Le théorème de GÖDEL

Le théorème de GÖDEL

GÖDEL nait le 28 avril 1906 dans une famille aisée de la capitale de la Moravie, BRNO.IL suit des études secondaires assez brillantes (en allemand), et à l'âge de 14 ans se passionne pour une biographie de Goethe, rédigée par Houston Chamberlain.

La « théorie des couleurs » de Goethe et sa discussion avec Newton sont sans doute à l' origine de sa première vocation pour la physique.

Le théorème de GÖDEL

- GÖDEL s'installe à VIENNE (1924) pour y étudier la physique théorique (cours de HANS THIRRING sur la relativité et de HEINRICH GOMPERZ sur l'histoire de la philosophie Européenne).
- Il suit les cours de Philipp FURTWÄNGLER sur la théorie des nombres, qui lui révéleront la nature des débats sur les fondements de l'arithmétique et des mathématiques en général. Ils le conforteront aussi dans sa conception platonicienne des mathématiques

Le théorème de GÖDEL

- **Le platonisme de GÖDEL**
- « ***la position platoniste est la seule qui soit tenable. Par là, j'entends la position selon laquelle les mathématiques décrivent une réalité non sensible qui existe indépendamment aussi bien des actes que des dispositions de l'esprit humain et qui est seulement perçue, et probablement perçue de façon très incomplète, par l'esprit humain*** »**.**

Le théorème de GÖDEL

- **LA CRISE DU FONDEMENT DES MATHEMATIQUES : LE BESOIN D'UNE AXIOMATIQUE RIGOUREUSE …**
- En **GEOMETRIE**…
- Depuis les grecs, on a tenté, en vain, de dériver le 5ème postulat (axiome) d' EUCLIDE , dit « postulat des parallèles », des autres axiomes. On a souvent essayé de démontrer ce postulat à partir des autres, ce qui l'aurait transformé en un simple théorème.

Le théorème de GÖDEL

- Mais LOBATCHWESKI (1829) et BOLYAI (1833) inventent de nouvelles géométries avec des axiomes différents, et **incompatibles** entre eux ...
- Par exemple dans la géométrie de RIEMANN, le plan devient la surface d’ une sphère, les points sur le plan deviennent les points sur cette surface, et les droites des grands cercles.
- Deux segments, si on les prolonge, se rencontrent.

Le théorème de GÖDEL

- L'opinion courante selon laquelle les axiomes de la géométrie pouvaient être établis par l'apparente évidence qui les caractérisait perdait ainsi tout fondement. En effet , jusqu'alors on déduisait de ce que les « assertions » (axiomes) étant vraies dans notre espace, elles étaient **consistantes**.

