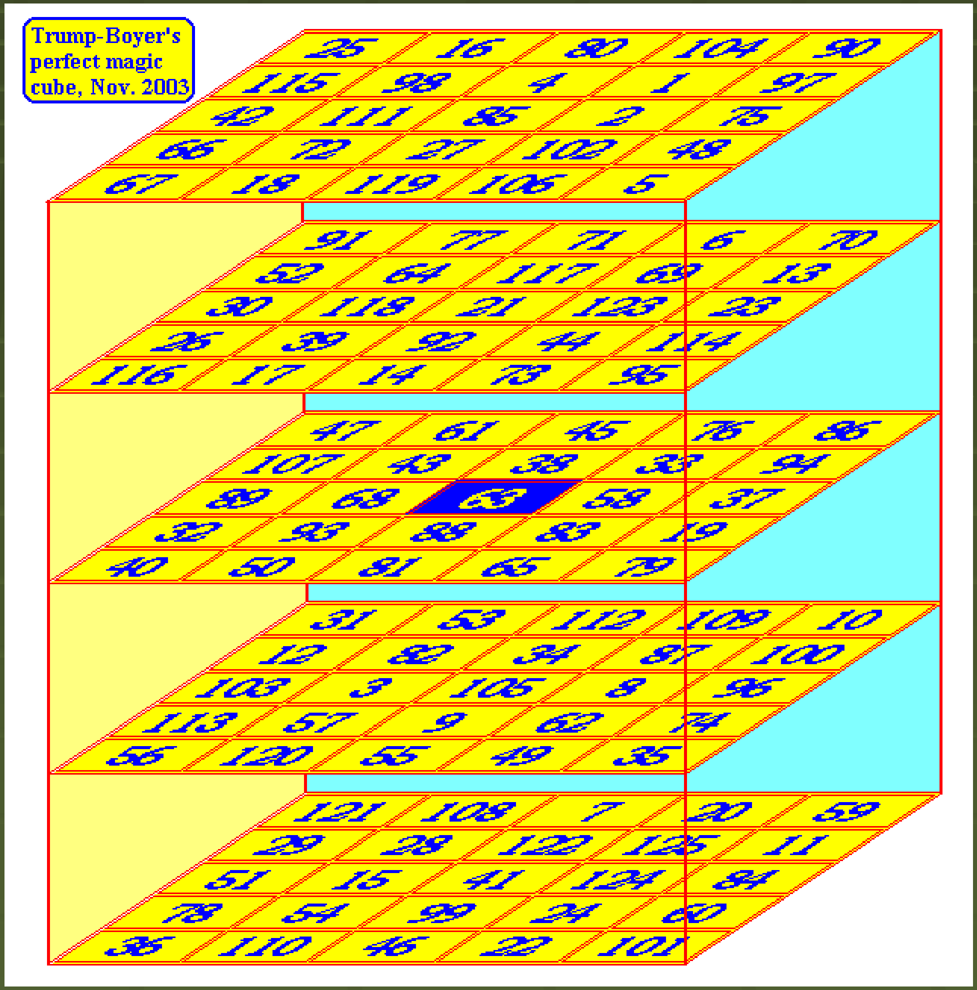
Cube trouvé en nov. 2003,
avec Walter Trump

Tous les entiers
de 1 à 125 (= 5^3)

Son centre est 63

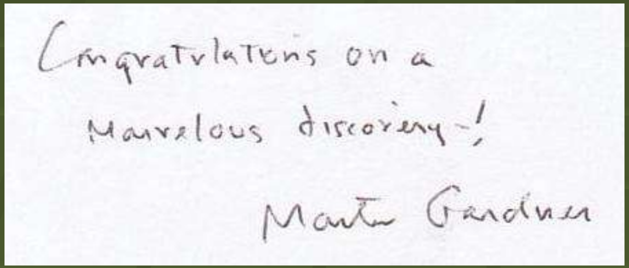
Ses 109 alignements ont la même somme égale à 315 :

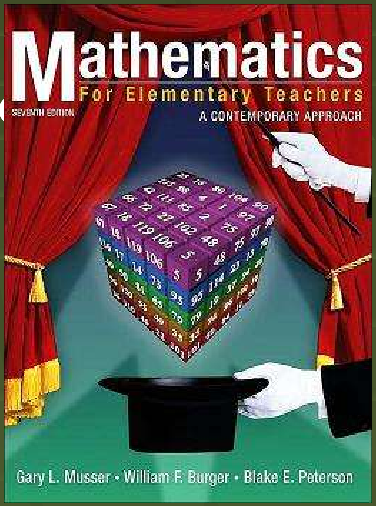
- 25 lignes
- 25 colonnes
- 25 piles
- 4 grandes diagonales
- 30 petites diagonales



