La Logique (1)

La logique d’ ARISTOTE

On lui doit:

-le principe du tiers exclus

-la notion de proposition, c.à.d un énonçé abstrait sur lequel on ne fait aucune hypothèse a priori sur la vérité ou la fausseté ; elle devient la “brique fondatrice” de la logique .Il distingue les propositions universelles: quelque soit le triangle, la somme des angles mesure 180 degrés…

La Logique (2)

- Dans les “premiers analytiques”, ARISTOTE définit une sorte d’ arithmétique des propositions dans laquelle la véracité supposée de deux d’ entre elles (les prémisses) entraine celles de la troisième.
- A: Tout homme est mortel,
- B: SOCRATE est un homme,
- C: SOCRATE est mortel.

Cet exemple n’ est d’ ailleurs pas d’ ARISTOTE qui considérait qu’ il n’y a de science que du général: la proposition B , qui ne commence ni par “pour tout”, ni par “il existe” n’ entre pas dans le champ de la logique ARISTOTELICIENNE.

La Logique (3)

- La structure syllogistique:

  B est A (majeure)

  C est B (mineure)

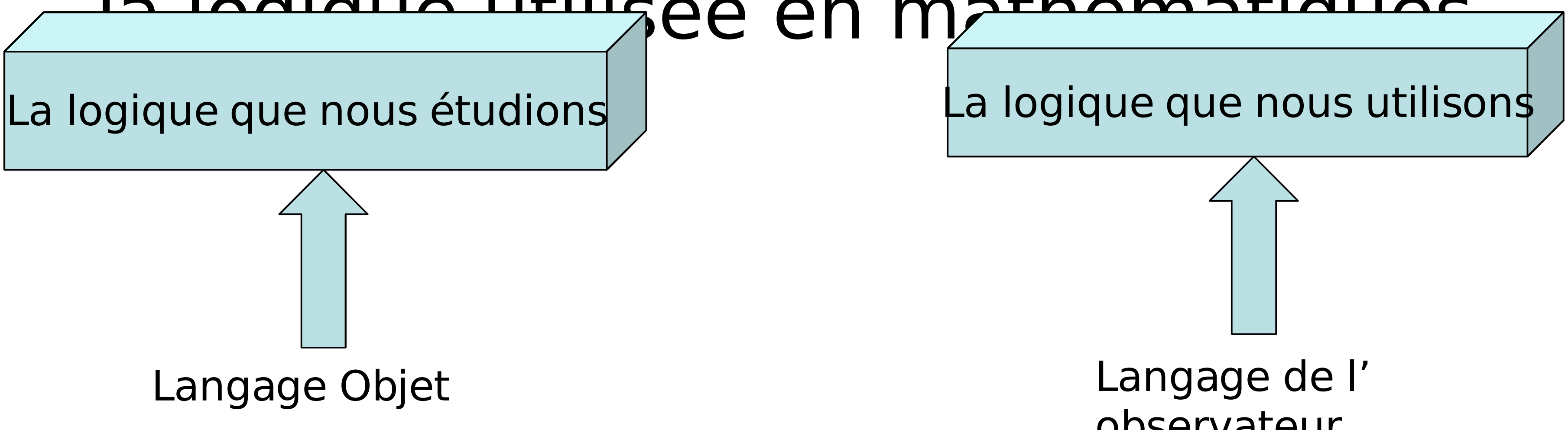
  C est A

  64 structures différentes, combinant “tout”, “aucun”, “quelque”(universelle affirmative/négative, particulière affirmative :négative), dont certaines équivalentes ou non concluantes… Par ex:

  - Tout B est A
  - Quelque C est B

La Logique (4):le calcul propositionnel

- La fonction de la logique est de dire “qu’ est-ce qui s’ en suit de quoi ?”,
- La logique mathématique, ou logique symbolique, est la logique traitée par les mathématiques. Mais c’ est aussi la logique utilisée en mathématiques



La Logique (5)

- Cette partie de la logique traite des connexions entre propositions.Ces propositions sont construites à partir d’ autres propositions qui interviennent sans être analysées, comme des briques dans une construction.
- Ces propositions sont des énoncés déclaratifs exprimés dans le langage objet.La même proposition peut exprimée par des énoncés déclaratifs différents.On appelle ces énoncés des “ formules” .

