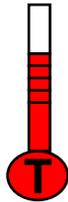


# L'INTELLIGENCE D'UN DESSIN



optimum design



**Hervé Stève**

*Kafemath à la Coulée Douce*

17 décembre 2009



# Introduction

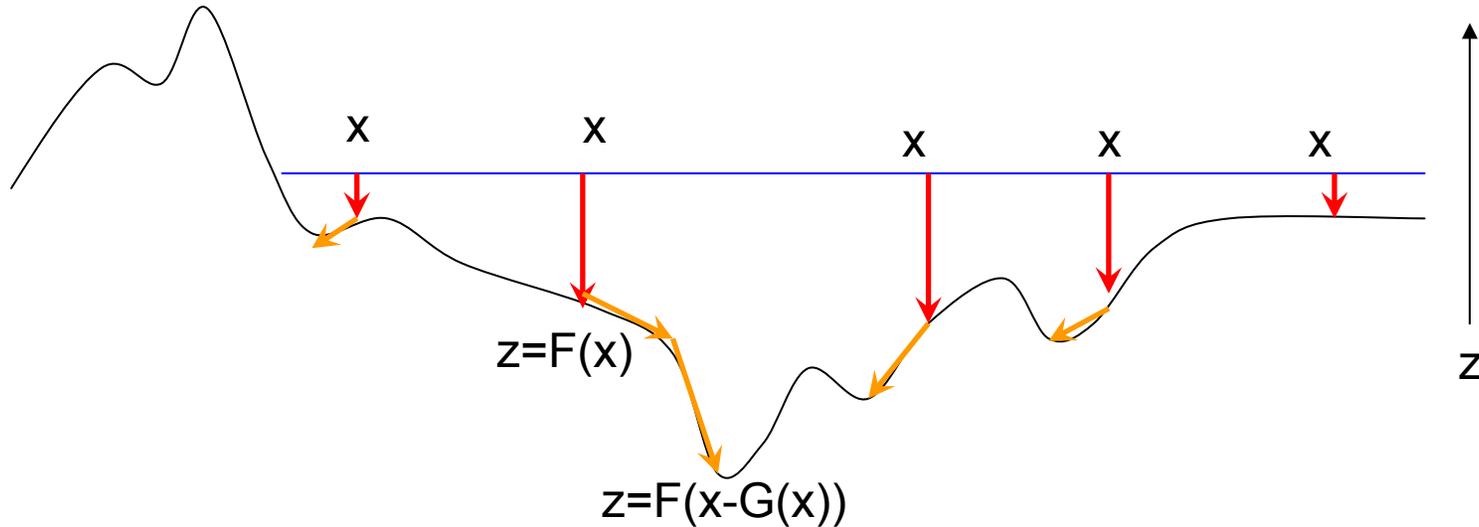
Problème du fond de la mer ? recherche du minimum global  $\text{Min}(F(x))$

sondage :  $x$  aléatoire  $\Rightarrow$  couteux, peu précis

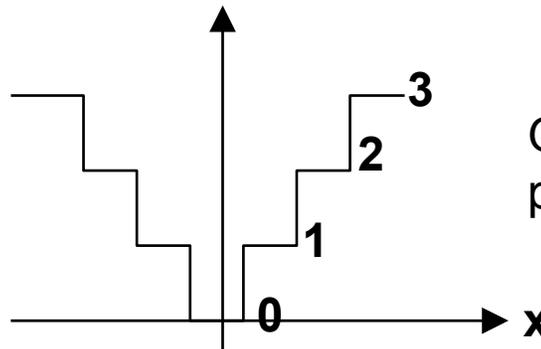
descente :  $x-G(x)$  minima locaux = global si fond convexe  $G(x_{\min})=0$

$\Rightarrow$  problème si  $F$  complexe,  $G$  doit exister et peut être couteux

autres méthodes ?



exemple)  $F(x)=\text{Ent}(|x|)$



$G$  gradient non défini  
plusieurs minima locaux

# Optimisation

Problème/programme :

