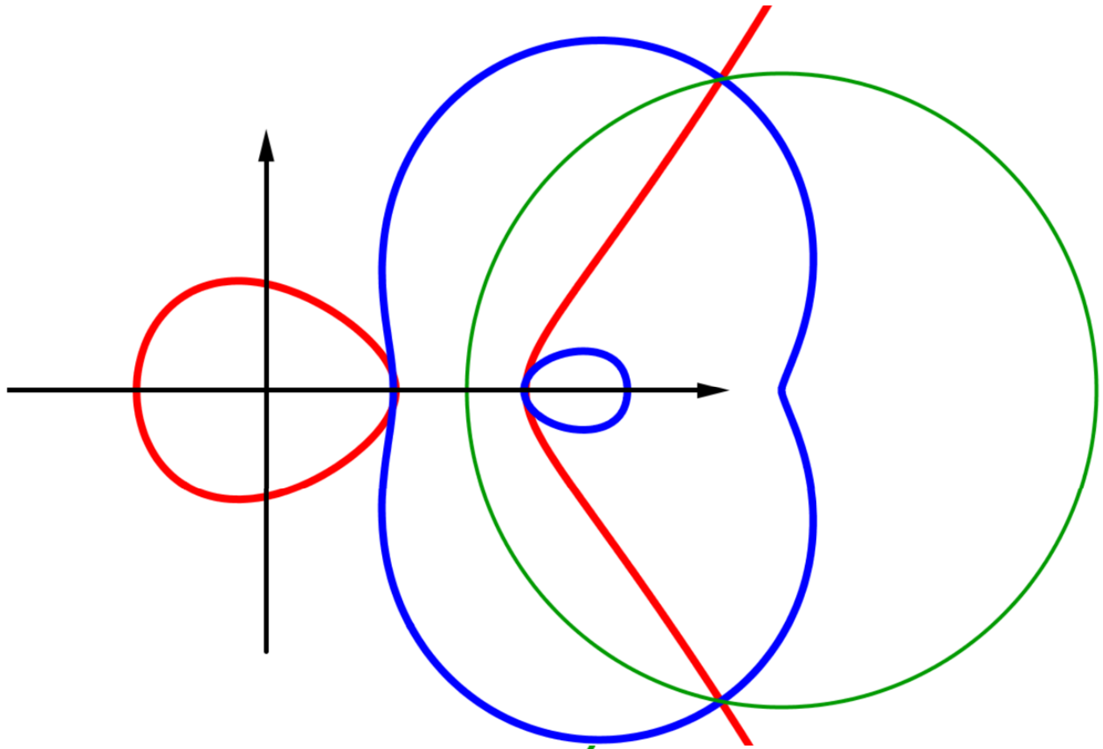
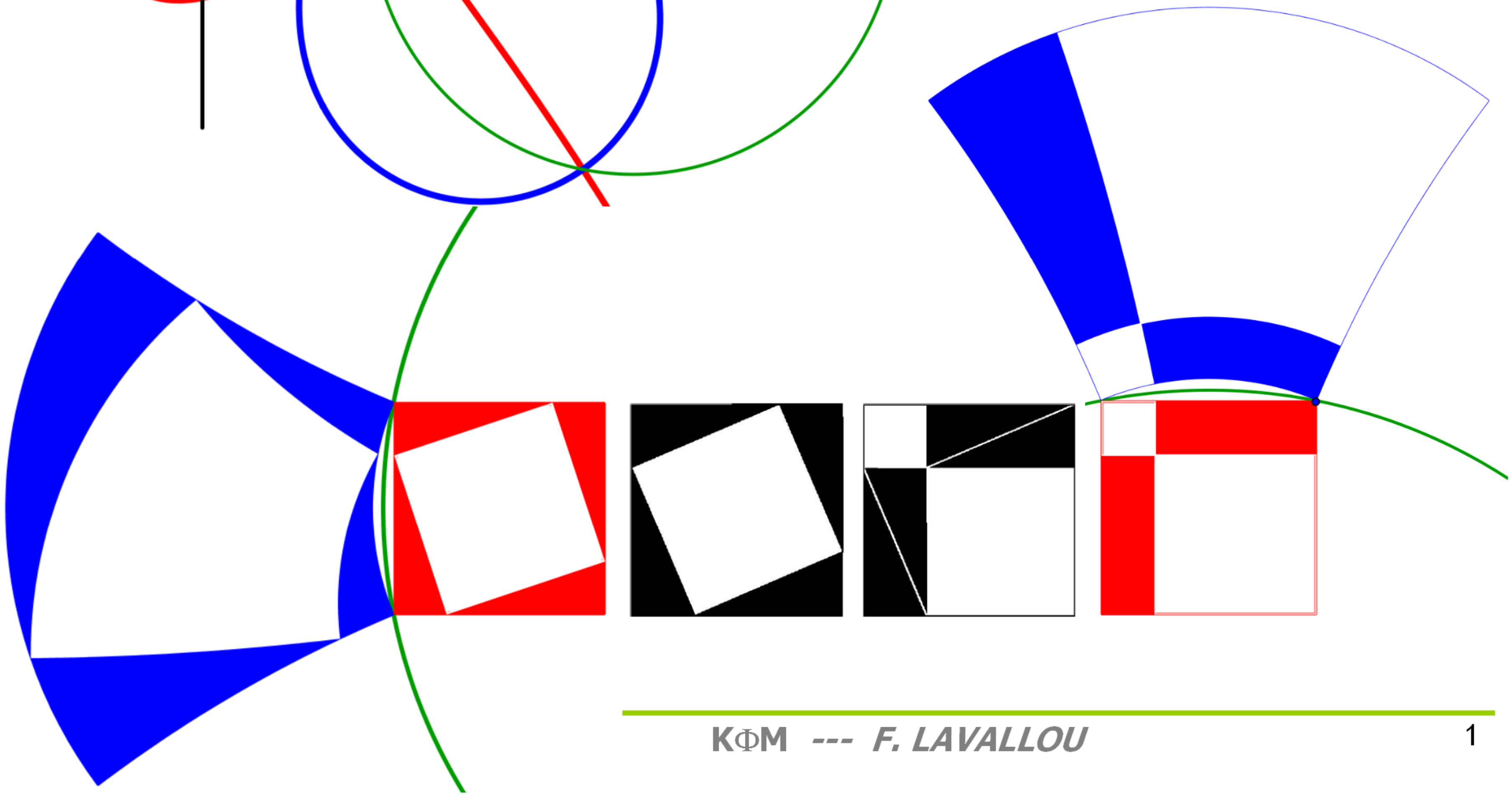


La Puissance de l'Inversion



Puissance,

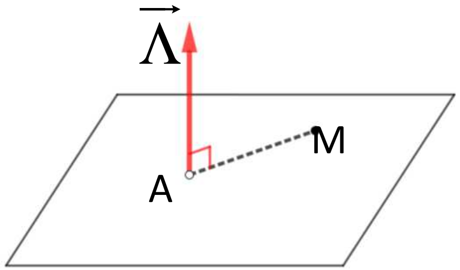
Inversion,

Pôle-Polaire,

Dualité,

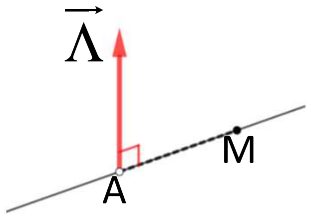
.....

1er thème: Puissance



Espace de dimension *n*

Distance point-hyperplan

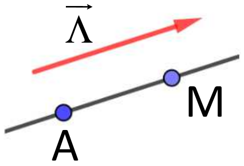


Vecteur $\vec{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{\Lambda} = 0$ Hyperplan = Espace de dimension (n – 1)

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n = c = \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \ldots + \lambda_n \cdot a_n$$

Droite passant par le point A, de vecteur directeur $\vec{\Lambda}$



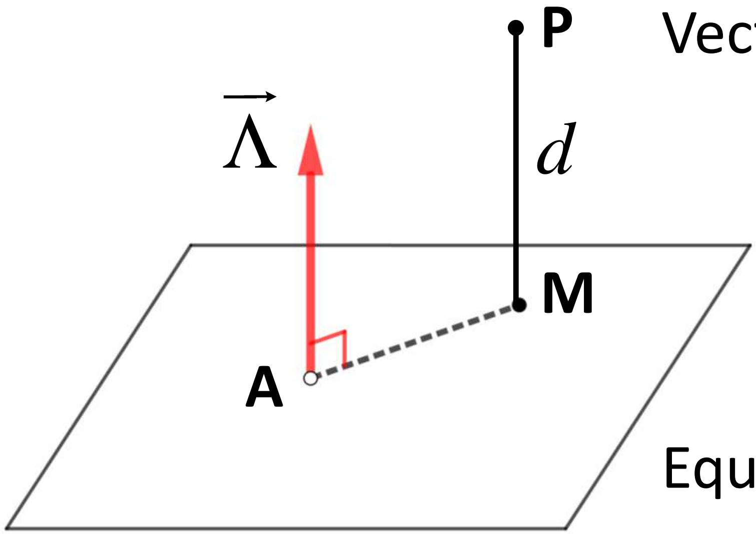
$\overrightarrow{AM} \,//\, \vec{\Lambda}$

$$\frac{x_1 - a_1}{\lambda_1} = \frac{x_2 - a_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{\lambda_n}$$

n = 2 $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ Hyperplan!

