PLATON : C’EST DU SOLIDE !

Hervé Stève

herve.steve@hotmail.fr

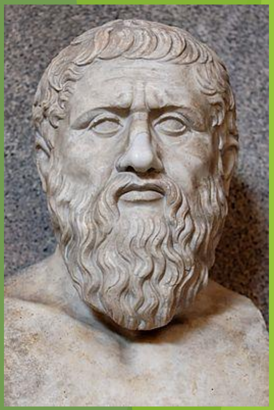
Kafemath du 15/12/2022

À la Coulée Douce, Paris 12ème

Sommaire

- Biographie de Platon
- Les 5 solides
- Le ballon de foot
- L'hexaflexagone
- Les polytopes réguliers convexes

Platon



- **Aristoclès*** dit **Platon** signifiant « large et plat »
- Né vers 428 A.J.C. et mort à Athènes en 348 A.J.C.
- Élève de Socrate, Théétète : grand **philosophe** de l’occident
- **Lutteur** aux jeux olympiques et isthmiques (2 prix)
- Politique (**La République**), voyages …
- **Dialogues** de Platon, méthode de la **dialectique**
- Fonde « **l’Académie** » à Athènes en -387

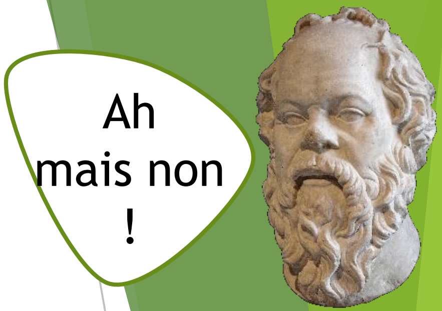
y enseigne les mathématiques pendant 40 ans !

mosaïque à Pompéi

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ
« nul entre ici, s’il n’est géomètre »

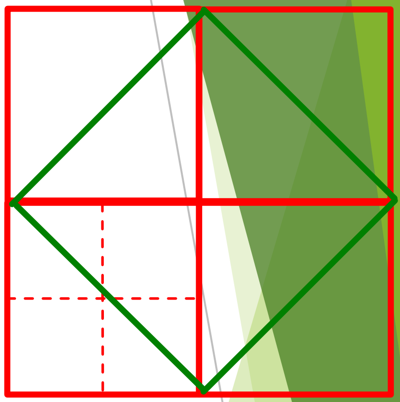
(*) un autre Aristoclès philosophe a vécu au 2^{nd} siècle

La duplication du carré

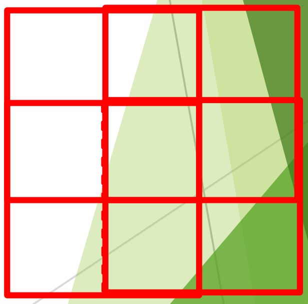


- **Dialogue « Le Ménon »** avec **Socrate** et un **esclave** de Ménon pour montrer que le savoir est en soi. Chercher et apprendre sont **réminiscence** :

- Socrate construit un carré rouge de côté 2 et marque les transversales (en pointillé), donc de surface 4 et demande à l'esclave de trouver un **carré de surface double** soit 8.



- L'esclave propose de doubler le côté soit 4 *Ménon* il obtient un carré de surface 4 x 4 = 16 ! Puis propose un carré de côté 3 de surface est 3 x 3 = 9 plus proche de 8 mais différent. Il est **embarrassé** … que faire ?