**Min  $F(X)$  avec  $X$  dans  $A$  (contraintes)**

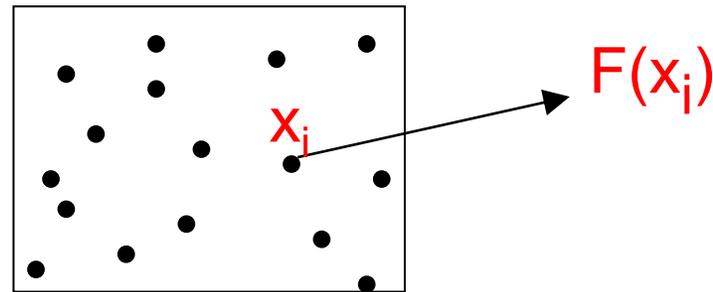
- Programmation linéaire (F et A linéaires)
- Programmation quadratique (F quadratique)
- Programmation non linéaire (cas général)
- Programmation stochastique (aléatoire)
- Programmation dynamique : sous-solutions optimales (trouver des plans de décollage optimaux pour les avions)

# Utilisations

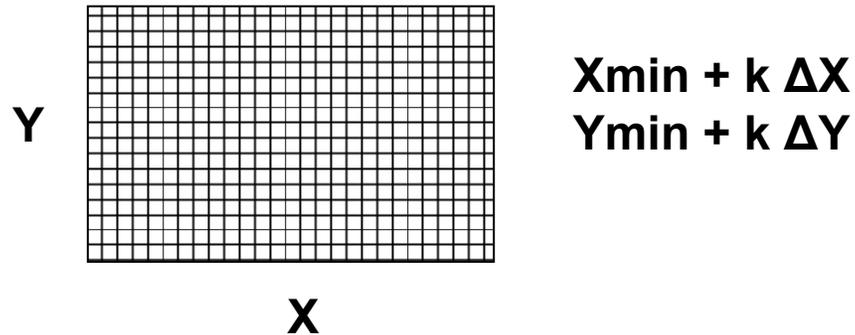
- Dynamique des corps rigides (articulés)
- Pbm de conception : optimisation de forme, optimisation multidisciplinaire (aérospatial)
- Recherche opérationnelle
- Microéconomie : rationalité, comportements, profits (entreprise) et utilité (consommateurs)
- Mécanique :
  - Optimisation de taille, de paramètres, ...
  - Optimisation de forme (même topologie)
  - Optimisation topologique (avec des trous)