1er thème: Puissance

Distance point-droite



Vecteur normal normé (!) $\|\vec{\Lambda}\| = 1$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$$

$$\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\Lambda} = \overrightarrow{MP} \cdot \vec{\Lambda} = d$$

Equation de l'hyperplan: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\Lambda} = 0$

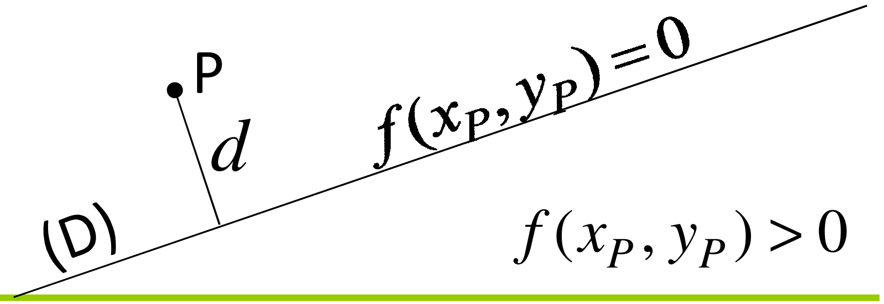
n = 2 $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ Equation de la droite (D)

$\vec{\Lambda} = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

$f(x_P, y_P) < 0$

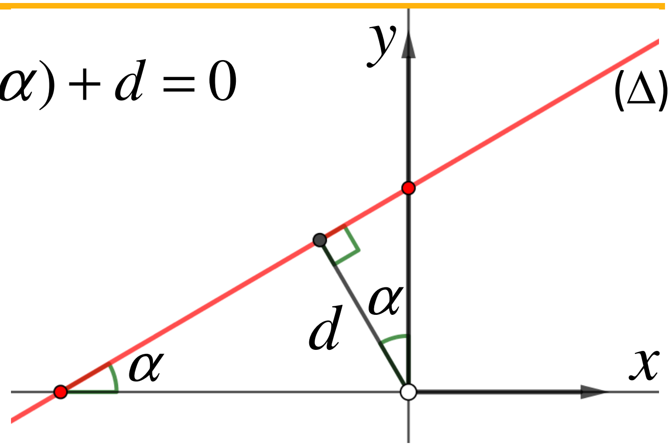
Distance du point P(x_P, y_P)
à la droite (D) $f(x, y)$ = 0 :

$$|f(x_P, y_P)| = d$$



$f(x_P, y_P) > 0$

$$f_\Delta(x,y) = x\cdot\sin(\alpha) - y\cdot\cos(\alpha) + d = 0$$

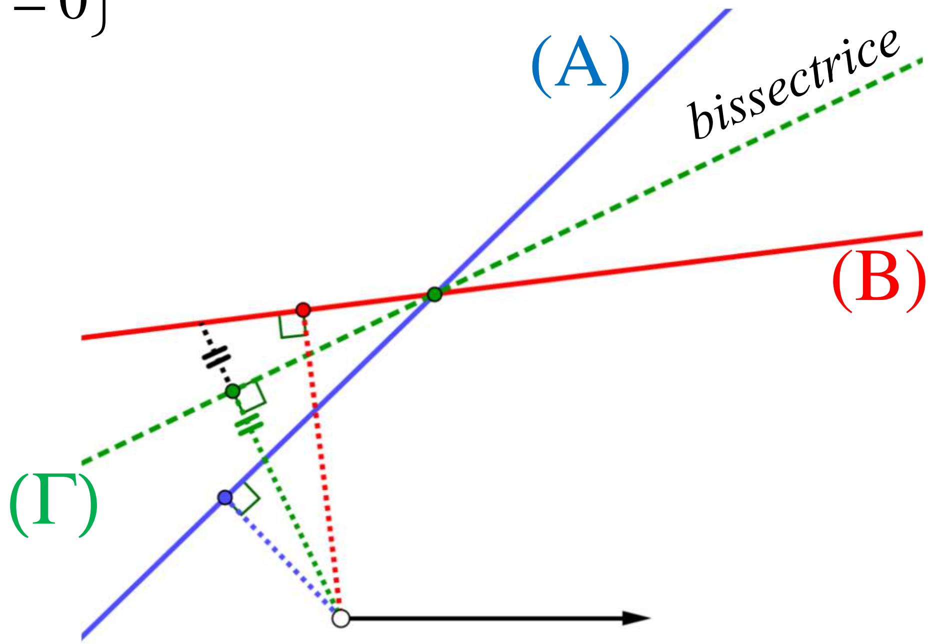


$$f_\Gamma(x,y) = f_A(x,y) + f_B(x,y)$$

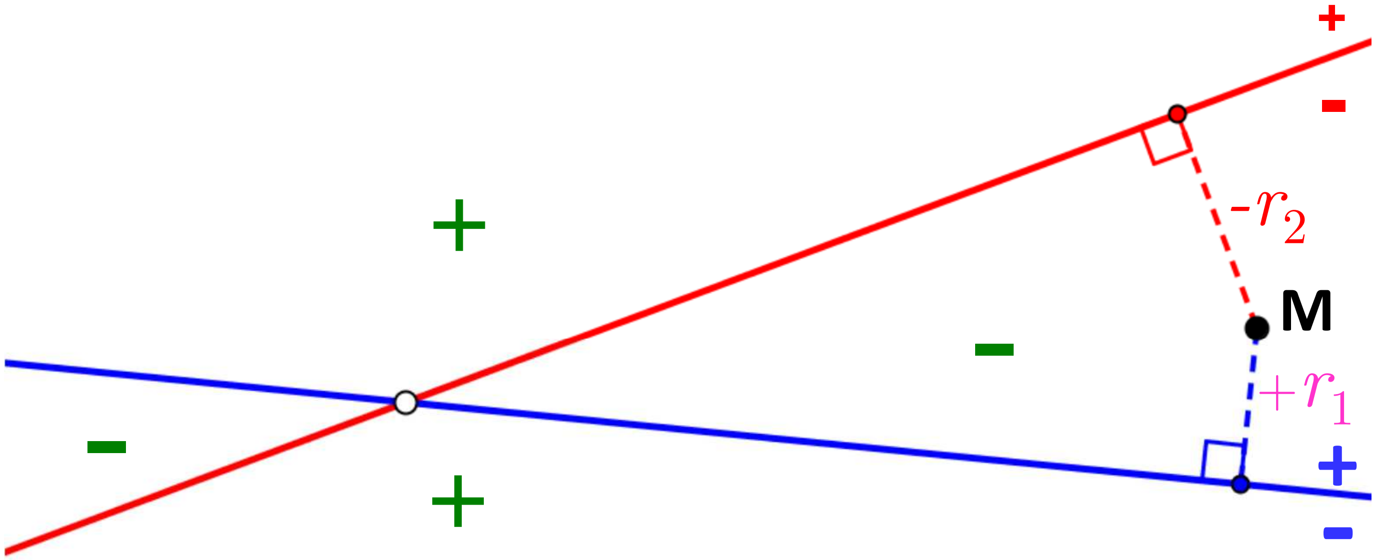
$$\left.\begin{aligned} x\cdot\sin(\alpha) - y\cdot\cos(\alpha) + a = 0 \\ x\cdot\sin(\beta) - y\cdot\cos(\beta) + b = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x\cdot\sin(\gamma) - y\cdot\cos(\gamma) + c = 0$$

avec : $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et

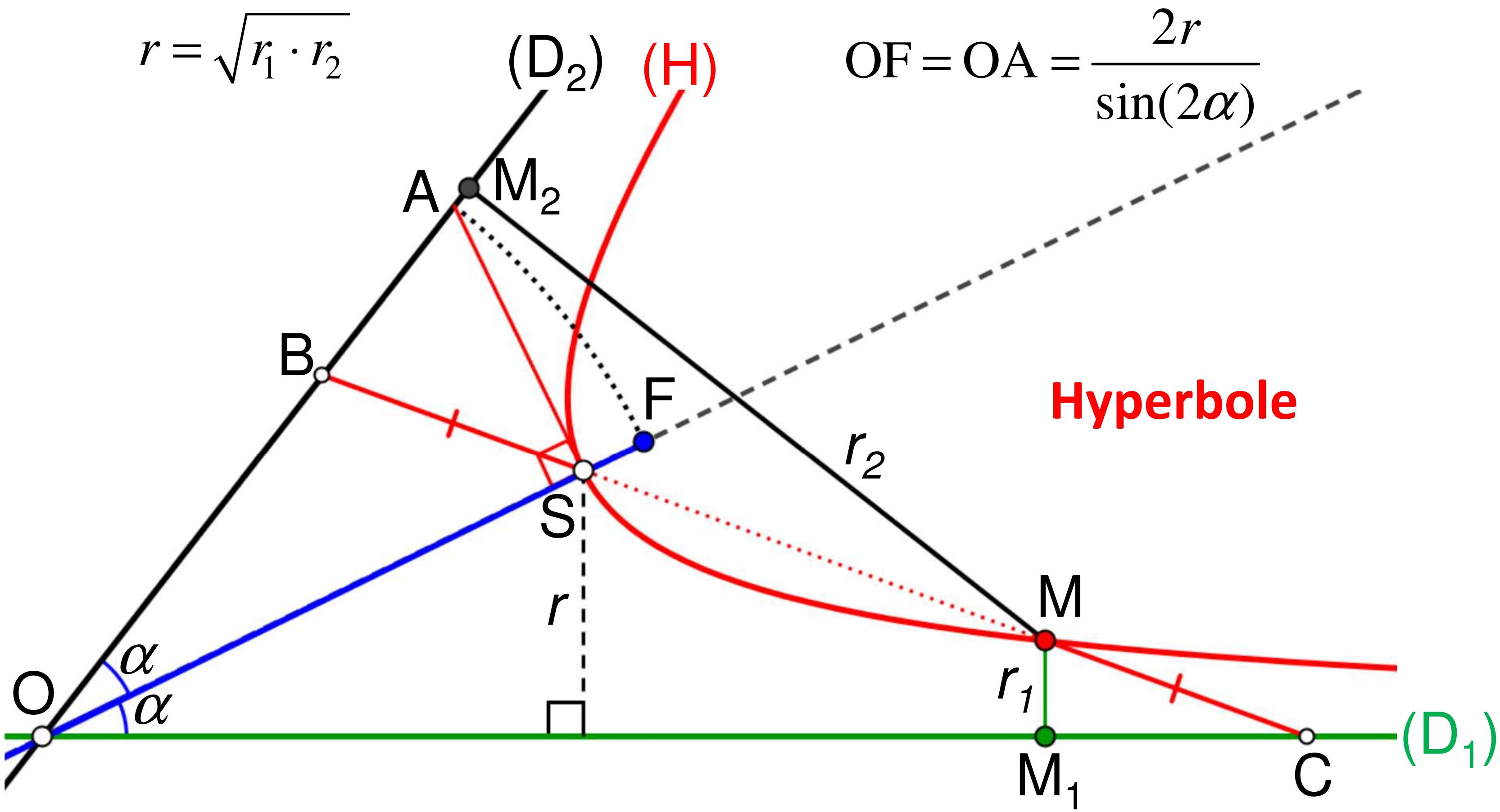
$$c = \frac{a+b}{2\cdot\cos\big((\alpha-\beta)/2\big)}$$