La Logique (6)

Dans ce langage objet, on fournit cinq procédés pour construire des énoncés nouveaux à partir d’ énoncés donnés, au moyen de connecteurs propositionnels.

Equivalence **~**

Implication

Conjonction **&**

Disjonction **V**

Négation **¬**

On peut itérer ces opérations un nombre infini de fois , de façon à obtenir des formules composées.

La logique (7)

On admet que chaque “Formule” élémentaire est vraie ou fausse (tiers exclus), mais nous ne supposons pas ce que nous savons au sujet de chacune de ces formules élémentaires.

Comment la vérité ou la fausseté d’ une formule composée dépend- elle des valeurs de vérité des formules simples qui la composent? Ceci est déterminé par l’ utilisation itérée des définitions données dans les tables de vérité qui suivent.

La logique (8)

A	B	A	~	B
--	--	--	**?**	--

Colonne de gauche: les assignations, valeurs de vérité de la formule **élémentaire**

Colonne de droite: les valeurs de vérité que prend la formule **composée**

La logique (9)

Je veux sortir de chez moi, et je m’ inquiète de la pluie.
Les seuls faits pertinents sont: le fait qu’ il pleuve et le fait que je prenne mon parapluie.
Considérons toutes les situations possibles:

Il pleut	je prends mon parapluie
vrai	vrai
vrai	faux
faux	vrai
faux	faux

Ce que nous symboliserons ainsi:

Pl	**Pp**
1	**1**
1	**0**
0	**1**
0	**0**

La Logique (10): la conjonction

Pour pouvoir raisonner, la première nécessité sera de combiner
les faits.
On dit dans le langage courant “il fait chaud” , “Il fait beau”;
“il fait chaud et beau”: c’ est la **conjonction**.
En français, il y a plusieurs façons d’ exprimer la **conjonction:**
“La logique, c’ est profond, *mais* c’ est à la portée de tous.”
Le “*mais”* présuppose une certaine opposition entre les deux propositions…

Dans “Le chat est monté sur la table,or le poulet était

La logique (11): l' alternative

Si vous remarquez que votre voisin a depuis peu un train de
nettement plus aisé, vous pouvez dire "MARTIN a gagné au l
à moins qu' il n' ait hérité d' un oncle d' Amérique.L' un au m
des deux énoncés est vrai: c' est la **<u>disjonction</u>** .Comme
MARTIN peut avoir gagné au loto et hérité de son oncle d' Am
-rique, on convient en Mathématiques que les deux membre
peuvent être vrais **alternativemen**t ou **ensemble**.

La logique (12) : plusieurs façons d’ utiliser les connecteurs

Si nous voulons exprimer :

“MARTIN n’ a ni gagné au Loto, ni hérité d’ un oncle d’ Amérique”
nous écrirons:

¬(MARTIN a gagné au loto **V** MARTIN a hérité d’un oncle…)

Ce qui peut s’ écrire également:
¬ (MARTIN a gagné au loto **) & ¬ (**MARTIN a hérité d’ un oncle..)

La logique (13): la valeur d’ un énoncé se calcule. Ex: la négation

Les énoncés considérés ne peuvent bien sûr pas toujours avoir une valeur de vérité
quelconque: **Pl & Pp (“il pleut et je prends mon parapluie”** a une valeur
complétement déterminée dès que celles de Pl et Pp le sont.

De façon générale , lorsque les valeurs des celles de

¬ F**, F &** G, F **V** G, et F G le sont.

Considérons la négation:

E	**¬ E**
0	1
1	0

En termes de situation, **¬ E** est vrai exactement
Dans toutes les situations où **E** ne l’ est pas.