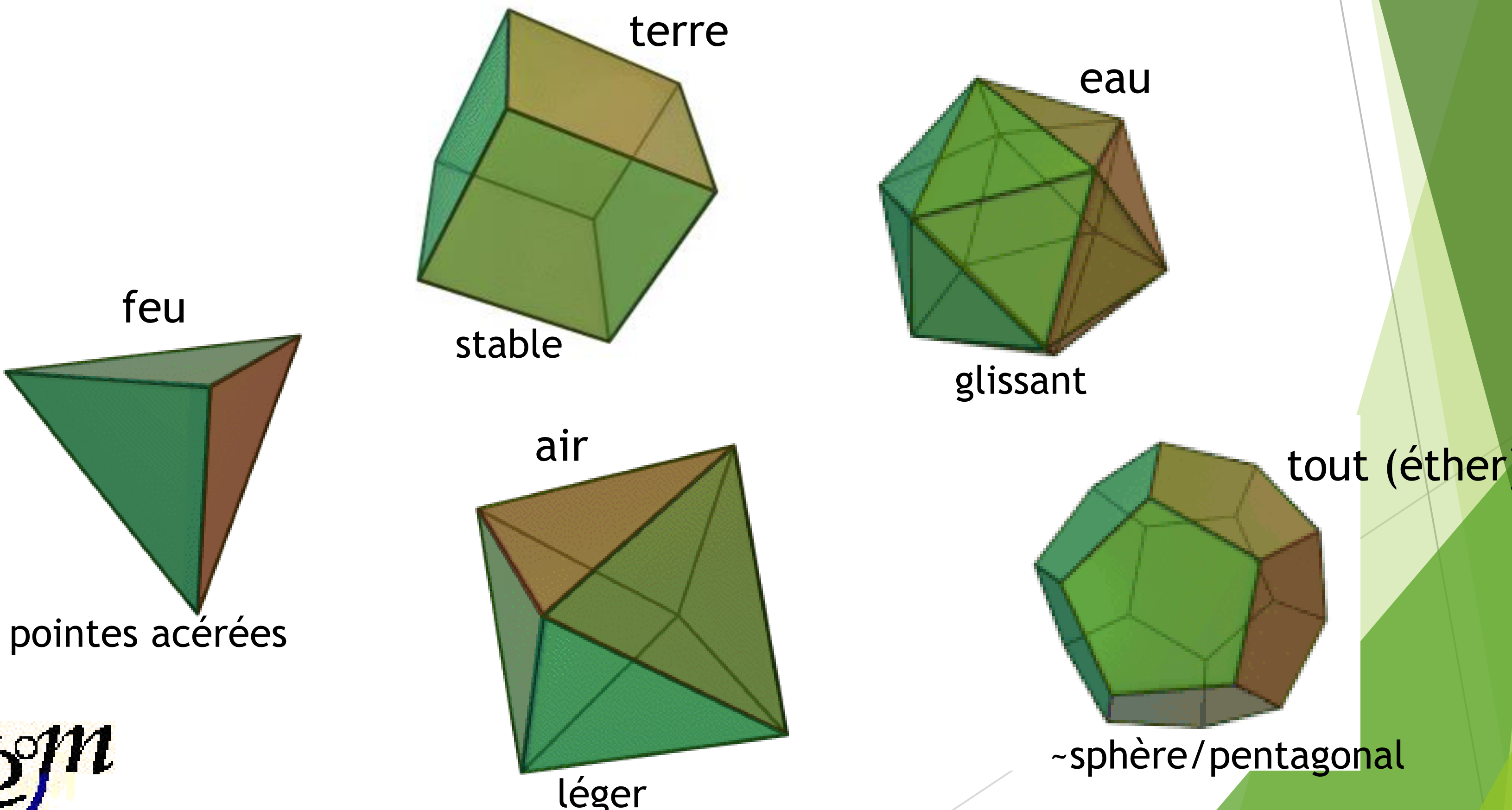
- Socrate alors trace les diagonales vertes et l'esclave réalise* que **le carré vert** est de surface 16 : 2 soit 8** ce qu'il fallait trouver !

(*) il s'était trompé (erreur) mais la solution était bien là !
(**) 8 est le carré de côté $2\sqrt{2}$ non entier !

Solides de Platon

- **5 polyèdres réguliers et convexes** en géométrie euclidienne : tétraèdre (F=4), hexaèdre ou cube (F=6), octaèdre (F=8), dodécaèdre (F=12) et icosaèdre (F=20) avec F nombre de faces régulières.