$$f_{\Gamma}(x,y) = f_{A}(x,y).\, f_{B}(x,y) = \pm\ r_1 . r_2$$



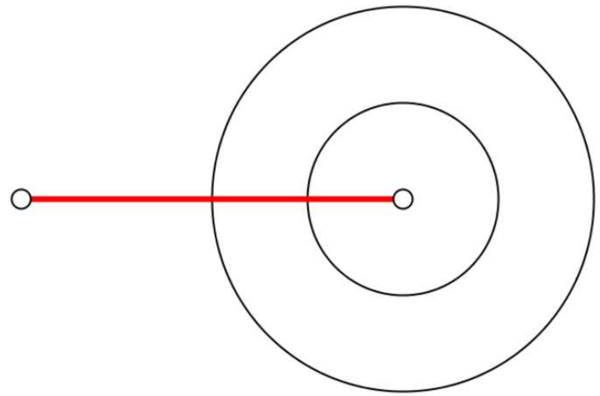
Lieu $f_{\Gamma}(x, y) = \mathrm{cste}$?



Remarque 1 : BS = MC

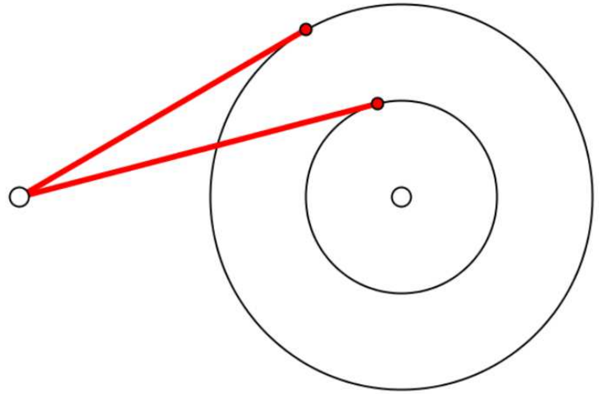
Remarque 2 : 2 droites = conique dégénérée => quid pour le cercle?

Distance point-cercle?



Distance au centre:
pas discriminant pour cercles concentriques

Tenir compte centre et rayon => tangente



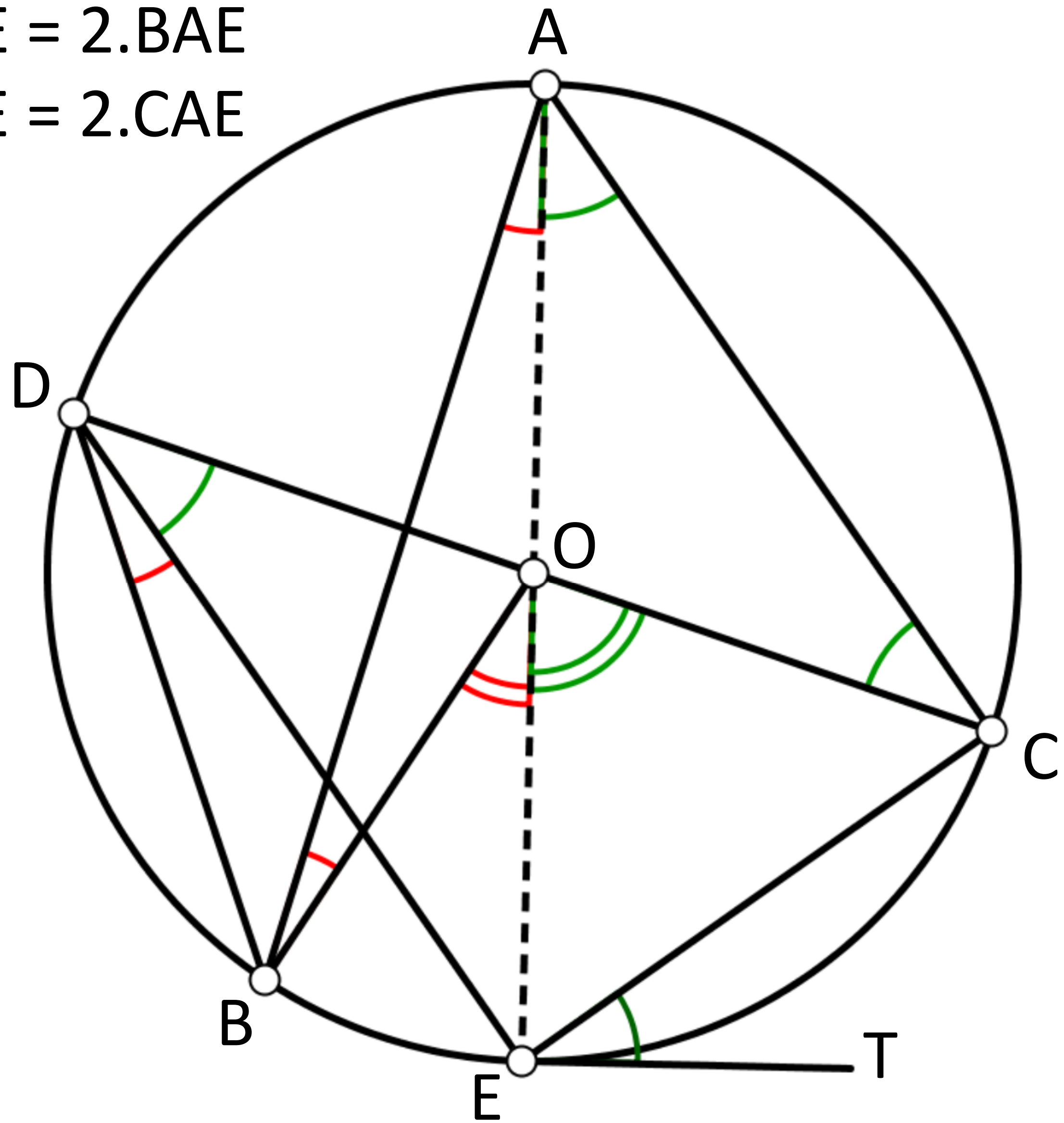
1er thème: Puissance

ΔBOA isocèle: BOE = 2.BAE

ΔCOA isocèle: COE = 2.CAE

BOC = 2.BAC

EDC = CET



1er thème: Puissance

Euclide, Livre III, proposition XXXV : *point E intérieur*

Le rectangle compris des deux parties de l'une est égal au rectangle compris des deux parties de l'autre.

Avec : $AF = FB = FD = R$

N°2: $AE \cdot EB = (AF + FE) \cdot (FB - FE)$

$= (FD + FE) \cdot (FD - FE) = ED^2 = EC \cdot ED$

N°3:

$AE \cdot EB + FE^2 = (AF + FE) \cdot (FB - FE) + FE^2 = R^2$

De même:

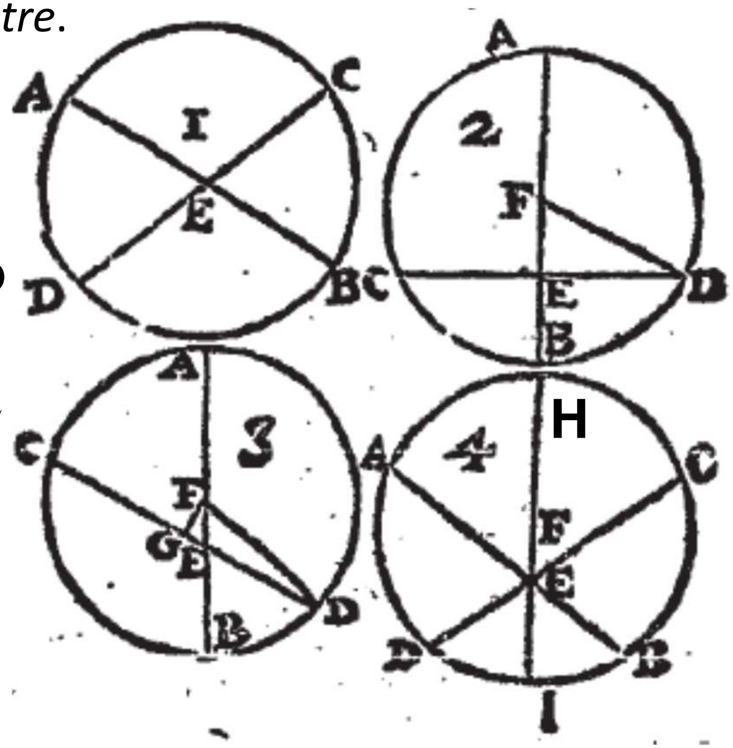
$CE \cdot ED + GE^2 = GD^2$

D'où: $AE \cdot EB - CE \cdot ED$

$=$

$R^2 - GD^2 - (FE^2 - GE^2) = 0$

N°4: Diamètre HI => n°3 et transitivité



Dessin n°1: 2 diamètres

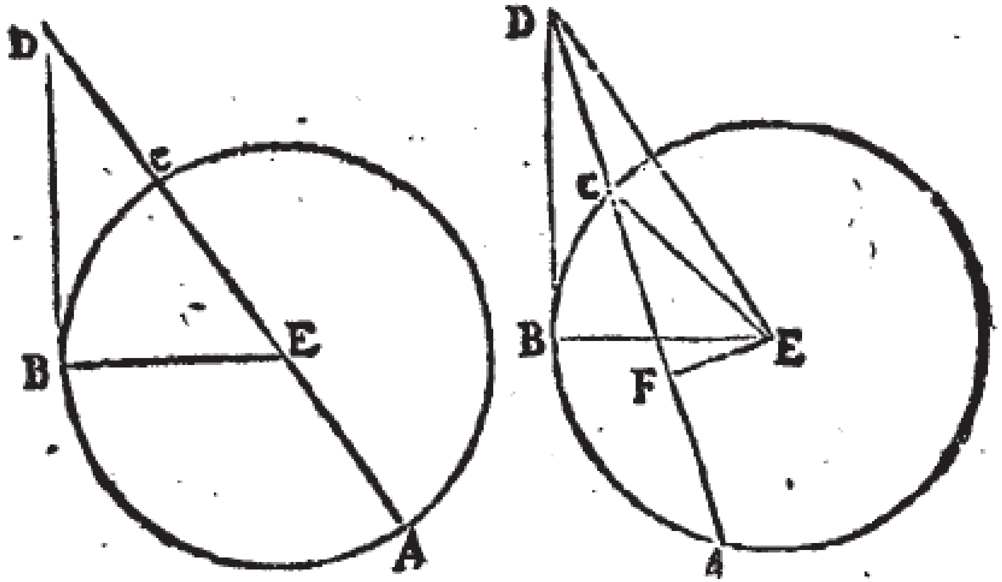
Dessin n°2: 1 diamètre, cordes ⊥

Dessin n°3: 1 diamètre, corde qcq

Dessin n°4: 2 cordes qcq

Euclide, Livre III, proposition XXXVI : *point D extérieur. Le rectangle contenu de toute la coupante* (DA), *et de sa partie prise dehors entre le point et la circonférence convexe* (DC), *est égal au carré de la touchante* (DB).

(DA) passant par le centre E: $\mathrm{DC} \cdot \mathrm{DA} = (\mathrm{DE} - \mathrm{R})(\mathrm{DE} + \mathrm{R}) = \mathrm{DE}^2 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{DB}^2$



Prop XXXVII Coupante (DA) quelconque :

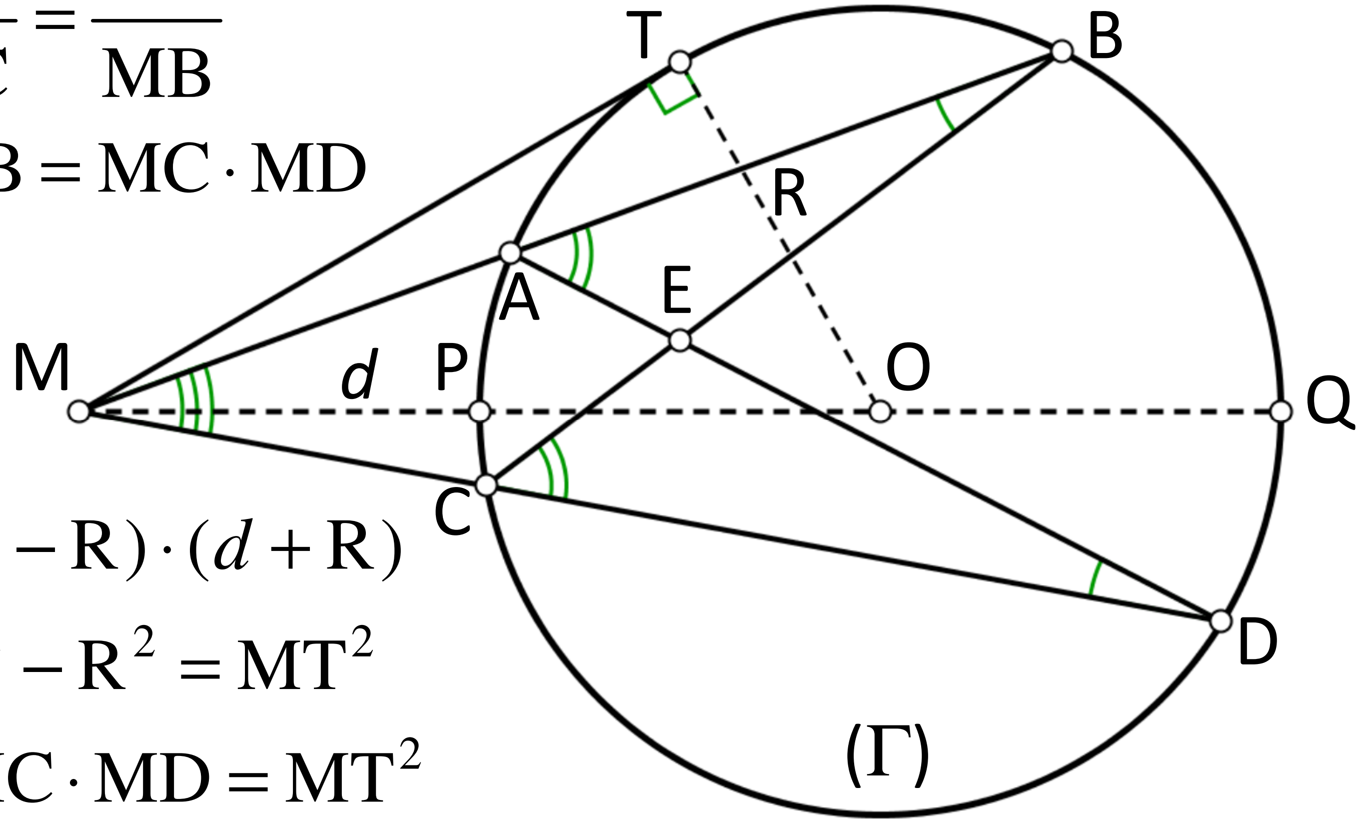
$$\mathrm{DC} \cdot \mathrm{DA} = \mathrm{DF}^2 - \mathrm{CF}^2 = (\mathrm{DE}^2 - \mathrm{EF}^2) - (\mathrm{R}^2 - \mathrm{EF}^2) = \mathrm{DE}^2 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{DB}^2$$

Théorème de l'angle inscrit: *Un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.*

Triangles MCB et MAD semblables :

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MB}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{MA} \cdot \mathrm{MB} = \mathrm{MC} \cdot \mathrm{MD}$$



$$\mathrm{MP} \cdot \mathrm{MQ} = (d - \mathrm{R}) \cdot (d + \mathrm{R})$$

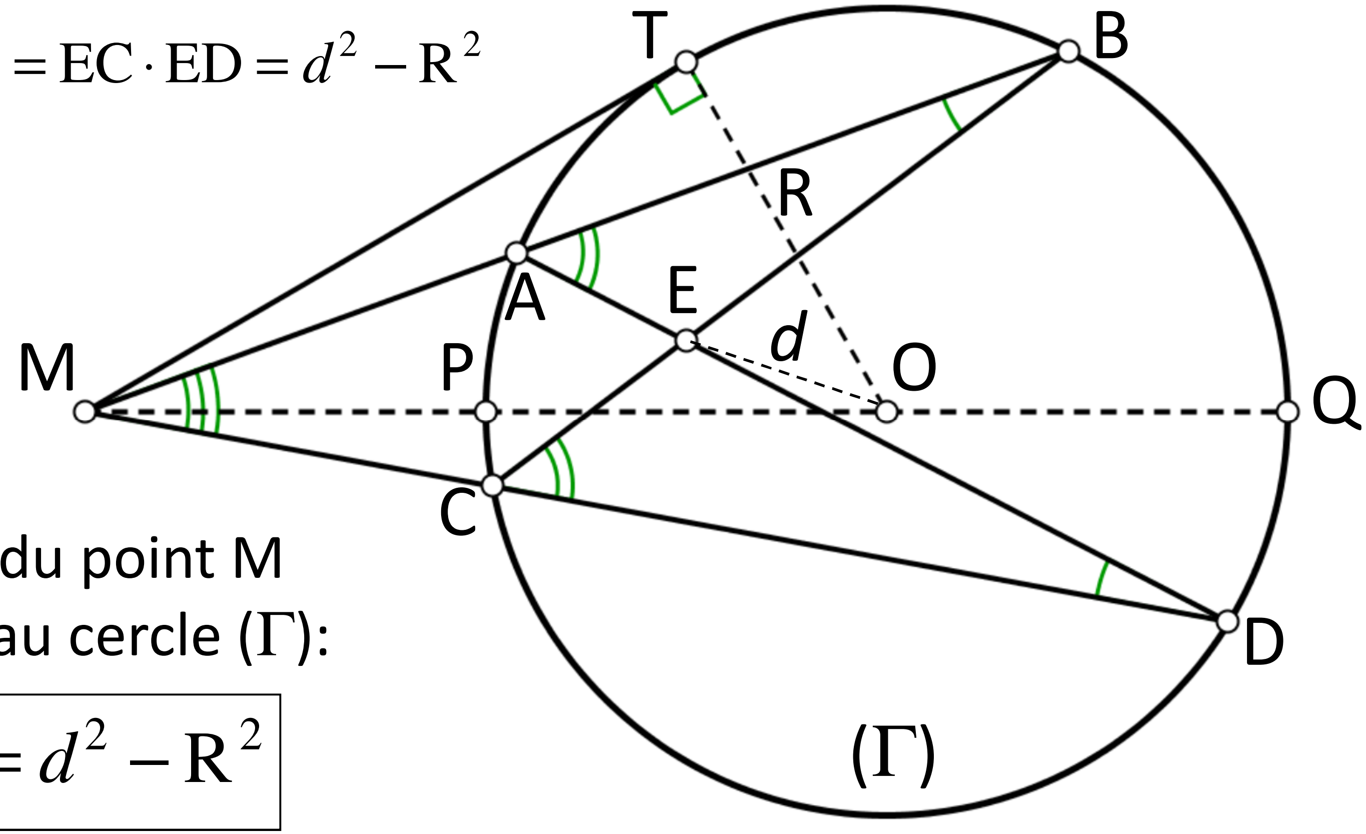
$$\mathrm{MP} \cdot \mathrm{MQ} = d^2 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{MT}^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{MA} \cdot \mathrm{MB} = \mathrm{MC} \cdot \mathrm{MD} = \mathrm{MT}^2$$