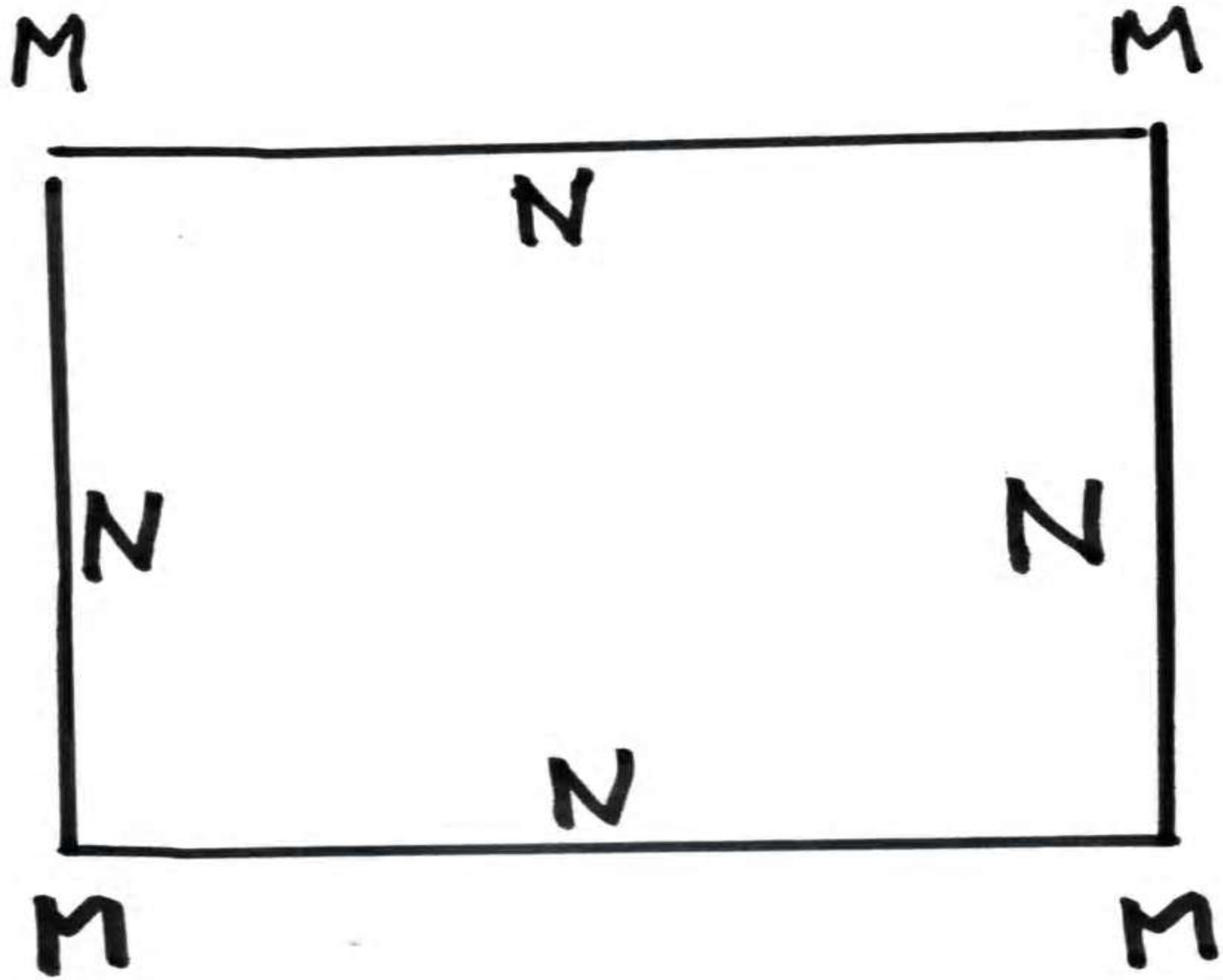
Le théorème de GÖDEL

- **Jusqu’ alors, (HILBERT 1906) , une démonstration de consistance pour une théorie axiomatique formelle consistait à donner un modèle ou une interprétation.**
- **il fallait que tous les axiomes de la théorie en question soient vérifiés lorsque ses concepts primitifs sont interprétés en termes de ceux d’une autre théorie.**