- **Platon** explique **l'harmonie du monde** en associant dans le dialogue *Timée* les 4 éléments + le Tout à un solide régulier :



Historique

Avant/après Platon :

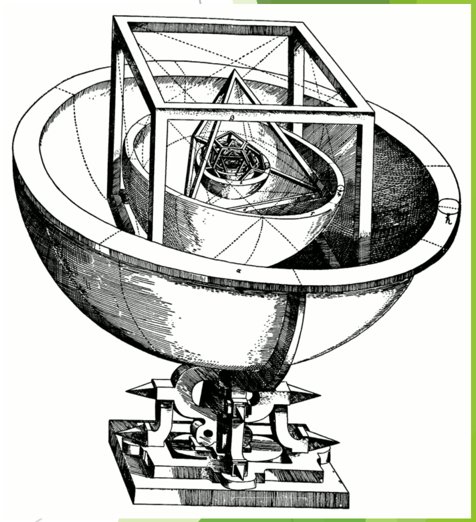
- **Pythoriciens** (à partir de -500 A.JC.) :

- cube (hexaèdre)
- tétraèdre ou pyramide (base triangle)
- dodécaèdre : peut-être connu de Pythagore, construit par Hippase de Metaponte son disciple ou plus tard par Archytase de Tarente

- **Théétète d'Athènes** (vers -400 A.J.C) découvre l'octaèdre et l'icosaèdre et construit les 5 solides

- **Aristote** a nommé Ether le dodécaèdre

- **Johannes Kepler** (16ème siècle) : essaya de trouver une relation entre la terre et les 5 planètes connues à cette époques (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne) à l'aide des 5 solides de Platon dans le *Mysterium Cosmographicum* (1596).

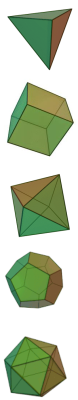


Modèle système solaire

Propriétés

- Soient S nombre de sommets, A nombre d'arêtes et F nombre de faces
  Relation d'Euler (prouvée en 1752) : **S + F = A + 2**

- p nombre de sommets/arêtes par face, q nombre de faces par sommet
  on a pF = 2A = qS d'où* **1/p + 1/q = ½ + 1/A > ½** avec p≥3 et q≥3
  Comme p<6 et q<6, il ne reste alors que 5 possibilités :

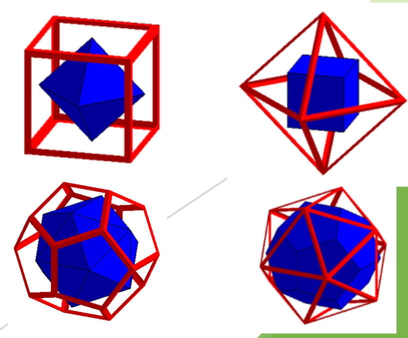


solide	S	A	F	p ; q
tétraèdre	4	6	4 triangles	3 ; 3
hexaèdre	8	12	6 carrés	4 ; 3
octaèdre	6	12	8 triangles	3 ; 4
dodécaèdre	20	30	12 pentagones	5 ; 3
icosaèdre	12	30	20 triangles	3 ; 5

➢ **p,q nombres de Schläfli**

dualité entre hexaèdre 3;4 et octaèdre 4;3

entre dodécaèdre 3;5 et icosaèdre 5;3

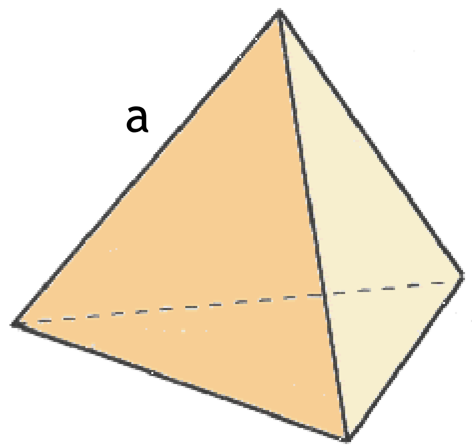


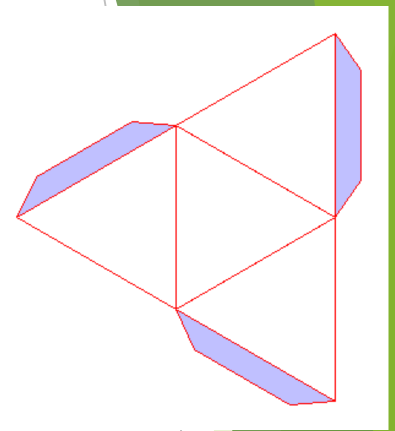
(*) Euler => 2A/q + 2A/p = A + 2

Tétraèdre régulier

1er solide de Platon

- a longueur d'arête
- Hauteur h = $a\sqrt{\frac{2}{3}}$
- Aire A = $\sqrt{3}\, a^2$
- Volume V = $\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$