# Sondage / "Carpet Bombing"

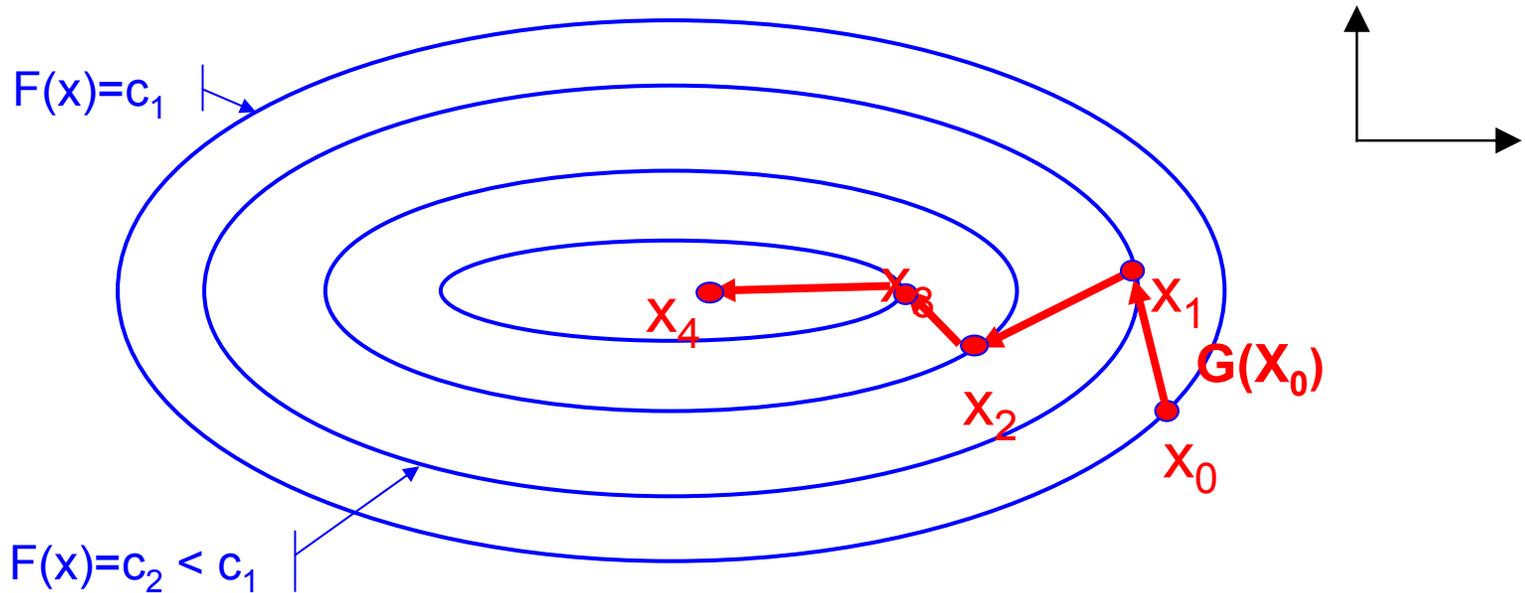
- Tirage aléatoire



- Grille régulière



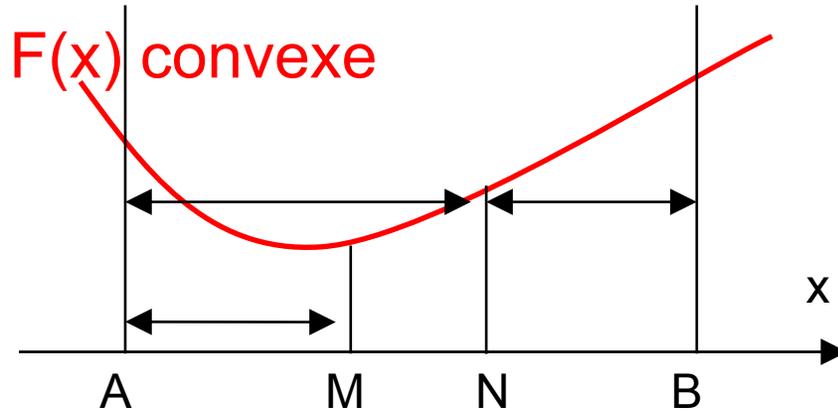
# Descente de gradient



- $G(x) = \rho \text{ Grad}(x)$  ,  $\rho$  constant, optimal ....
- Préconditionnement :  $G(x)=P(x)\text{Grad}(x)$   
Newton :  $P(x)= \rho \text{ Grad}^{-1}(\text{Grad}(x))$
- Gradient conjugué, GMRES, QMR, ...

# Section dorée

Cas 1 paramètre : découpage 3 intervalles



$$\rho = \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AN} = \frac{1-\rho}{\rho}$$

$$\text{soit } \rho^2 + \rho - 1 = 0$$

$$\text{avec } 0,5 < \rho < 1$$

On trouve  $\rho = (\sqrt{5}-1)/2 \Rightarrow$  **section dorée**

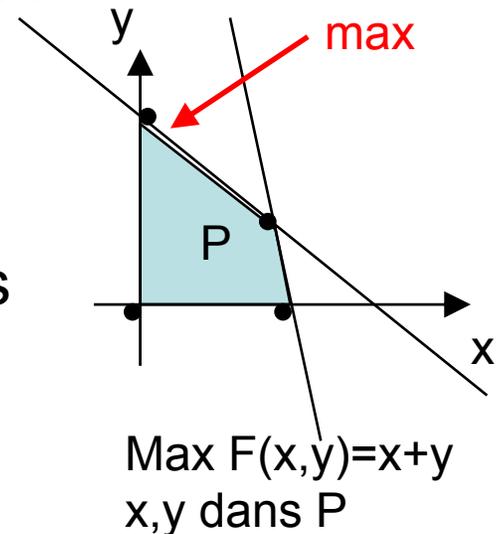
**Nombre d'or**  $\varphi = 1 + \rho \sim 1,6180$

Soit le découpage optimal pour éliminer l'intervalle NB ou AM  
Avec une réduction de  $1-\rho \sim 0,382$ . A devient M ou B devient N  
On recommence plusieurs fois ...