Théorème de l’angle inscrit: *Un angle inscrit est égal à la moitié de l’angle au centre qui intercepte le même arc.*

Triangles AEB et CED semblables : $\dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EC}} = \dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{ED}}$

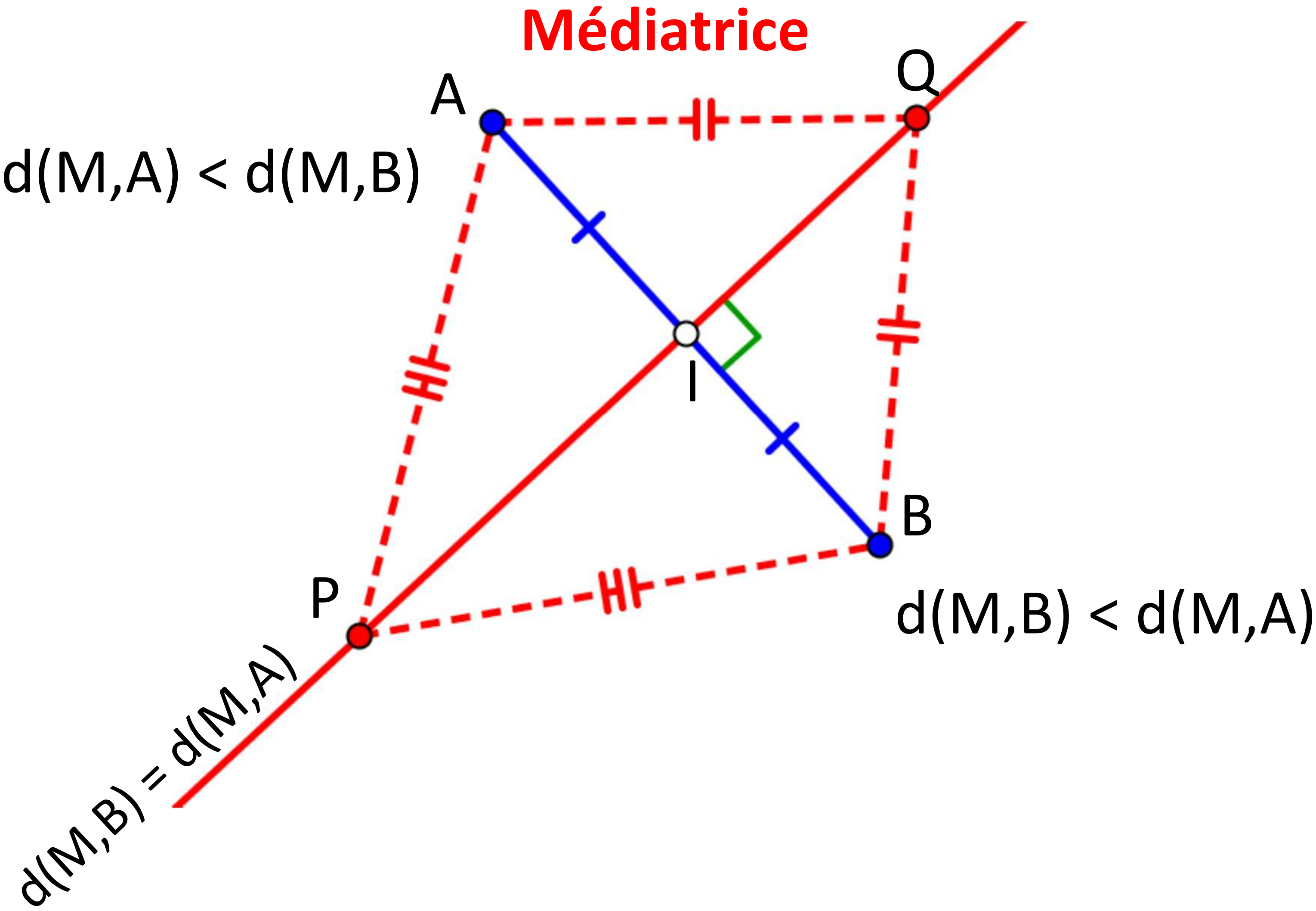
$\Rightarrow \mathrm{EA} \cdot \mathrm{ED} = \mathrm{EC} \cdot \mathrm{ED} = d^2 - \mathrm{R}^2$



Puissance du point M
par rapport au cercle (Γ):

$$\boxed{\mathrm{P}_{(\Gamma)}(\mathrm{M}) = d^2 - \mathrm{R}^2}$$

Lieu des points à même « distance » de deux points



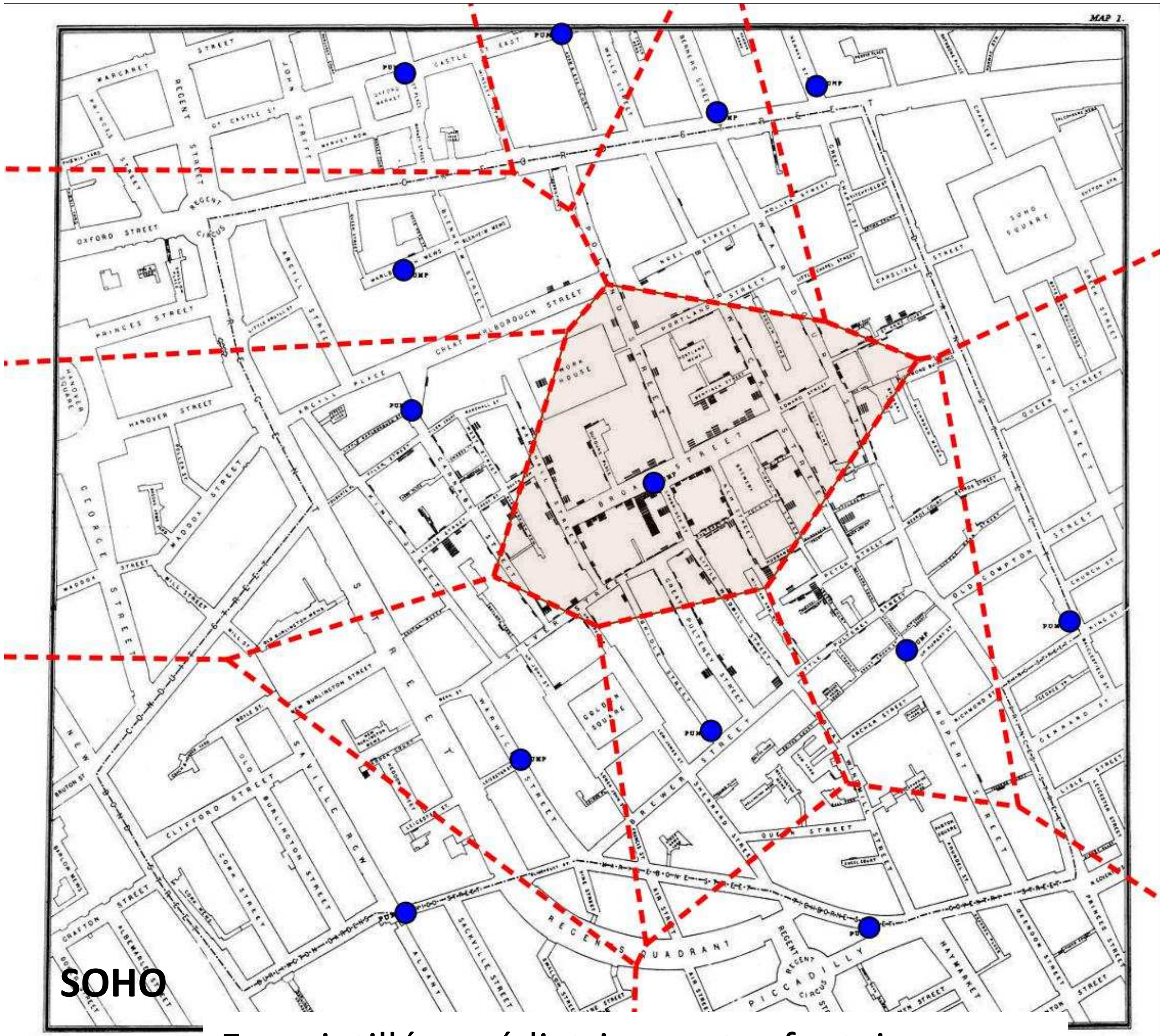
1er thème: Puissance

Voronoï (1868-1908)

John Snow
(1813-1858)

<u>Points bleus :</u>
Fontaines
<u>Points noirs:</u>
Décès choléra

Déterminer
Les zones de
proximité de
chaque point
d'eau pour
localiser la
source de
contamination.