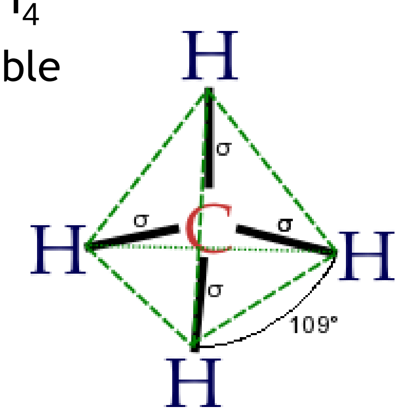


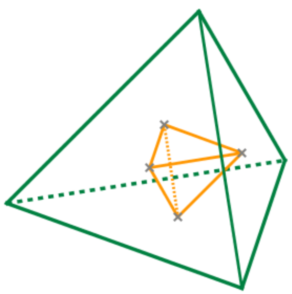


patron du tétraèdre

- Méthane CH_4

  Gas inflammable



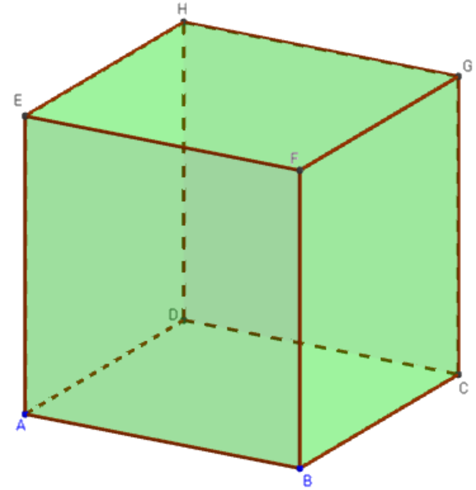


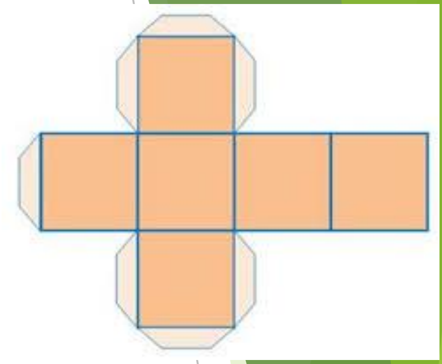
son propre dual
p=q=3

Hexaèdre régulier ou cube

2nd solide de Platon

- a longueur d’arête
- Hauteur h = a
- Aire A = $6a^2$
- Volume V = $\sqrt{\frac{2}{3}}\, a^3$