L'optimum sera le milieu de MN

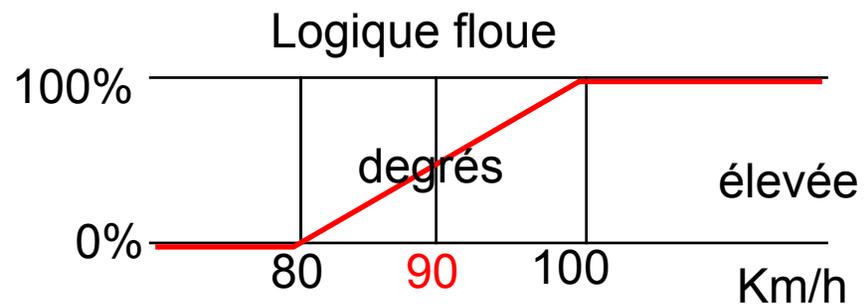
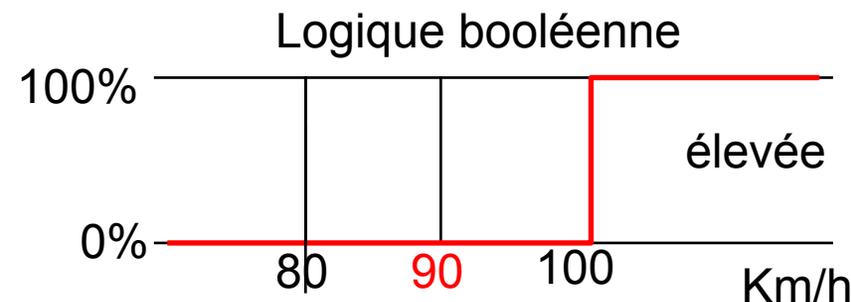
# Algorithme du simplexe

- G. Dantzig (1960)
- Programmation linéaire : "maximiser une forme linéaire  $F$  sur un sous ensemble de  $\mathbf{R}^n$  défini par des inéquations linéaires" (Algèbre)
- Pour un polyèdre convexe borné  $P$  le maximum de  $F$  sur  $P$  est atteint en un sommet
- Applications :
  - planification économique
  - Transport, stockage de marchandises
  - Répartition de l'activité d'une usine
  - Mécanique des matériaux, ...



# Logique floue

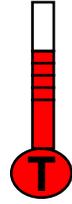
- Applications : automatisme (freins ABS), robotique (reconnaissance de forme), circulation routière (feux rouges), contrôle aérien, environnement, médecine, assurance ...
- Théorie math. des ensembles flous (Zadeh 1970?)
- Autres états que vrai ou faux (booléen)
- "Floue"=imprécision différent de probabiliste  
*Quand je dis "j'ai autour de 30 ans"  
quelle est la probabilité d'avoir 30 ans ?*
- Ex) vitesse élevée d'un véhicule



# Méthodes méta heuristiques

- Optimisation difficile (*meta*=au-delà) pour trouver (*heuriskein*) un bon minimum local
- Optimisation non linéaire
- Algorithmes stochastiques itératifs :
  - simple recherche locale,
  - recherche globale complexe
  - Méthodes hybrides : plusieurs heuristiques
- Recuit simulé, algo. génétique, essaim de particules, colonie de fourmis, ...

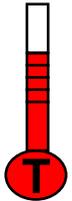
# Recuit Simulé



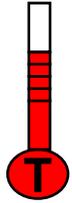
- "Simulated Annealing"
- Origine : "Minimiser l'énergie d'un matériau par des cycles de refroidissement et de réchauffage" (recuit métallurgique)
- Optimisation : mise au point en 1983 (IBM) et V. Cerny (1985)
- Statistique de Boltzmann (thermodynamique)

# Recuit Simulé (suite)

- Processus :
  - Evolution d'un système thermodynamique
  - Minimisation d'une énergie  $E$  du système
  - Paramètre fictif : température  $T$  du système
  - Compromis entre l'amélioration d'une solution donnée en baissant l'énergie (solution locale optimale) et une dégradation pour mieux explorer l'espace des solutions