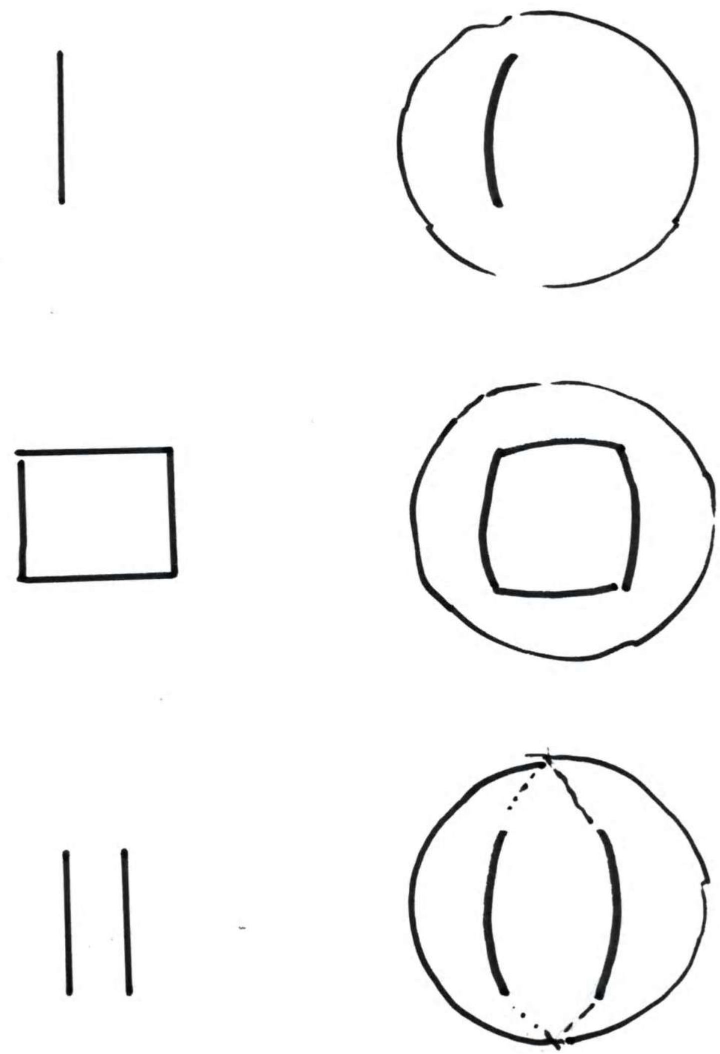
Le théorème de GÖDEL

- **Un exemple de modélisation: M et N ont le même nombre d'éléments**
  - **Aucun élément de N ne contient plus de deux éléments de M**
  - **Aucun élément de M n'est contenu dans plus de deux éléments de N**

Le théorème de GÖDEL



Le théorème de GÖDEL

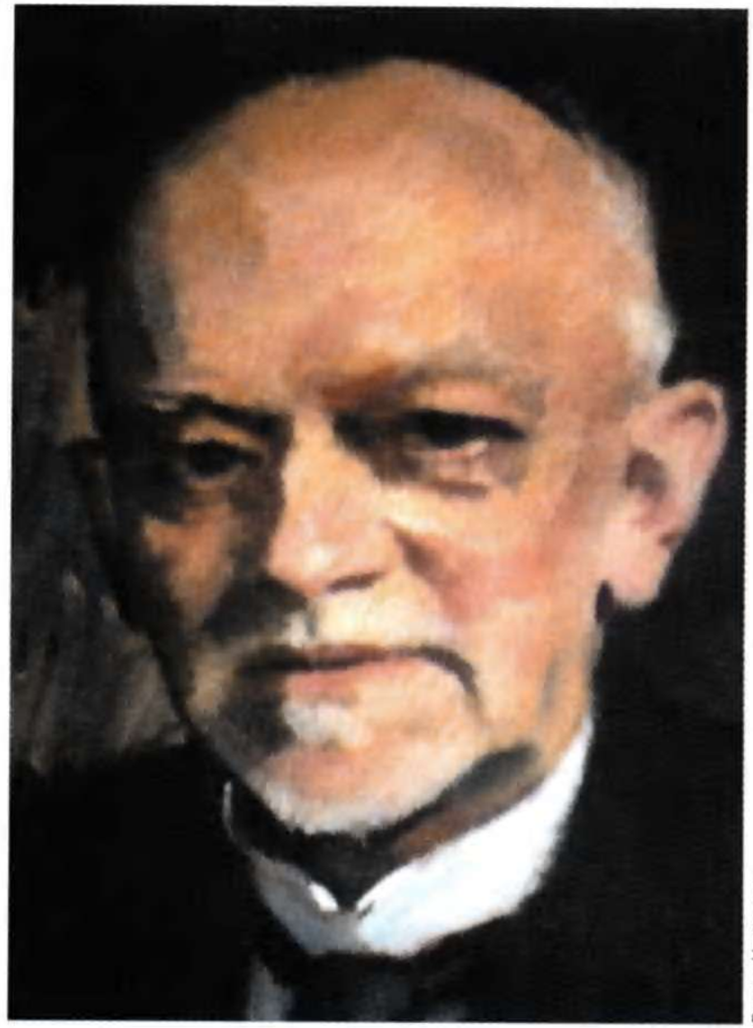


Le théorème de GÖDEL

- La géométrie de RIEMANN se prête aussi à une modélisation…
- Mais on ne fait que déplacer le problème, et on échappe pas à la question : les axiomes d’ EUCLIDE sont ils consistants ?