Nombreuses retombées

- Article signé dans *La Recherche*
- Grandes satisfactions
  - Annonce par Eric Weisstein, *MathWorld Headline News*
  - Beaux articles dans *Le Figaro*, *Le Point*, …
  - Couverture d'un livre mathématique améri[c…]
  - Lettre sympathique de Martin Gardner





- Mais un curieux mélange de joie et d'amertume avec
  - La une du *Monde*… qui titre :
    - « Une découverte mathématique qui ne sert à rien »

Problème du carré de carrés

"Martin LaBar, in *The College Mathematics Journal*, January 1984, asked if a 3x3 magic square exists with nine distinct square numbers. (...) Neither such a square nor a proof of impossibility has been found. (...) I here offer $100 to the first person to construct such a square."

a^2	b^2	c^2
d^2	e^2	f^2
g^2	h^2	i^2

Martin Gardner
Quantum (1996)

Carrés de carrés

?

a^2	b^2	c^2
d^2	e^2	f^2
g^2	h^2	i^2

68^2	29^2	41^2	37^2
17^2	31^2	79^2	32^2
59^2	28^2	23^2	61^2
11^2	77^2	8^2	49^2

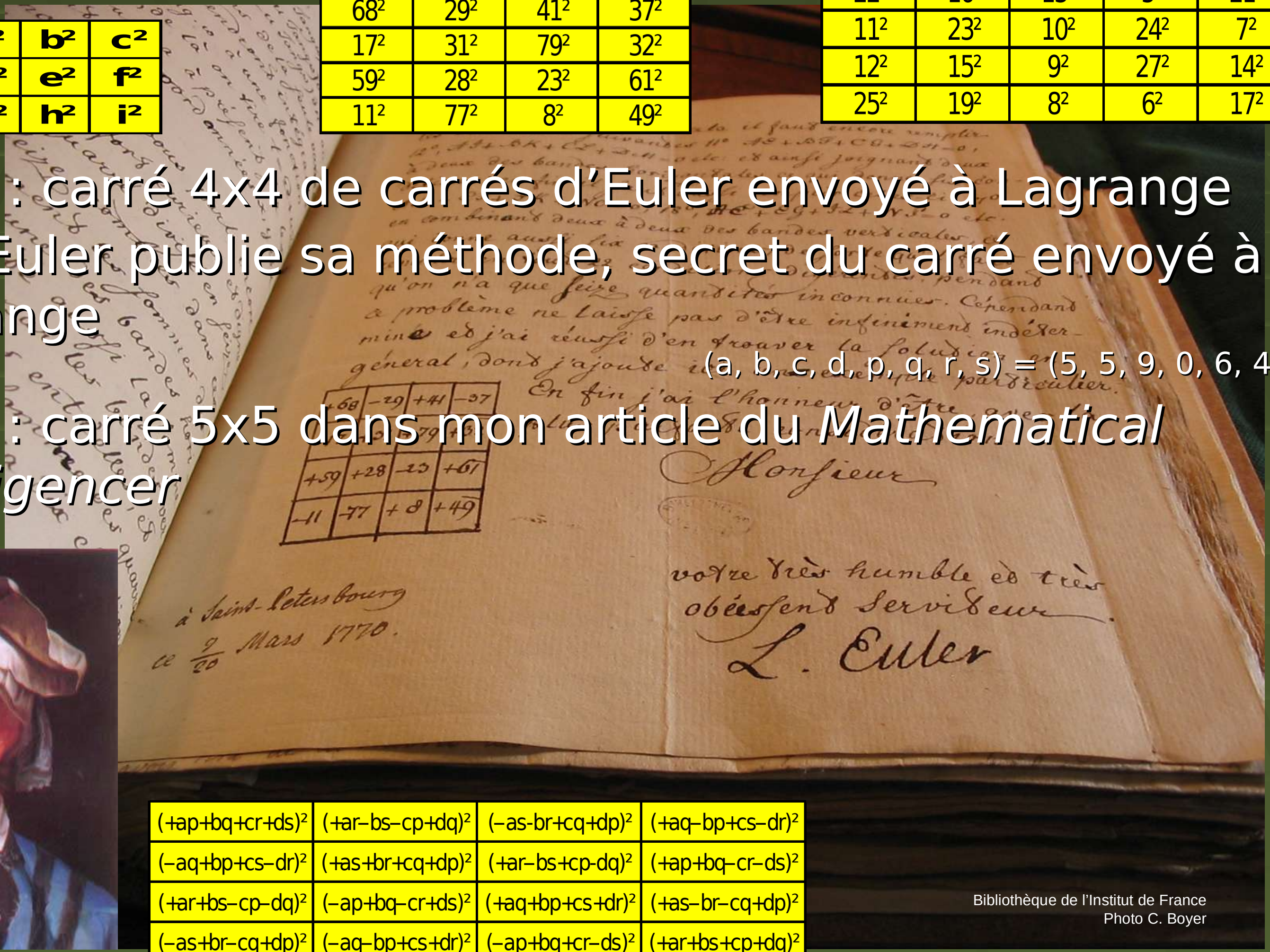
1^2	2^2	31^2	3^2	20^2
22^2	16^2	13^2	5^2	21^2
11^2	23^2	10^2	24^2	7^2
12^2	15^2	9^2	27^2	14^2
25^2	19^2	8^2	6^2	17^2