# Recuit Simulé (suite)



- Etude théorique : convergence vers un optimum global sous certaines conditions
- Inconvénients : choix empiriques des paramètres ( $T_0$ , loi de décroissance, critère d'arrêts, longueur des paliers)  $\Rightarrow$  convergence non maîtrisée, lente
- Applications :
  - Conception de circuit électronique (R,L,C)
  - Organisation de réseaux informatiques

# Algorithme génétique



- Famille des algorithmes évolutionnistes
- Idée : sélection naturelle (Darwin, XIXème) pour une population de solutions
- Origines : John Holland & co + Université du Michigan (1960  $\Rightarrow$  1975) : **enjambements** + mutations en combinant les gènes

# Algorithme génétique (suite)



- Analogie avec la biologie :
  - *Vivant* : cellules, noyaux, chromosomes (chaînes ADN)
  - *Gènes* = éléments des chromosomes qui codent les fonctionnalités de l'organisme (couleurs des yeux, ...)
  - *Locus* = position d'un gène
  - *Génotype* = ensemble des gènes d'un individu
  - *Génome* = ensemble du patrimoine génétique d'une espèce
  - *Allèles* = différentes versions d'un même gène
  - Algorithme génétique basé sur la *théorie de l'évolution*, on conserve les gènes les plus adaptés aux besoins de l'espèce

# Algorithme génétique (suite)



- Codage des gènes :

Population de base : chaînes de caractères = chromosomes

- Codage binaire : le plus utilisé et étudié ex) 010001101

Holland (1975) montre qu'il est le plus efficace pour les possibilités d'enjambement (meilleur brassage)

Inconvénient : codage peu naturel pour certains problèmes

- Caractères multiples

- Codage sous forme d'arbre (études récentes) :

# Algorithme génétique (suite)



- Opérations de brassage de gène
  - Sélections : naturelle "en aveugle" ou artificielle
  - Enjambements ("crossing over") : échanges de gènes avec une probabilité entre 0 et 1
    - Simples : échanges en un seul point
    - Multiples : plusieurs points de croisements
  - Mutations : aléatoires par substitution de gènes (taux de mutation entre 0,001 et 0,01). Sortir d'une solution locale

# Algorithme génétique (suite)

- Sélections : notation des individus (N) 
- Par rang : meilleurs scores, pas de hasard **élitisme**
- Par probabilité : roulette ou roue de la fortune biaisée par rapport au niveau d'adaptation **hasard**
- Par tournoi : choix sur des paires d'individus **champion**
- Uniforme : probabilité =  $1/N$  **égalité des chances**

# Algorithme génétique (suite)



- Paramètres/conditions d'utilisation :
  - Taille de la population : importante pour obtenir une solution optimale
  - Pas d'algorithme déterministe adapté et raisonnable
  - Recherche d'une solution relativement bonne rapidement
- Applications :
  - Recherche : voyageur du commerce (concours web)
  - Industrie : aérodynamique, structure, robotique (NASA, robot Aibo de Sony pour apprendre à marcher)
  - Informatique décisionnelle, ...

# Essaim de particules (PSO)

- "Particle Swarm Optimization" R. Eberhard & J. Kennedy (1995)



- Origine : modèle de déplacement d'un groupe d'oiseau (1980), socio-psychologie
- Idée de base : collaboration des individus  
Un groupe d'individus peu intelligents peut posséder une organisation globale complexe

# Essaim de particules (suite)



**Principe** : comportement des abeilles

On définit une taille de population de particules qui vont explorer l'espace de recherche.