Le théorème de GÖDEL

David Hilbert



Benno Hartmann

Le théorème de GÖDEL

- **LE PROJET DE HILBERT**
- HILBERT entreprit de venir à bout de ces problèmes, en évitant la **circularité**.
- Les mathématiques doivent être rédigées en théorie axiomatique formelle, ensuite, il faut démontrer que cette théorie est **consistante**, c'est à dire **non contradictoire.**

Le théorème de GÖDEL

HILBERT se proposa de faire des démonstrations de la théorie axiomatique l’objet d’une étude mathématique nommée métamathématique ou théorie de la démonstration. Cette peinture de MAGRITTE, « *les promenades d’ EUCLIDE* », donne une description, dans un métalangage , de l’ objet paysage.

Le théorème de GÖDEL

- L'approche de HILBERT, pour une démonstration « absolue » de consistance, passe par une formalisation complète du système déductif.
- On construit un système de signes, appelé calcul), qu'il faut envisager comme des signes vides, c.à.d vidées de leur contenu. Ainsi dans ce calcul, rien ne sera caché, il ne contiendra que ce qu'on y a mis explicitement.

Le théorème de GÖDEL

- Pendant près de deux mille ans, on a tenu la systématisation Aristotélicienne des formes valides de déduction pour complètes.
- En 1787, KANT pouvait affirmer que cette logique « n’ a pas pu faire un seul pas en avant, et qu’ ainsi selon toute apparence, elle semble close et achevée ».
- Les « PRINCIPIA MATHEMATICA» vont fournir un système de notations puissant, grâce auquel toutes les propositions des mathématiques peuvent être exprimées de façon standard.

Le théorème de GÖDEL

- GÖDEL s’attaque à la démonstration de la cohérence de l’analyse, à l’aide de moyens finis. Son idée est de démontrer la cohérence relative de l’analyse, et de l’arithmétique, cette dernière étant de démonstration plus aisée.
- Il s’ appuiera à cette fin sur l’axiomatique de PEANO. Le projet évoluera en suite, et GÖDEL va finalement décider de prouver que la démontrabilité et la non contradiction peuvent, même indirectement, être exprimées **dans le langage objet de la théorie**, sans que cela entraîne des contradictions fatales…

Le théorème de GÖDEL

- **LES GRANDES ETAPES DE LA DÉMARCHE DE GÖDEL**
- **1) Description du système formel de la théorie des nombres du premier ordre**
- **2) Démonstration de la représentabilité des fonctions récursives primitives et générales dans ce système**
- **3) Arithmétisation de la syntaxe du système formel**
- **4) Et, finalement, démonstration du théorème.**

Le théorème de GÖDEL

- **1) Description du système formel de la théorie des nombres du premier ordre:**

- **GÖDEL utilise l’ arithmétique axiomatisée par Giuseppe PEANO**

Le théorème de GÖDEL

- **fonctions récursives primitives et générales**
- Une fonction est calculable quand il existe une méthode (un algorithme) qui fournit, pour tout argument donné, la valeur de la fonction en un nombre fini d’ étapes. Les fonctions récursives primitives ont toujours pour arguments des nombres naturels. A partir de fonctions récursives primitives très simples, appelées fonctions de base, on construit d’ autre fonctions récursives.

Le théorème de GÖDEL

- Le concept de fonction récursive permet de définir des fonctions de n'importe quelle complexité et la définition de la fonction fournit en même temps l'algorithme pour son calcul.