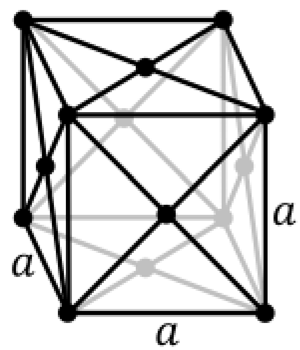


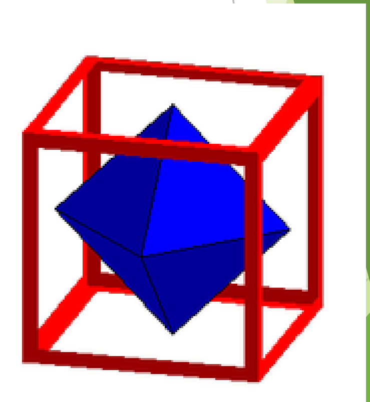


patron du cube

- L’or : structure cubique à faces centrées

Solide très stable





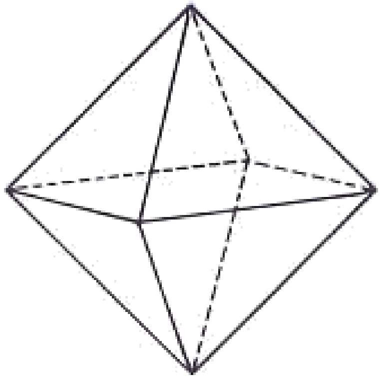
dual de l’octaèdre

Octaèdre régulier

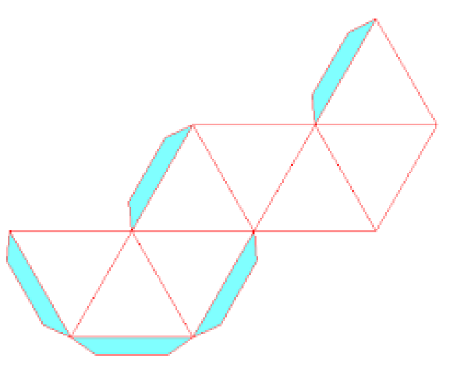
3ème solide de Platon

- a longueur d'arête
- Aire A = 2√3 a²
- Volume V = $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

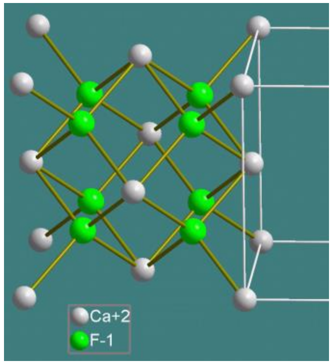
- Fluorine CaF_2

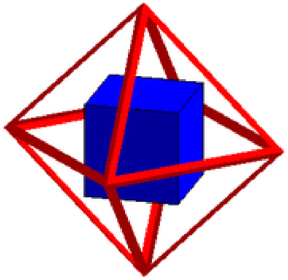


2 pyramides collées
par leur base carrée



patron de l'octaèdre



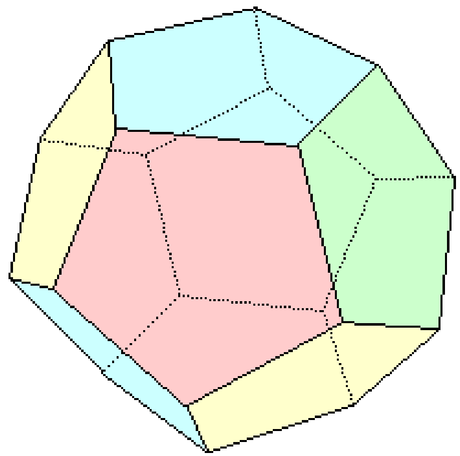


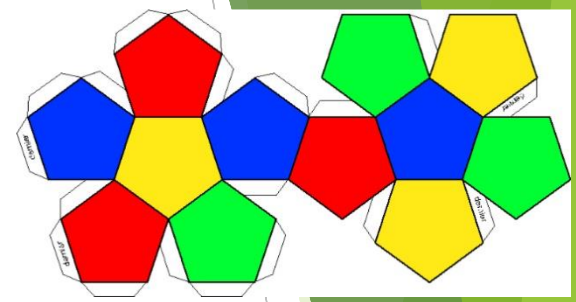
dual du cube

Dodécaèdre régulier

4ème solide de Platon

- a longueur d'arête
- Aire A = $3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$
- Volume V = $\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$

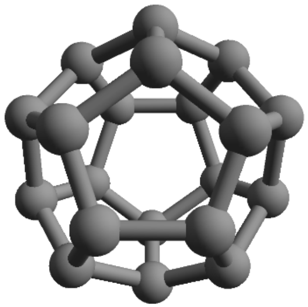


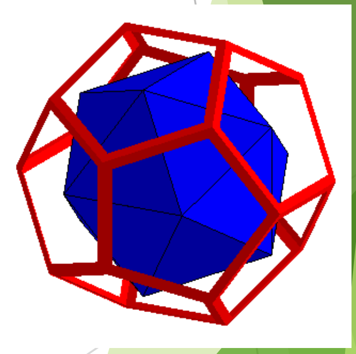


patron du dodécaèdre

- solide le plus proche de la sphère. Pour Aristote, c'est l'Ether, l'esprit de l'univers avec ses 12 faces pentagonales, donc lié au nombre d'or

- Absent de la nature ?
Molécule de fullerène C_{20}
(20 atomes de carbone)