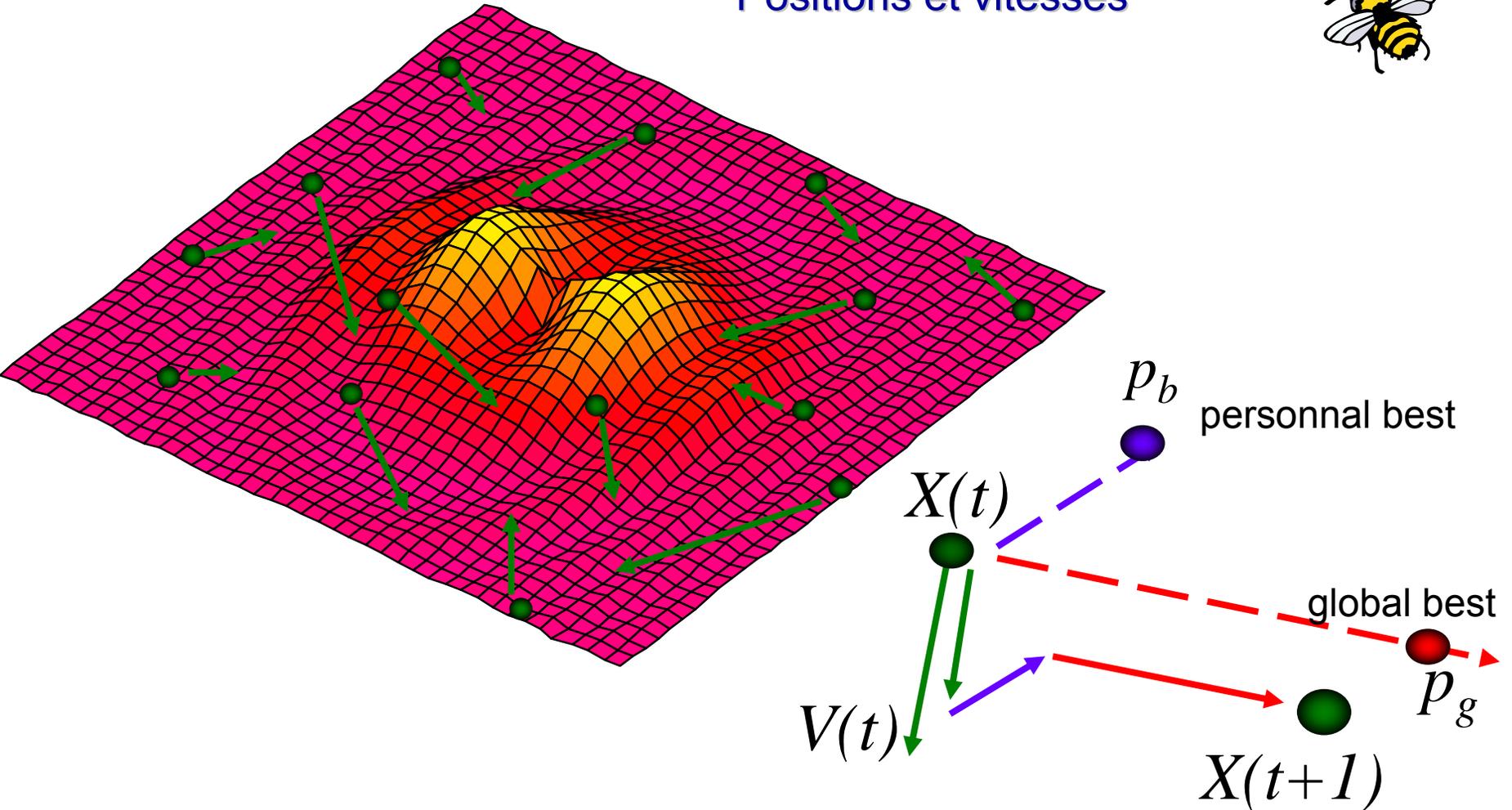
Chaque particule a une position (qui correspond à une solution potentielle au problème), une vitesse et une mémoire.

A chaque mise à jour de la population, chaque particule est attirée à la fois par la meilleure solution qu'elle a rencontrée dans le passé (appelée "personal best") et par la meilleure solution trouvée par l'ensemble de la population (appelée "global best").

Cette attirance a une influence sur son vecteur vitesse et la fait se diriger vers une forme de compromis entre ces deux positions