Le théorème de GÖDEL

- L'**addition**, par exemple, peut se définir ainsi :
- $+(n,0)=n$
- $+(n,s(m))=s(+(n,m))$

- **Calculons** 1+1=2
- $+(1,1)= +(1, s(0))$ *(puisque le successeur de 0 est 1)* $= s(+(1,0)) = s(1)=2$.

Le théorème de GÖDEL

- Pour conférer à la métamathématique la rigueur requise, GÖDEL tente de la formaliser dans une théorie si puissante que la métathéorie y soit exprimable, et qui soit constructible en un nombre fini d’étapes. L’arithmétique axiomatisée par PEANO présente ces deux propriétés,

Le théorème de GÖDEL

- L’enjeu sera donc de traduire des énoncés du métalangage de l’arithmétique de PEANO dans le langage objet de l’arithmétique. Les objets du langage sont des nombres, ceux du métalangage des assertions sur les nombres. GÖDEL doit trouver un moyen d’exprimer de telles assertions à l’aide de nombres.

Le théorème de GÖDEL

- Dans la métamathématique, pour raisonner sur les démonstrations arithmétiques, on s’ est constitué un appareil conceptuel , on a inventé des prédicats pour les appliquer aux formules.
- Ces propriétés métamathématiques, GÖDEL les traduit par des propriétés arithmétiques.
- Le logicien code les formules par des entiers, et trouve alors une propriété dans l’ arithmétique, qui traduit l’ assertion métamathématique(comme par exemple « être démontrable »).

Le théorème de GÖDEL

- Par une table de correspondance, GÖDEL attribue à chaque symbole de l'arithmétique un nombre impair :
- « 0 » est traduit par **1**, le successeur « s » par **3**, la négation «   » par **5**, le signe « ou » par **7**, le quantificateur existentiel par **9**, «(» par **11**, «) », « y » par **13**, et les variables de type n par un des nombres de la forme p^n**,** où p est un nombre premier supérieur à **13**.Une formule de l' arithmétique de PEANO qui est une suite de ces symboles , est donc transposée en une suite des nombres impairs correspondants n1, n2, …,nk. Cette suite est à son tour transformée en un nombre unique m, au moyen de l' instruction suivante (qui est une fonction récursive primitive).

- m= $\mathbf{2}^{n1}$x $\mathbf{3}^{n2}$x…x $\mathbf{pk}^{nk}$ **où pk est le kième nombre premier.**

Le théorème de GÖDEL

- Le processus peut ensuite être itéré sur une suite de formules de l’arithmétique de PEANO, donnant ainsi le nombre de GÖDEL correspondant à la suite de formules. Le codage d’une suite de formules est essentiel, car les démonstrations ne sont rien d’autres que des suites finies de formules dont chacune soit est un axiome, soit découle des précédentes.
- Grâce à ce procédé, on peut traduire en propriétés, fonctions où relations sur les nombres les concepts métalinguistiques de la syntaxe de l’arithmétique de PEANO.

Le théorème de GÖDEL

- Le processus peut ensuite être itéré sur une suite de formules de l’arithmétique de PEANO, donnant ainsi le nombre de GÖDEL correspondant à la suite de formules. Le **codage** d’une suite de formules est **essentiel**, car **les démonstrations ne sont rien d’autres que des suites finies de formules** dont chacune soit est un axiome, soit découle des précédentes.

Le théorème de GÖDEL

42) $Ax(x) \equiv Z\text{-}Ax(x) \vee A\text{-}Ax(x) \vee L_1\text{-}Ax(x) \vee L_2\text{-}Ax(x) \vee R\text{-}Ax(x) \vee M\text{-}Ax(x)$,
x est un AXIOME.

43) $Cs(x, y, z) \equiv y = z \text{ Imp } x \vee (Ev)[v \leq x \;\&\; \text{Var }(v) \;\&\; x = v \text{ Gen } y]$,
x est une CONSÉQUENCE IMMÉDIATE de y et z.