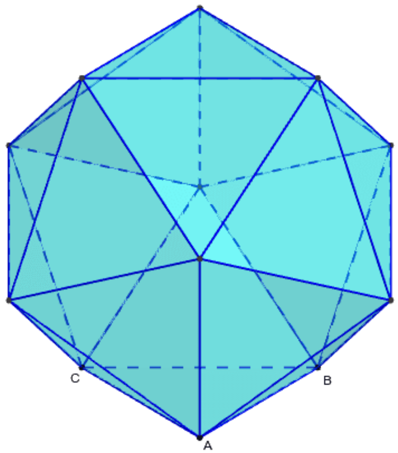


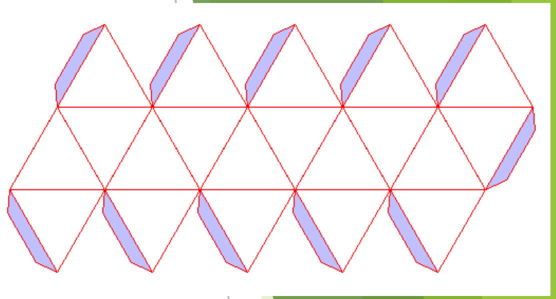
dual de l'icosaèdre

Icosaèdre régulier

5ème solide de Platon

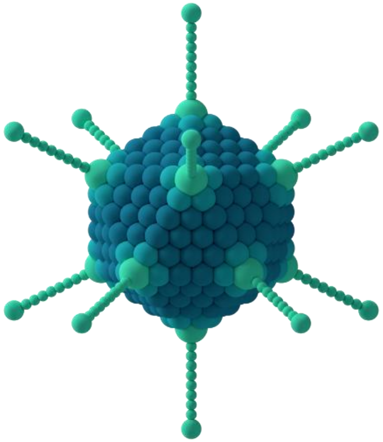
- a longueur d'arête
- Aire A = $5\sqrt{3}\, a^2$
- Volume V = $\frac{15+5\sqrt{5}}{6} a^3$

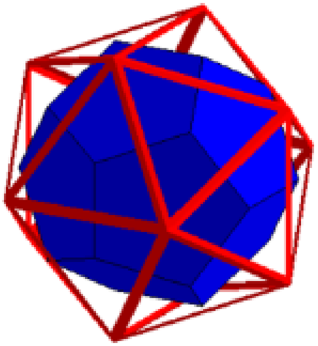




patron de l'icosaèdre

- Capside d'un adénovirus (herpès)





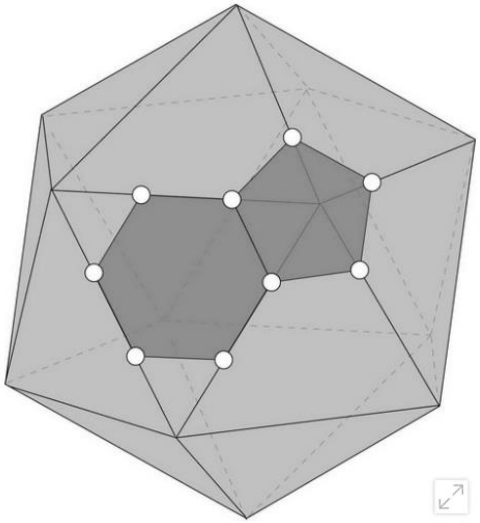
dual du dodécaèdre

- Lien avec le nombre d'or : pentagones réguliers, triangles et rectangles d'or

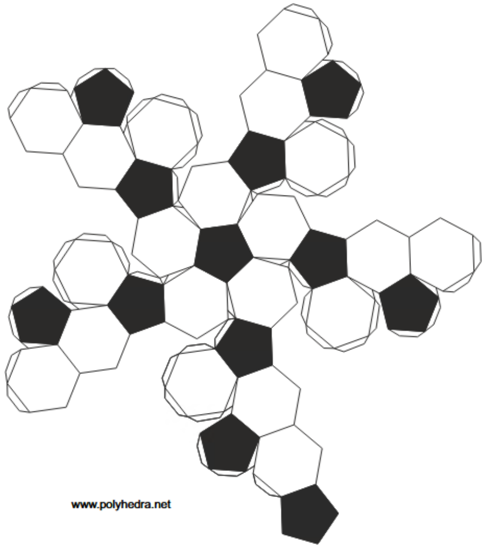
Ballon de foot

- Icosaèdre de Platon tronqué aux sommets

20 triangles => 20 hexagones ; 12 pointes => 12 pentagones
On obtient un polyèdre semi régulier (S=60 ; A=90; F=32), le gonflage permet d'approcher la sphère.