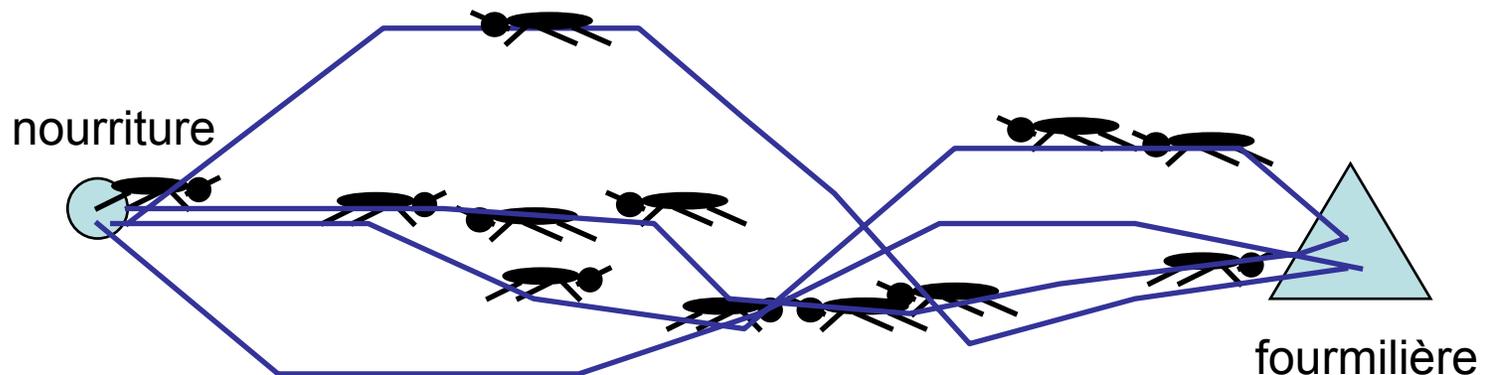
# Essaim de particules (suite)

Positions et vitesses



# Colonie de fourmis (ACO)

- "Ant Colony Optimization", M. Dorigo (PhD, 1992)
- Idée : trouver les meilleurs chemins d'un graphe en accumulant des points, phéromones pour les fourmis qui s'évaporent au cours du temps
- Avantage : un graphe qui change dynamiquement (transport urbain, réseaux)



# Références

- C. Darwin : *The origin of species* (1859)
- J.H Holland : *Adaptation In Natural And Artificial Systems*, University of Michigan Press (1975)
- D. Golberg : *Algorithmes génétiques*, Addison-Wesley France (1994)
- J. Kennedy & R. Eberhart : *Particle Swarm Optimization*, Proc. IEEE ICNN (1995)