44) $Dm(x) \equiv (n)\{0 < n \leq l(x) \rightarrow Ax(n \; Tr \; x) \;\; \vee (Ep, q) [0 < p, q < n \;\&\; Cs(n \; Tr \; x, p \; Tr \; x, q \; Tr \; x)]\} \;\&\; l(x) > 0$,
x est une FIGURE DE DÉMONSTRATION (une suite finie de FORMULES dont chacune est soit un AXIOME, soit une CONSÉQUENCE IMMÉDIATE de deux des formules précédentes).

45) $x \; D \; y \equiv Dm(x) \;\&\; [l(x)] \; Tr \; x = y$,
x est une DÉMONSTRATION de la FORMULE y.

46) $\text{Dem}(x) \equiv (Ey)y \; D \; x$,
x est une FORMULE DÉMONTRABLE. ($\text{Dem}(x)$ est l'unique concept parmi ceux définis de 1 à 46 dont nous ne pouvons affirmer qu'il est récursif).

Le fait intuitif que toute relation récursive est définissable dans le système P (si l'on donne leur signification habituelle aux formules de ce système) se trouve exprimé précisément et *sans* qu'il soit fait référence à aucune interprétation des formules de P, dans le théorème suivant :

Théorème V. *Pour toute relation récursive $R(x_1, \ldots, x_n)$ il existe un SIGNE DE RELATION r à n-places (avec les VARIABLES LIBRES*[1] *$u_1, u_2, \ldots, u_n$) tel que, pour tous les n-uplés de nombres $(x_1, \ldots, x_n)$, on ait :*

$$R(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \text{Dem}\left[Sb(r^{u_1 \ldots u_n}_{Z(x_1) \ldots Z(x_n)})\right], \qquad (3)$$

Le théorème de GÖDEL

- Après avoir établi en **4** théorèmes une méthode pour construire des fonctions récursives, GÖDEL énonce en suite une suite de **45** propriétés. « dont chacune est définie par les précédentes suivant la procédure définie dans les théorèmes I à IV.
- La **45èm**e fonction est une fonction D à deux variables : yDx signifie « la suite de formules de nombre de GÖDEL y est une démonstration pour la formule de nombre de GÖDEL x ».
- Sous le numéro **46,** il définit la démontrabilité :
- La formule **46** s'interprète ainsi :
- « **La formule x est démontrable si et seulement si il existe une suite de formules y qui démontre x ».**

Le théorème de GÖDEL

- **LE (premier)THEOREME D' INCOMPLETUDE : LA DÉMONSTRATION**
- GÖDEL exhibe un énoncé universel *F*, qui est littéralement équivalent à *F* n' est pas démontrable dans T.
- Si *F* est démontrable, et si l' on admet que T est consistant, alors *F* serait vrai, mais énonçant sa propre indémontrabilité, ne serait pas démontrable Contradiction
- Donc *F* n' est pas démontrable, et encore une fois , du fait que *F* énonce sa propre indémontrabilité, F est vrai. Ceci est le premier théorème :
- **Si T est consistante, il y a un énoncé universel vrai mais non démontrable dans T**