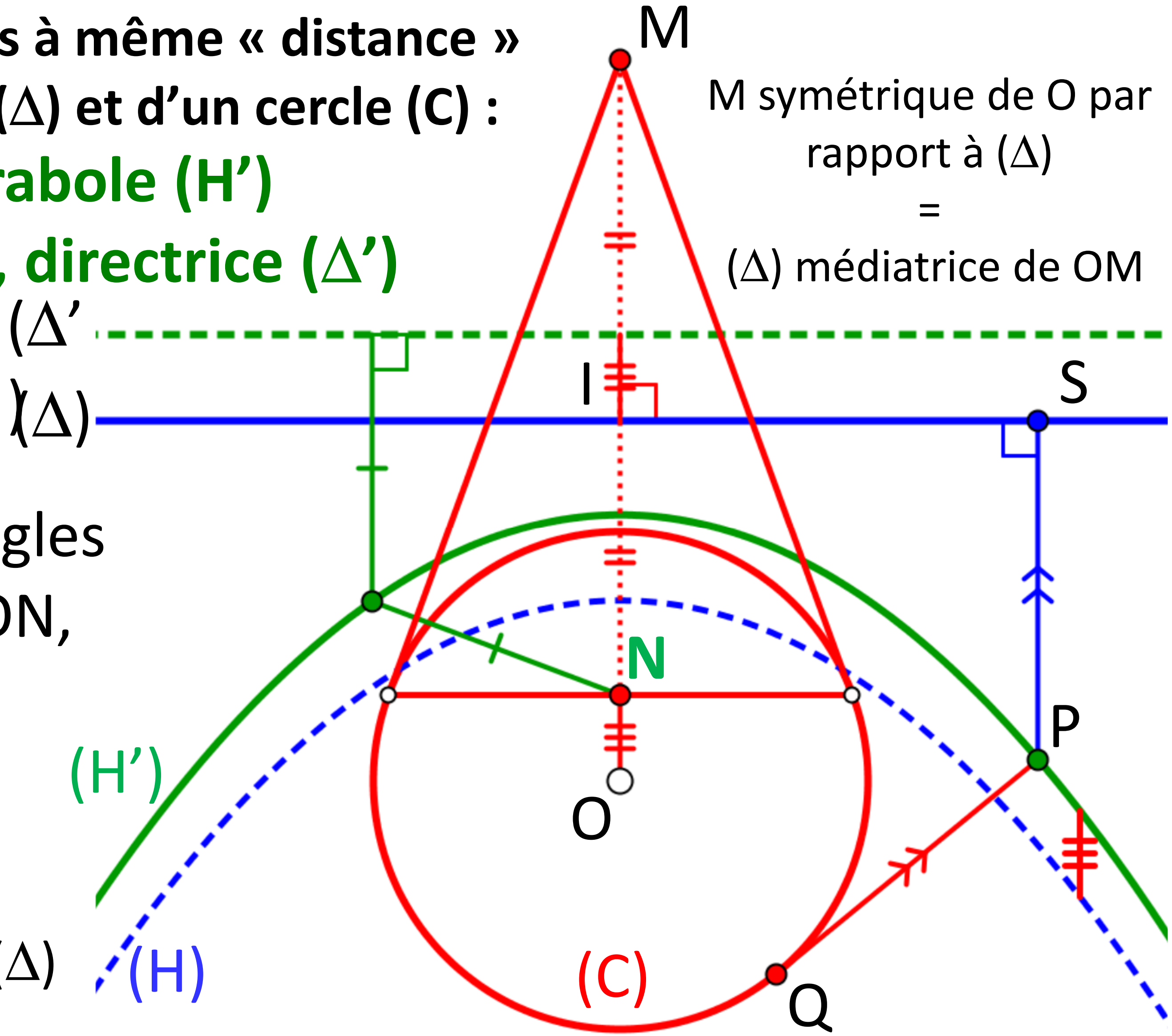
En pointillés: médiatrices entre fontaines.

Lieu des points à même « distance » d'une droite (Δ) et d'un cercle (C) :

Parabole (H')

foyer N, directrice (Δ')

M symétrique de O par rapport à (Δ)
=
(Δ) médiatrice de OM



Avec les triangles ΔMOT et ΔTON, on a :

$OM.ON = R^2$

Parabole (H):
Foyer O, directrice (Δ)

1^{er} thème: Puissance

Equation « normalisée » d'un cercle (C) de centre (x_0, y_0) et de rayon R :

$$f_{(C)}(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R_0^2 = 0$$

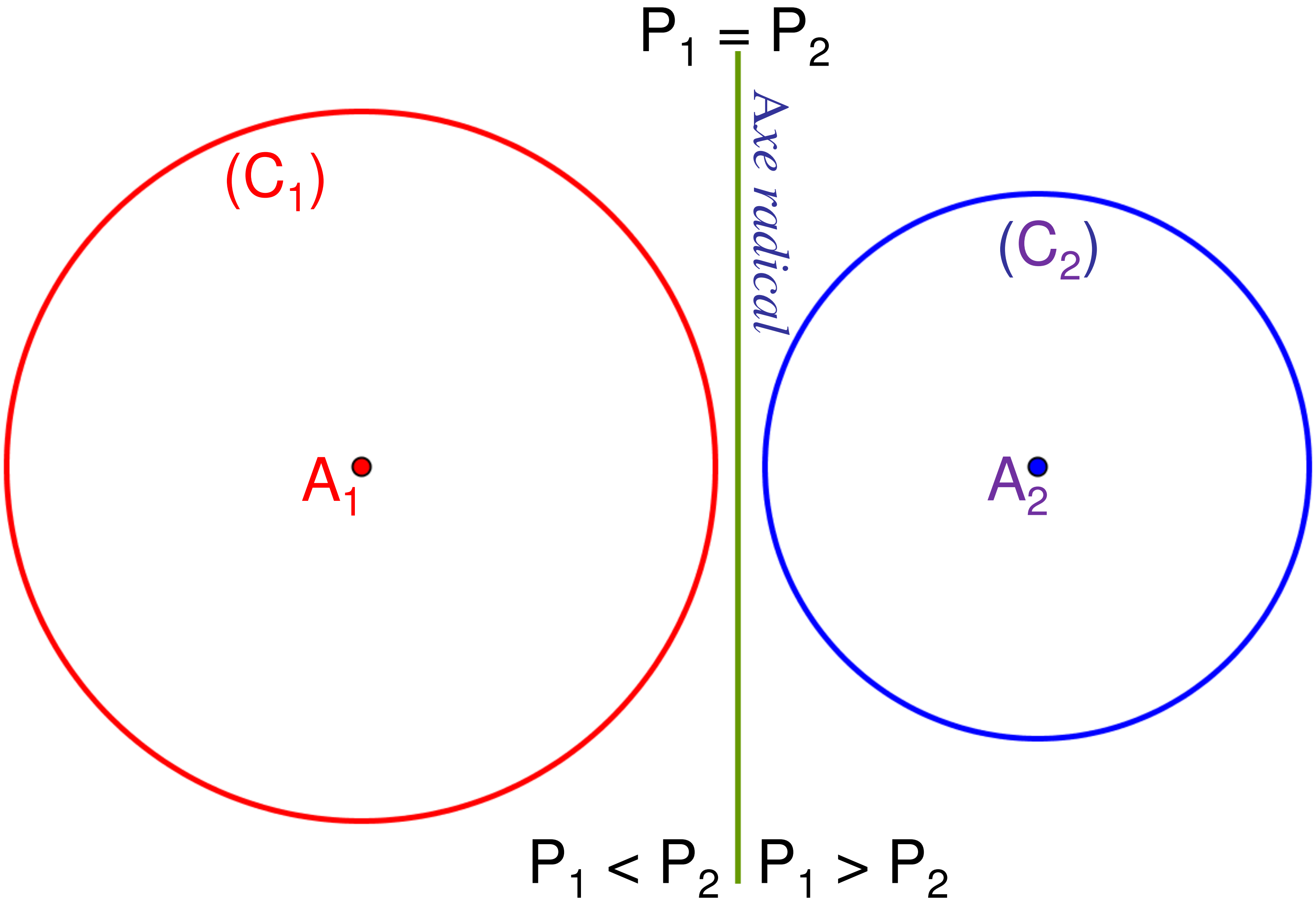
Nous avons vu que : $\boxed{P_{(C)}(M) = d^2 - R^2 = f_{(C)}(x, y)}$