© Hervé Lehning, DR

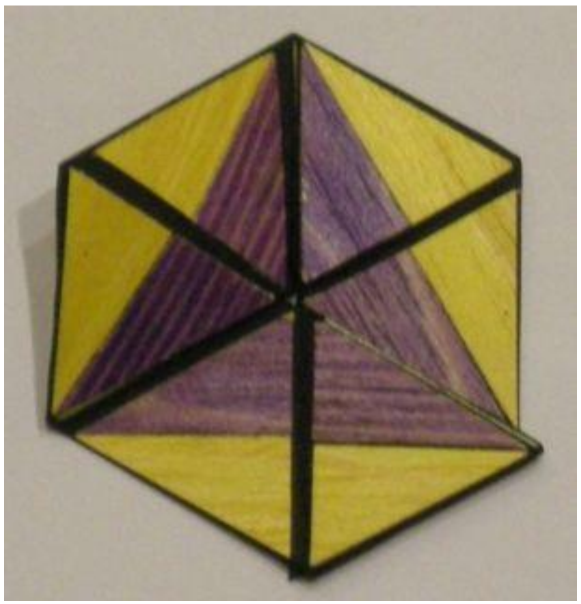


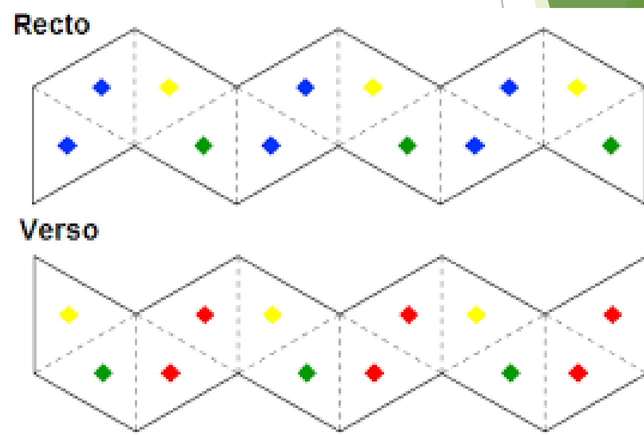
https://www.polyhedra.net/pdf/soccerball.pdf

- Fullerène C_{60} (60 atomes de carbone), diamètre = 1 nanomètre = 10^{-9}m !
- Depuis 2006 : 14 morceaux (langues et hélices) de cuir thermocollés au laser

Hexaflexagone

- A partir d'un hexagone (régulier en 2D) associé à des pliages
- Martin Gardner, *Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions (1957)* : The First Scientific American Book of Puzzles and Games, University of Chicago Press, 1988





⇒ La perspective permet de voir
Un cube (jaune) et un tétraèdre (violet)

Polytopes réguliers convexes

Dimension 2 : infinité polygones réguliers pour A=S>2
triangle équilatéral, carré, pentagone, hexagone, …

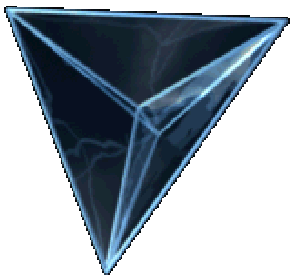
Dimension 4 : Ludwig Schläfli 1814-1895 mathématicien suisse

- 5 types étendus de la dimension 3 plus l'icositétrachore qui n'existe que dans cette dimension
- Relation d'Euler : **S+F=A+C** (C nbre cellules 3D)

3 types dimension N > 4 :

- Simplexes : S=N+1 sommets, cellules à N sommets
- Hypercubes : $S=2^N$ sommets, cellules à 2^{N-1} sommets
- Hyperoctaèdres : S=2N sommets, cellules à N sommets