Le théorème de GÖDEL

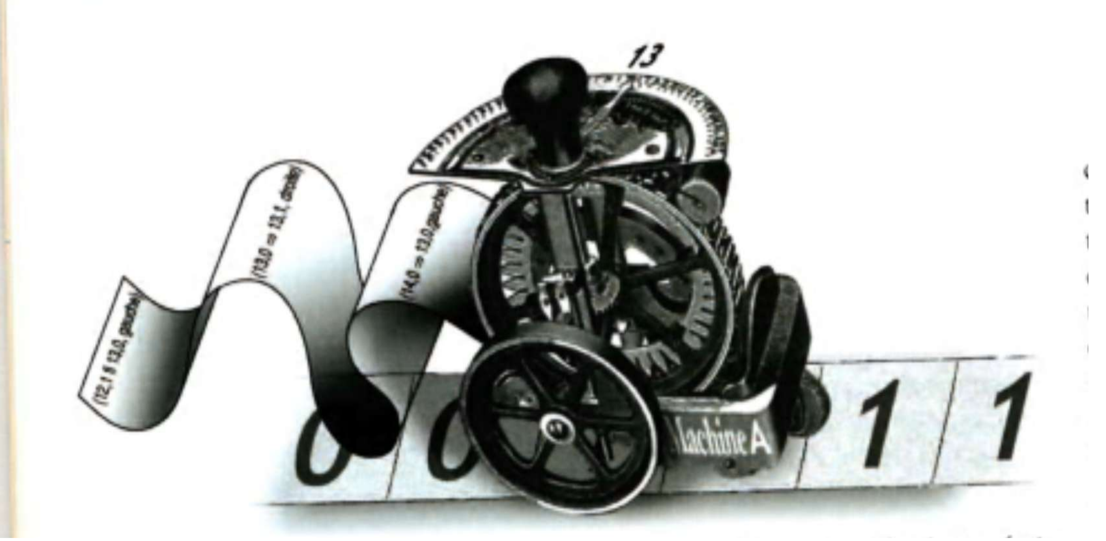
- **LE DEUXIÈME THEOREME DE GÖDEL.**
- **Il énonce que la consistance de l'arithmétique n'est pas démontrable dans le système formalisé de l'arithmétique:**
- **le théorème de GÖDEL démontre informellement, mais rigoureusement l' implication « consistance (T) *F* ». Cette démonstration peut être formalisée dans T. Comme T démontre « consistance (T) *F* », s' il démontrait aussi « consistance (T) », alors il démontrait *F*, ce qui est exclu par le premier théorème.**

Le théorème de GÖDEL

- **MACHINE DE TURING. THESE DE CHURCH**
- Etant donnée une classe infinie dénombrable donnée de questions mathématiques ou logiques, existe-t-il une procédure permettant de résoudre n’importe laquelle des questions de cette classe en un nombre fini de pas ?
- Une telle procédure s’appelle procédure de décision.

Le théorème de GÖDEL

- **TURING définit une machine à calculer théorique, dans le but d’analyser les procédures de calcul connues intuitivement en des opérations élémentaires. TURING définit une machine à calculer théorique, dans le but d’analyser les procédures de calcul connues intuitivement en des opérations élémentaires**.



Le théorème de GÖDEL

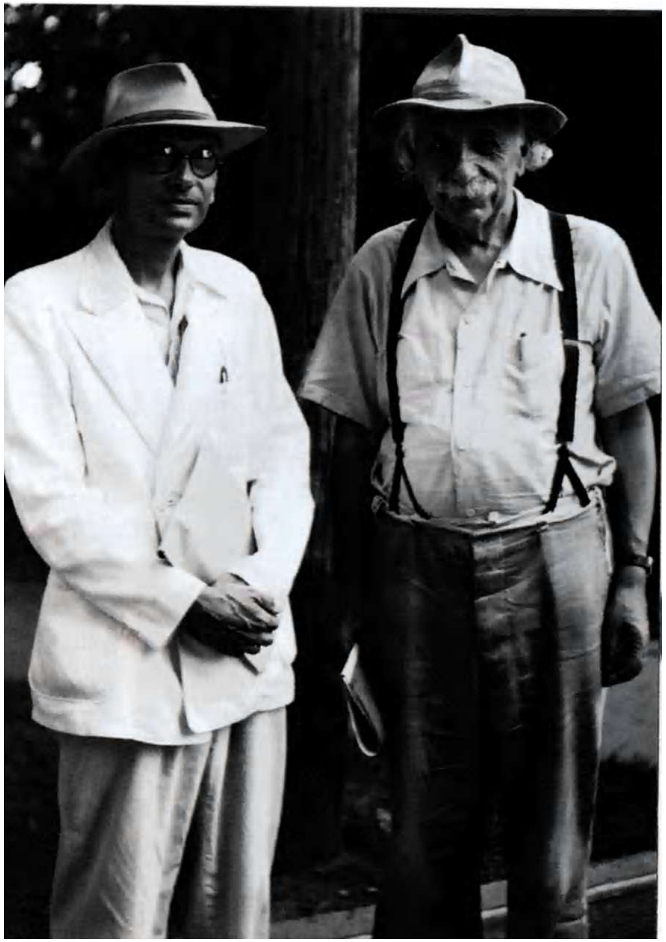
- **LES MATHEMATIQUES APRES GÖDEL**
  Si GÖDEL fait s’ écrouler le rêve de HILBERT, il semble (d’ après Jean-Yves GIRARD) que d’   un point de vue strictement mathématique, le théorème de GÖDEL ne serve pas à grand-chose:
- **« Quelques améliorations techniques intéressantes, et une utilisation assez courante:**
- **Si je sais qu’ un énoncé B à prouver implique la consistance de T, alors je cherche des axiomes qui ne soient pas dans T ».**