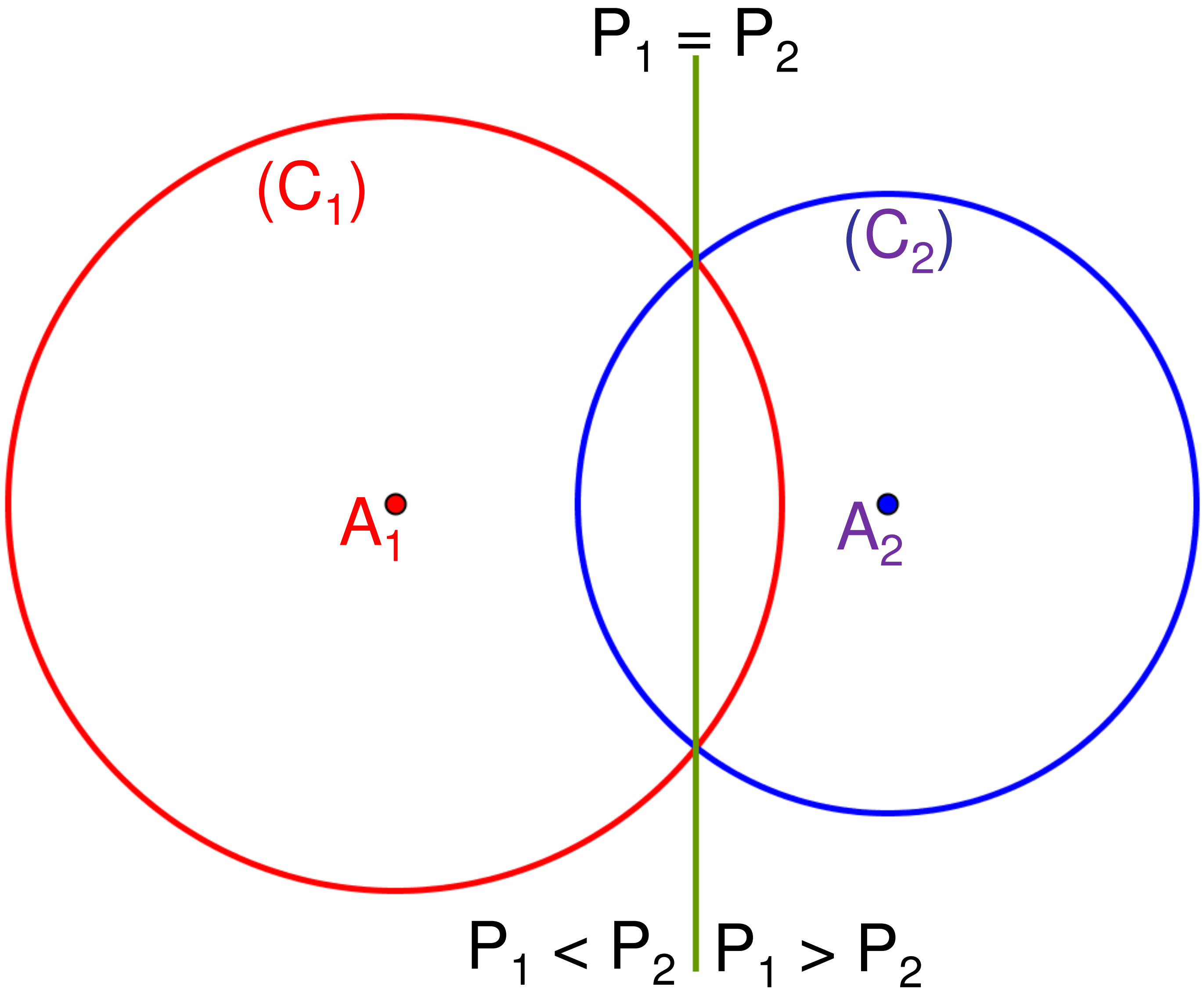
Lieu des points à même « distance » de deux cercles :