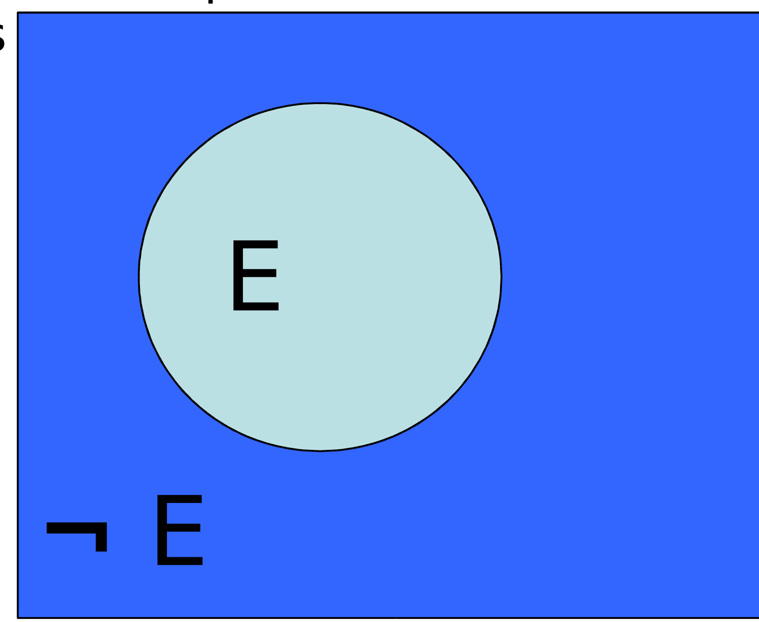
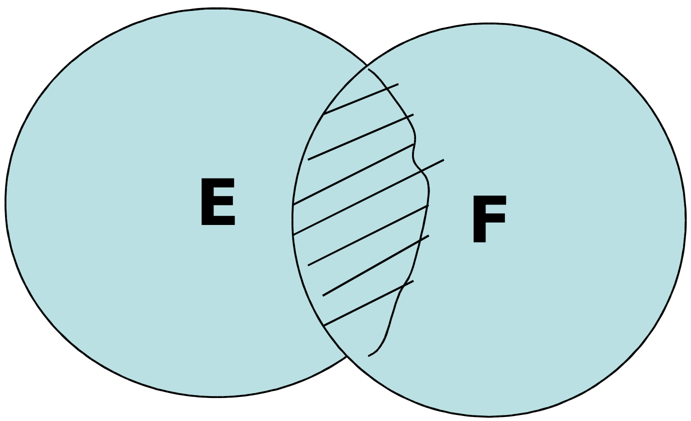
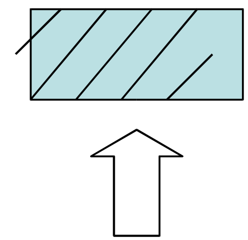


Diagramme de Wen de la négation

La logique (14)

La conjonction de deux énoncés est vraie si E et F sont tous les deux sont vrais à la fois





Dans le Diagramme de Wenn, E et F
 sont vrais à la fois

E	F	E **&** F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La Logique (15)