# Multicritère, front de Pareto

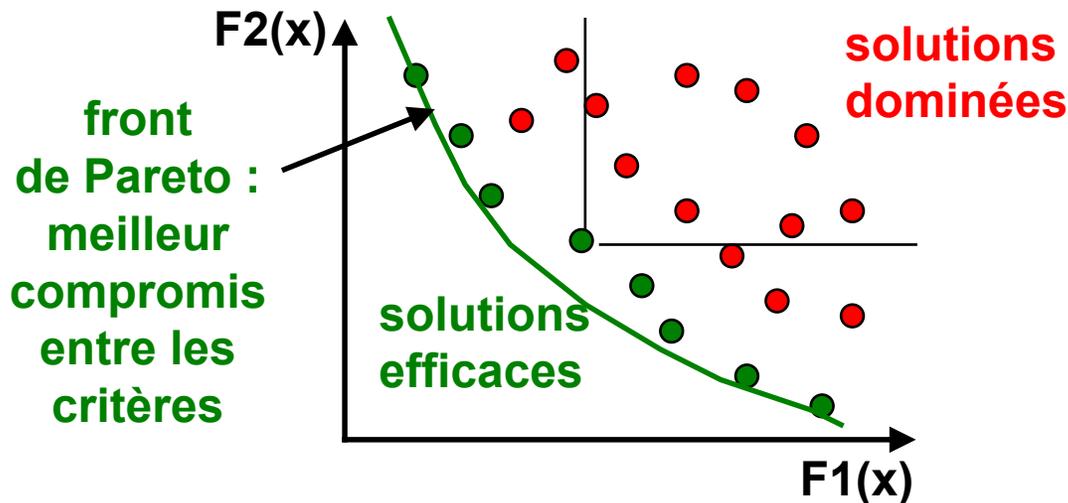
Optimisation multi objectifs

$$\text{Min } \{ F1(x) , F2(x) , \dots F_n(x) \}$$

Problème mal défini => dominance, efficacité

**Dominance** :  $x \geq x'$  si  $\forall k, F_k(x) \geq F_k(x')$

**Efficacité** : une solution efficace ou Pareto-optimale est une solution non dominée par aucune autre solution



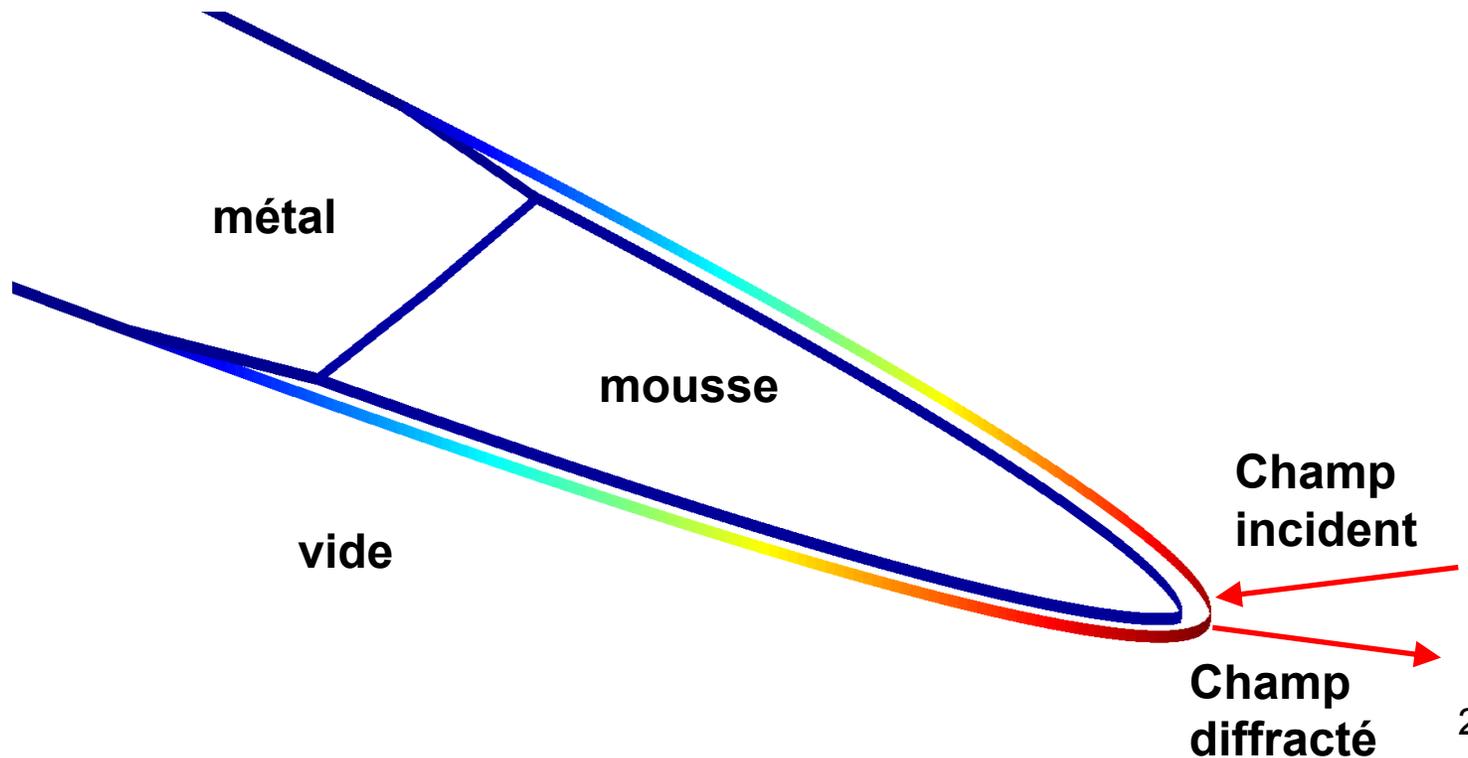
Exemple) caisse automobile : atteindre un objectif de masse sous contraintes de prestations crash, vibratoire, endurance, acoustique, ...

# Application en électromagnétisme

Recherche d'un matériau absorbant

Optimisation de forme

Bord d'attaque d'un profil d'aile d'avion



# Quelques avions ...



**performances**

**fabrication**

**structure**

**acoustique**

**aérodynamique**

**discrétion radar**



**moteurs**

**antennes**

**champs forts**