Le théorème de GÖDEL

- CHURCH, en utilisant un procédé dérivé de la méthode de la diagonale de CANTOR, exhibe un prédicat indécidable (non calculable par la machine de TURING).
- De ce théorème appliqué à l’arithmétique formelle, on déduira l’indécidabilité (il n’ y pas de procédure de décision pour la démontrabilité) et l’incomplétude.

Le théorème de GÖDEL

GÖDEL ET LA RELATIVITE



LES UNIVERS EN ROTATION
En étudiant les équations de la relativité d' EINSTEIN, GÖDEL remarque que parmi les solutions de ces équations, certaines étaient des modèles d'espace temps dont les lignes d'univers étaient fermées ; une ligne fermée dans l' espace temps revient au point initial d'espace temps, c.à.d non seulement ; une personne empruntant cette trajectoire remonterait le temps simplement en la suivant.

Le théorème de GÖDEL

- **LA VIE APRES LA MORT**
- **L'homme peut résoudre tout problème qu'il peut se poser**
- **Le cerveau est une machine de Turing**
- **Le fonctionnement de l'esprit est irréductible au cerveau**
- **Si l'esprit doit pouvoir prendre une des états internes plus nombreux que ceux dont est susceptible le cerveau, il faut que l'esprit soit une entité distincte du cerveau (non réductible au cerveau)**
- **Si l'esprit est une entité distincte du cerveau, il doit pouvoir s'expliquer sans le cerveau.**

Le théorème de GÖDEL

- **UNE PREUVE DE L'EXISTENCE DE DIEU**
- Dans les dernières années de sa vie, GÖDEL se consacre à la recherche d' une version formellement correcte de la preuve ontologique de l' existence de DIEU. Cette preuve remonte à Anselme de Canterbury (1033, 1109) : DIEU est tel qu' a priori rien de plus grand(de plus parfait) ne peut être pensé.
- GÖDEL construit donc un système d' axiomes de logique modale, qui lui permettent de démontrer qu' il est nécessaire que DIEU existe.

Le théorème de GÖDEL

- Documents consultés et largement utilisés (**un grand merci aux auteurs !**) dans cet exposé :
- Le Théorème de Gödel (Nagel, Newmann, Gödel, Girard), Seuil, 1989.
- Logique sans peine (Lewis Carroll), Hermann, 1972.
- Gödel, logique à la folie (collectif), Editions Pour la Science, 2004.
- Les chemins de la logique (collectif), Editions Pour la Science, 2005
- Logique et fondements des mathéma-tiques (Y. Gauthier), Diderot, 1997.

Le théorème de GÖDEL

- Documents consultés et largement utilisés (**un grand merci aux auteurs !**) dans cet exposé (suite) :

- Ecrits logiques et philosophiques (Gottlob Frege), Seuil, 1971.
- La logique (collectif), Bibliothèque Tangente, hors série numéro 15, 2005.
- Logique mathématique (Stephen C. Kleene), Jacques Gabay, 2004.
- Les démons de Gödel (Cassou Noguès), Seuil, 2007.

Paris, 8 mai 2008.