La disjonction

F	G	F **V** G
0	0	0
0	1	1
1	0	1
7	1	1

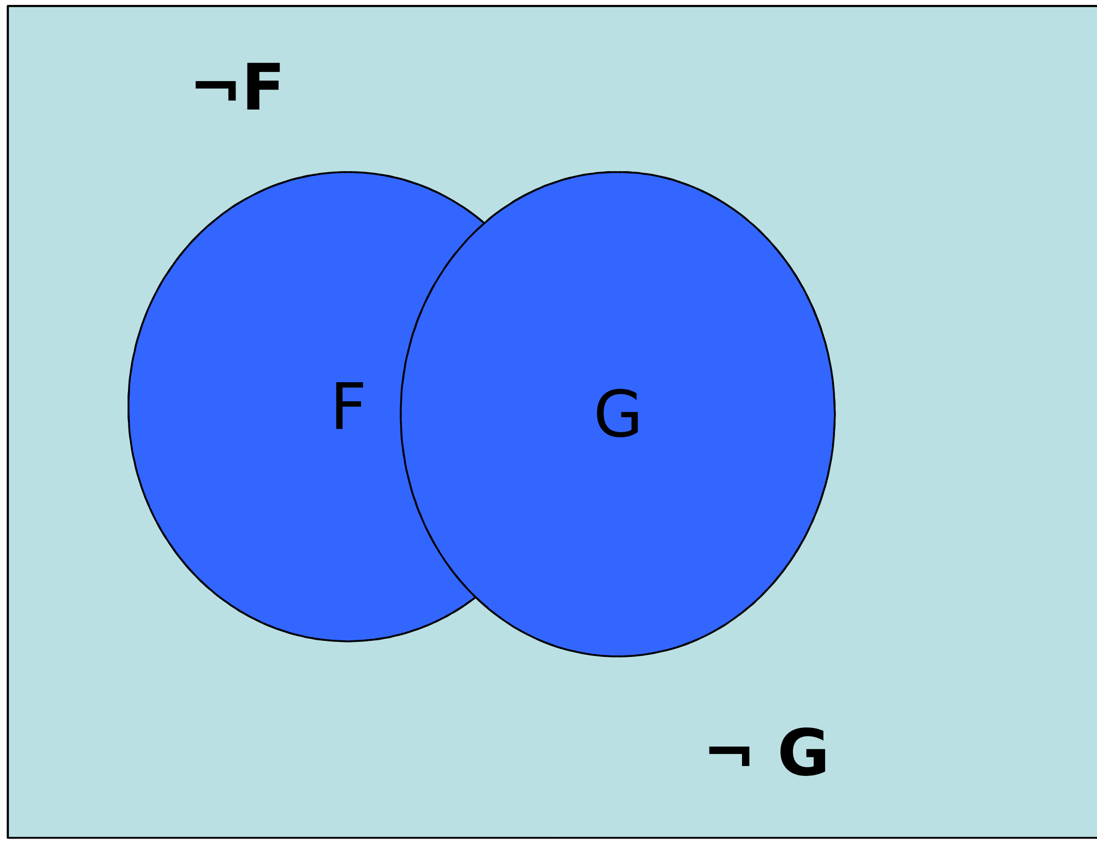


Diagramme de Wenn de la disjonction

La Logique (16)

<u>L' IMPLICATION</u>

En termes de situation,
nous voulons que :
"S' il pleut", "je prends mon parapluie"

Règle

Pl	Pp	Pl		Pp
0	?			
5	**1**		**1**	
1	0		0	

Contre exemple de la règle

Les situations où il ne pleut pas ne sont pas pertinentes pour juger de la règle.

La logique (17)

<u>L’ EQUIVALENCE</u>

On a vu qu’ on peut définir l’ équivalence F~ G comme F G et G F.
Construisons la table de vérité à partir de la **conjonction** de ces deux i**mplications**…

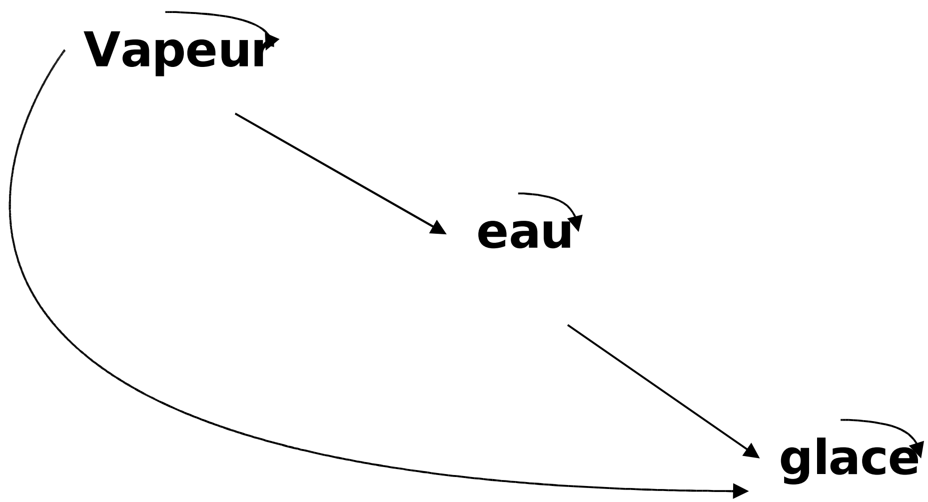
F	G	F G	G F	F G **&** G F
0	0	1	1	**1**
0	1	1	0	**0**
1	0	0	1	**0**
1	1	1	1	**1**