1770 : carré 4x4 de carrés d'Euler envoyé à Lagrange

Puis Euler publie sa méthode, secret du carré envoyé à Lagrange

$(a, b, c, d, p, q, r, s) = (5, 5, 9, 0, 6, 4, 2, -3)$

2005 : carré 5x5 dans mon article du *Mathematical Intelligencer*



$(+ap+bq+cr+ds)^2$	$(+ar-bs-cp+dq)^2$	$(-as-br+cq+dp)^2$	$(+aq-bp+cs-dr)^2$
$(-aq+bp+cs-dr)^2$	$(+as+br+cq+dp)^2$	$(+ar-bs+cp-dq)^2$	$(+ap+bq-cr-ds)^2$
$(+ar+bs-cp-dq)^2$	$(-ap+bq-cr+ds)^2$	$(+aq+bp+cs+dr)^2$	$(+as-br-cq+dp)^2$
$(-as+br-cq+dp)^2$	$(-aq-bp+cs+dr)^2$	$(-ap+bq+cr-ds)^2$	$(+ar+bs+cp+dq)^2$

Bibliothèque de l'Institut de France
Photo C. Boyer

Solution 3x3 proche avec 9 carrés

127^2	46^2	58^2
2^2	113^2	94^2
74^2	82^2	97^2

- Obtenu par informatique, et indépendamment
  - 1996 : Lee Sallows, Université de Nijmegen, Pays-Bas
  - 1996 : Michaël Schweitzer, Göttingen, Allemagne
- OK pour les 9 entiers carrés, mais… 7 sommes correctes sur 8
  - S2 = 21609 pour 3 lignes, 3 colonnes, 1 diagonale (tiens, épatant, cette somme est aussi un carré = 147^2, pourquoi ?)
  - Hélas S2 = 38307 pour l’autre diagonale
- Beaucoup d’autres solutions connues avec 7 sommes correctes

Edouard Lucas a été le premier à proposer le problème 3x3

En 1876, dans la rarissime revue *Nouvelle Correspondance Mathématique* du mathématicien belge Eugène Catalan

Donc plus d'un siècle avant Martin LaBar à qui Martin Gardner attribuait le problème

Solution paramétrique d'un carré semi-magique

6 $r^2+s^2)^2$

$(p^2+q^2-r^2-s^2)^2$	$[2(qr+ps)]^2$	$[2(qs-pr)]^2$
$[2(qr-ps)]^2$	$(p^2-q^2+r^2-s^2)^2$	$[2(rs+pq)]^2$
$[2(qs+pr)]^2$	$[2(rs-pq)]^2$	$(p^2-q^2-r^2+s^2)^2$

Plus petits carrés possibles avec la méthode de Lucas

6 sommes (3 lignes, 3 colonnes)

(p, q, r, s) = (1, 2, 4, 6)

$S2 = (1^2+2^2+4^2+6^2)^2 = 57^2$

47^2	28^2	16^2
4^2	23^2	52^2
32^2	44^2	17^2

8 sommes, Lucas prouve mathématiquement que sa méthode
ne permet pas un carré entièrement magique

7 sommes (3 lignes, 3 colonnes, et 1 diagonale)
Lucas n’avait pas vu que sa méthode le permettait

(p, q, r, s) = (1, 3, 4, 11), on retrouve exactement le carré de Sallows et Schweitzer !

127^2	46^2	58^2
2^2	113^2	94^2
74^2	82^2	97^2

Et cela explique pourquoi S2 y était un carré
$S2 = (1^2+3^2+4^2+11^2)^2 = 147^2$

Solution proche avec 8 sommes

373^2	289^2	565^2
360721	425^2	23^2
205^2	527^2	222121

- Obtenu par informatique, et indépendamment
  - 1997 : Lee Sallows, Université de Nijmegen, Pays-Bas
  - 1997 : Andrew Bremner, Arizona State University, USA
- OK pour les 8 sommes (3 lignes, 3 colonnes, 2 diagonales), mais… 7 entiers carrés sur 9
  - $S2 = 3 \cdot \text{centre} = 3 \cdot 425^2 = 541875$
- Seule solution connue de ce type

Le problème reste ouvert

Martin Gardner proposait 100$ pour un carré magique 3x3 utilisant 9 entiers carrés distincts

Je propose « gagner plus pour travailler moins » !

- 1000€ + une bouteille de champagne pour un carré magique 3x3 utilisant au moins 7 entiers carrés distincts
  (différent du seul exemple connu, et de ses rotations, symétries et multiples k²)

C'est une de mes 12 énigmes annoncées en 2010 totalisant 8000€

A suivre dans www.multimagie.com