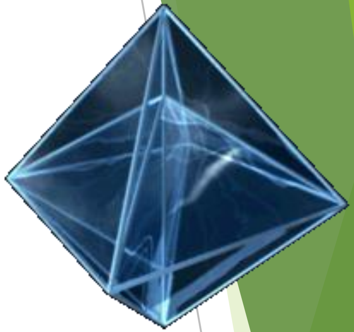
Les 6 polychores (4-polytopes)



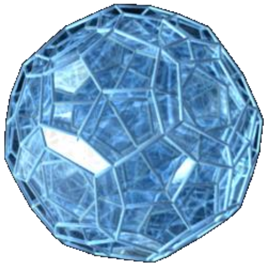
Pentachore
5-cellules,
S=5, A=F=10

Tesseract
8-cellules, S=16,
A=24, F=32

dual

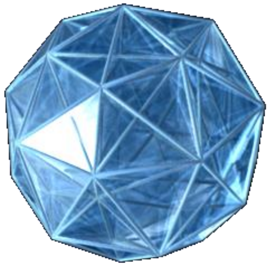


Héxadécachore
16-cellules, S=8,
A=32, F=24



Hécatonicosachore
120-cellules, S=600,
A=1200,F=700

dual



Hexacosichore
600-cellules, S=120,
A=700, F=1200

Icositétrachore
24-cellules, S=24,
A=F=96

Propriétés

polychore	S	A	F	C	p ; q ; r
Pentachore	5	10	10 triangles	5 tétraèdres	3 ; 3 ; 3
Tesseract	16	32	24 carrés	8 cubes	4 ; 3 ; 3
Hexadeca.	8	24	32 triangles	16 tétraèdres	3 ; 3 ; 4
Icositetra.	24	96	96 triangles	24 octaèdres	3 ; 4 ; 3
Hécatonicosi.	600	1200	720 pentagones	120 dodécaèdres	5 ; 3 ; 3
Hexacosi.	120	720	1200 triangles	600 tétraèdres	3 ; 3 ; 5

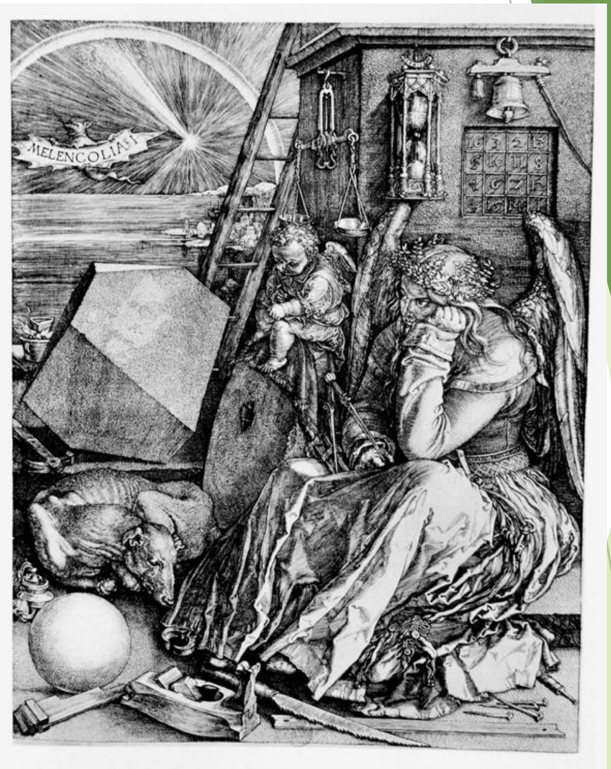
Symboles de Schläfli d'un polychore {p;q;r} :
avec r nombre de polyèdres réguliers entourant chaque arête,
et {p;q} le symbole de ces polyèdres (solides de Platon)

Dualité des polychores : p ⇔ r

$F = A\, r/p$; $S = A\,(2(q+r)-qr)/2q$ et $C = A\, r(2(p+q)-pq)/2pq$

Conclusion

- Vive la géométrie : la plus belle* des branches des mathématiques !
- Extension des solides de Platon aux dimensions supérieures
- Généralisations diverses



Mélancolie 1 1514, DÜRER

(*) Pour Platon, le beau se construit avec une règle et au compas