La Logique (18) : langages, théories et modèles

Les formules constituées à partir des symboles logiques “ **~”, “** ” , “**&”, “V”,**
“¬”, complétés éventuellement de quelques quantificateurs existentiels)
forment ce qu’ on appelle le langage **(du premier ordre).**
Une structure A est un interprétation du langage si elle est la donnée:
- d’ un ensemble de base,
-d’ un objet correspondant à chaque terme,
-d’ une fonction pour chaque symbole de fonction , et d’ une fonction caractéristique associée .

-Exemple: soient des énoncés formés à partir du symbole de prédicat ≥ et les constantes c et f.
-Interprétons, dans la structure E qui rassemble les concepts de vapeur, eau et glace, en déclarant que c vapeur (chaud), f glace (froid).
-Interprétons ≥ comme “être au moins aussi chaud que…”.

La Logique (19): la fonction caractéristique



g	vapeur	eau	glace
vapeur	1	1	1
eau	0	1	1
Glace	0	0	1

Dans notre exemple, l' interprétation du symbole $\geq$ être au moins aussi chaud que, nous avons posé **g** |= $\geq_{E}$

La Logique (20): la consistance

- Une formule ou une théorie T d’ un langage ***£*** sélectionne parmi les structures interprétant ***£ ,***celles qui la satisfont.
- La <u>Consistance:</u>
- _un énoncé est dit *consistant* s’ il est vrai dans au moins une structure. Il est *inconsistant* s’ il n’ est satisfait dans aucune structure. Par exemple: P & ¬ P ;

La Logique (21): les tautologies

- Les tautologies d’ un langage ***£*** sont des énoncés vrais dans toutes les structures pour ce langage.

- Exemple : (P Q) ~ (**¬**Q **¬** P) ce

ce qu’ on vérifie :

P	Q	P Q	~	¬Q		¬ P
0	0	1	**1**	1	1	1
0	1	1	**1**	0	1	1
1	0	0	**1**	1	0	0
1	1	1	**1**	0	1	0

Les valeurs de vérité sont identiques

La Logique (22): quelques équivalences et tautologies remarquables

⊨ P **V** **¬**P	Tiers exclus
P**,** P Q**,** ⊨ Q	Modus ponens
¬¬P = P	Double négation
¬(P**V**Q**)** = **¬**P **&** **¬**Q	Loi de Morgan (1)
¬(P **&**Q**)** = **¬**P **V** **¬**Q	Loi de Morgan (2)
P**V(**Q**&**R**)** = **(**P**V**Q**)** **&(**P**V**R)	Distributivité
P**&(**Q**V**R**)** = (P&Q) **V(**P**&**R**)**	Distributivité
P Q = **¬**Q **¬**P	Contraposition
⊨ P **(**Q P**)**	Conséquence merveilleuse
P Q = **¬**P **V** Q	

La logique (23): vérités et conséquences

- On dit qu’ une théorie T’ a pour conséquence une théorie T si tout modèle de T’ est un modèle de T; ce qui se note: $T' \models T$
- Deux énoncés sont sémantiquement équivalents s’ ils ont même valeur de vérité.

La logique (24)

- <u>Théorème de la déduction.</u>
  L'énoncé G est conséquence de l' énoncé F si F   G est une tautologie.

- <u>Théorème de substitution</u>
  Soit une théorie T, avec une constante P, et un énoncé F, et G une conséquence de T $\models$(T   G). Alors $\models$T'   G' où T' et G' sont obtenus en substituant F à P partout où il apparait dans F et G
- Une substitution dans une tautologie donne une tautologie.
-

La logique: les tautologies (25)

- La conséquence merveilleuse:

P (Q P)

$\models$

P	Q	P		(Q		P)
0	0	0	**1**	0	1	0
0	1	0	**1**	1	0	0
1	0	1	**1**	0	1	1
1	1	1	**1**	1	1	1

Toujours **vrai**

- Une substitution dans une tautologie donne une Tautologie.

La logique (26)

- Démontrer C à partir de A (B)C, A&B 1-A&B 2-A&B A *& élimination* 3-A *modus ponens 1,2* 4-A (B C) *1ère hypothèse* 5-(B C) *modus ponens 3,4* 6-A&B B *& élimination)* 7-B *modus ponens 6,1* 8-C *modus ponens 5,7*

La logique (27)

- Démontrer: “S’ il ne lui a pas dit (¬D) elle ne trouvera jamais (¬T). Si elle ne lui a pas posé la question (¬ Q), il ne lui dira pas. Or elle a trouvé, donc elle lui a posé la question.”
- Démontrons que l’ argument est valide, c.à.d:

¬D ¬T, ¬ Q ¬D, T Q

1- ¬D ¬T hypothèse

2- ¬Q ¬D hypothèse

3-T hypothèse

4-T D contraposition

5-D Q contraposition

6-D modus ponens 3,4

7-Q modus ponens 5,6

La logique (28)
SOCRATE est il mortel?

Traduisons le syllogisme,

“Tous les hommes sont mortels P

SOCRATE est un homme Q

Donc SOCRATE est mortel R “

P, Q R

n’ est pas valide!

Nous ne pouvons pas analyser adéquatement cet argument simple, en matière d’ analyse logique, au point où nous en sommes!

La logique (29): le calcul des prédicats

- En calcul propositionnel, nous avons étudié les relations logiques qui dépendent de la manière dont certaines propositions sont construites à partir d’ autres propositions ,au moyen des connecteurs **~**,   , **&**, **V**, **¬** .
- En calcul des prédicats, on pousse l’ analyse un degré plus loin pour prendre en compte ce qu’ on appelle en grammaire une structure sujet-prédicat, et on utilise deux nouvelles opérations:

  ∀

  ∃

  quelque soit Il existe

Logique: le calcul des prédicats (30)

- Dans SOCRATE est un homme ,

  “ ------ est un homme” est <u>*le **prédicat***</u>,

  “SOCRATE” est <u>***le sujet***</u>

  Exemple:

  “John aime Jane” , que l’ on note: **L(John,Jane)**

  exemple d’ Emploi des quantificateurs:

- $\exists x,$ L(x, JANE) *quelqu’ un aime JANE*

  $\exists y, \forall x$ L(x,y) *il y a quelqu’ un aimé de tout le monde*

Logique: le calcul des prédicats (31)

- Un prédicat est une correspondance, une corrélation qui donne naissance à une proposition lorsqu’ on choisit des paires d’ objets.

P(___ , ___) prédicat

P(R_1, R_2) formule simple

(32)
Les applications au langage usuel

Les formes catégoriques d' ARISTOTE.
Les énoncés auxquels nous voulons appliquer le calcul des prédicats sont relatifs à un domaine **D**, que nous considérons non vide.Ce domaine peut s' appeler l' univers du discours, c' est l' ensemble qui contient tous les objets que nous considérons dans notre application.

"Tous les hommes sont mortels,
SOCRATE est un homme,
Donc SOCRATE est mortel

Si **D** ne contient que les hommes, alors la mineure n' est pas indispensable
Si **D** ne contient que les objets mortels, l' argument lui-même est redondant.
Il faut penser que **D** contient l' ensemble des êtres: les individus humains, les objets mortels, mais aussi les dieux, les minéraux ...

La LOGIQUE (33)
SOCRATE est mortel!

- “H(x)” *x est un homme*
- “M(x)” *x est mortel*

  “s” *s exprime Socrate*

- On va démontrer l’ argument:

$\forall$ x, [H(x) M(x)], $\vdash$ H(s) M(s)

$\forall$ 1- x , [H(x) M(x)]

hypothèse 2- $\forall$ [H(s) M(s)]

élimination ,qui permet d’ appliquer une formule universelle à un objet particulier. 3- H(s)

hypothèse 4- M (s) modus ponens 2,3