$$P_1 = f_{(C_1)}(x, y) = f_{(C_2)}(x, y) = P_2$$

=> Équation du premier degré en x et y : **axe radical**

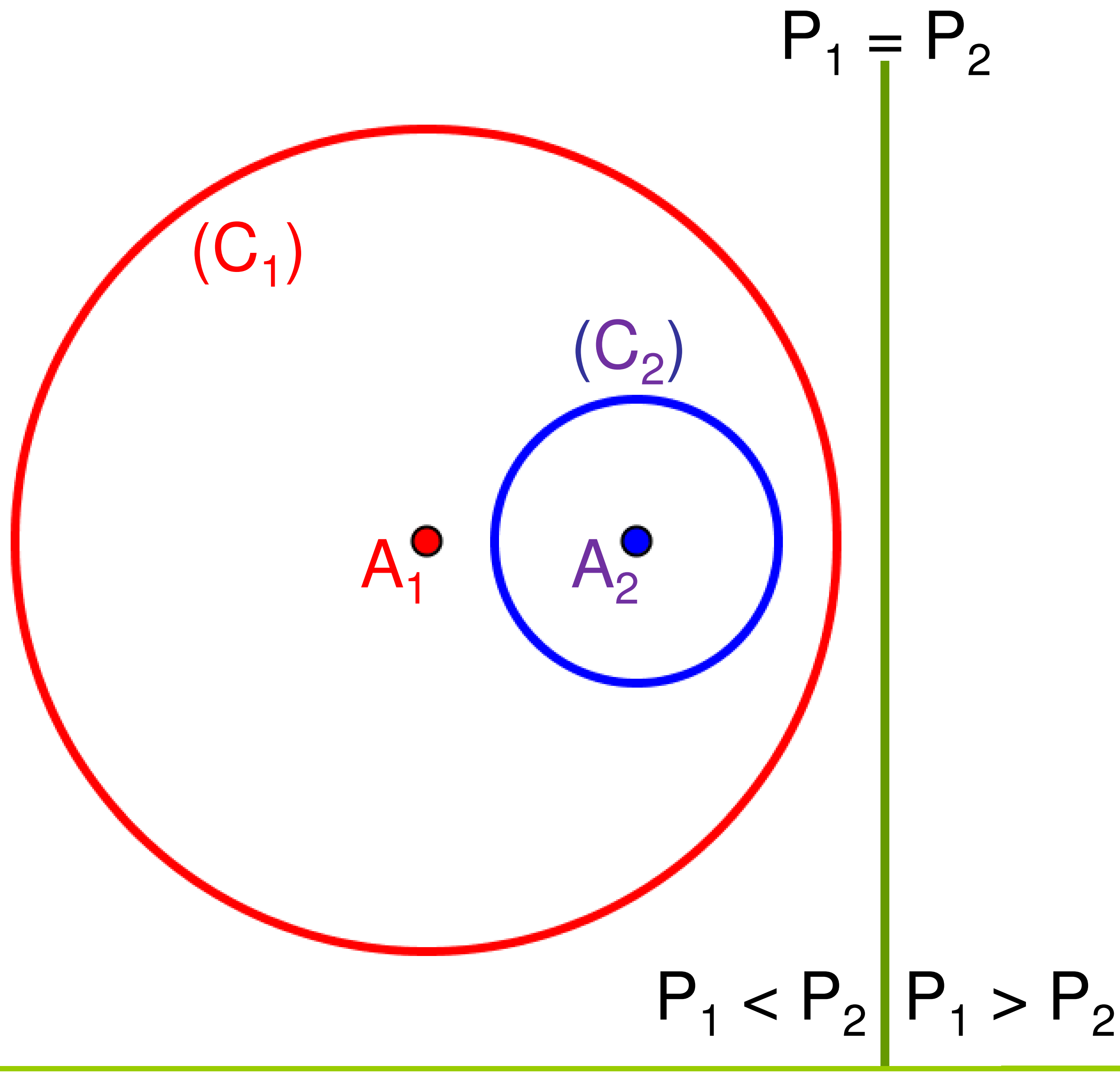
1er thème: Puissance

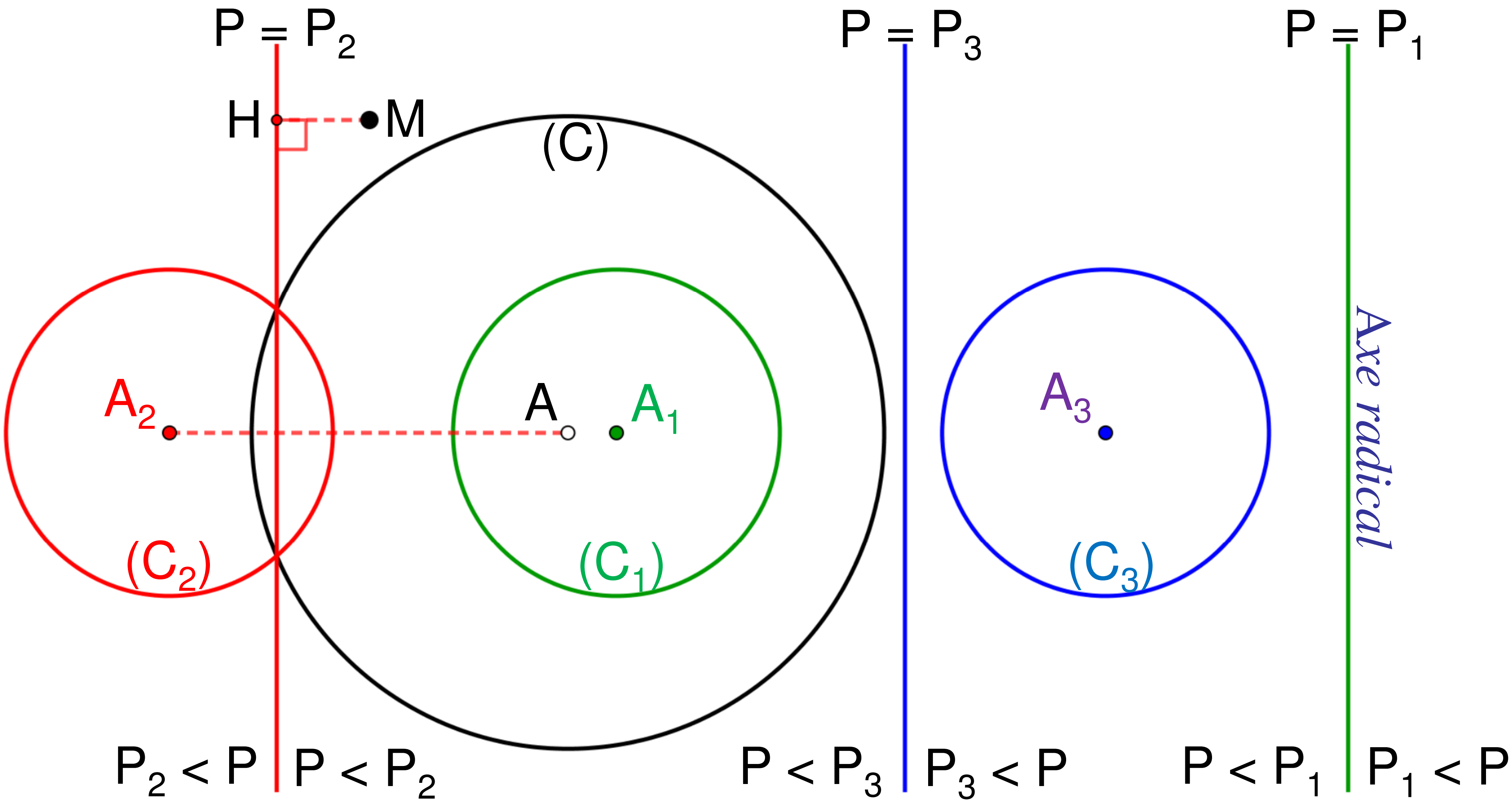



$P_1 = P_2$
(C_1)
(C_2)
A_1
A_2
$P_1 < P_2$
$P_1 > P_2$

1^{er} thème : Puissance

Axe radical



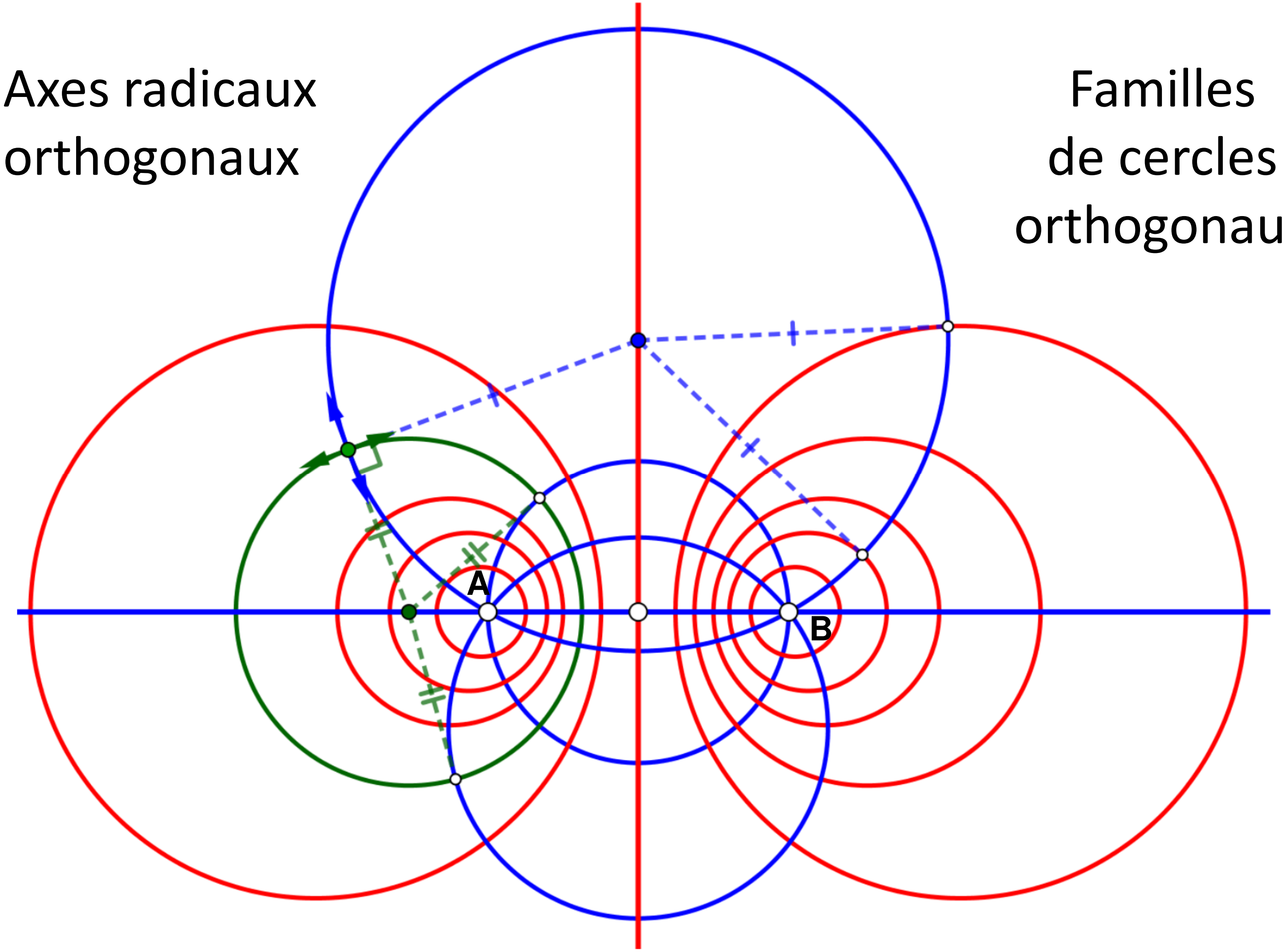


Distance du point M à l'axe radical => différence des puissances de M:

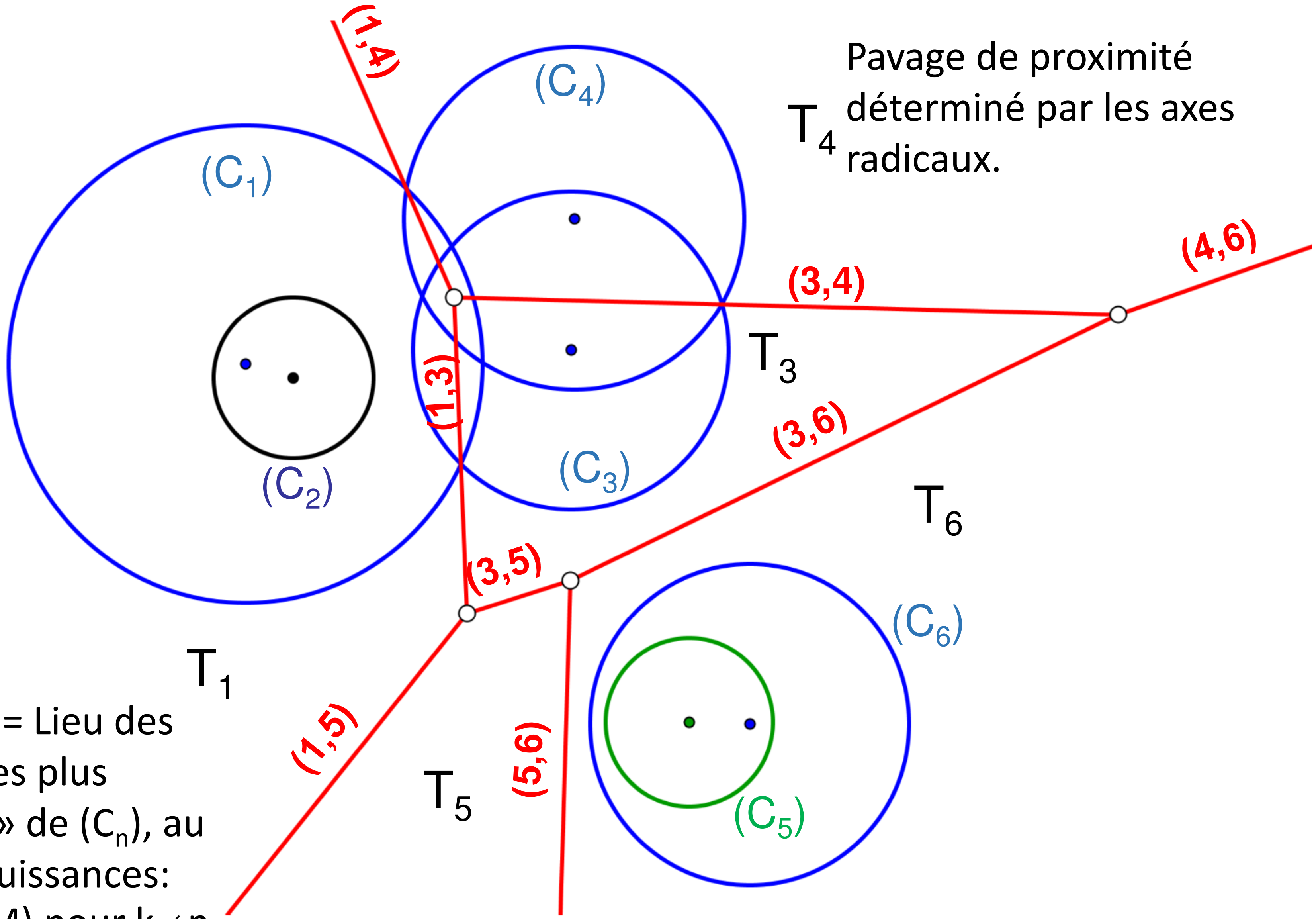
$$P_{C_2}(M) - P_C(M) = 2A_2A \cdot HM$$

Axes radicaux orthogonaux

Familles de cercles orthogonaux



A, B : Points de Poncelet



Pavage de proximité déterminé par les axes radicaux.

Tesselle T_n = Lieu des points M les plus « proches » de (C_n), au sens des puissances: $P_n(M)<P_k(M)$ pour $k \neq n$

Soit à trouver deux nombres de somme S et de produit P.

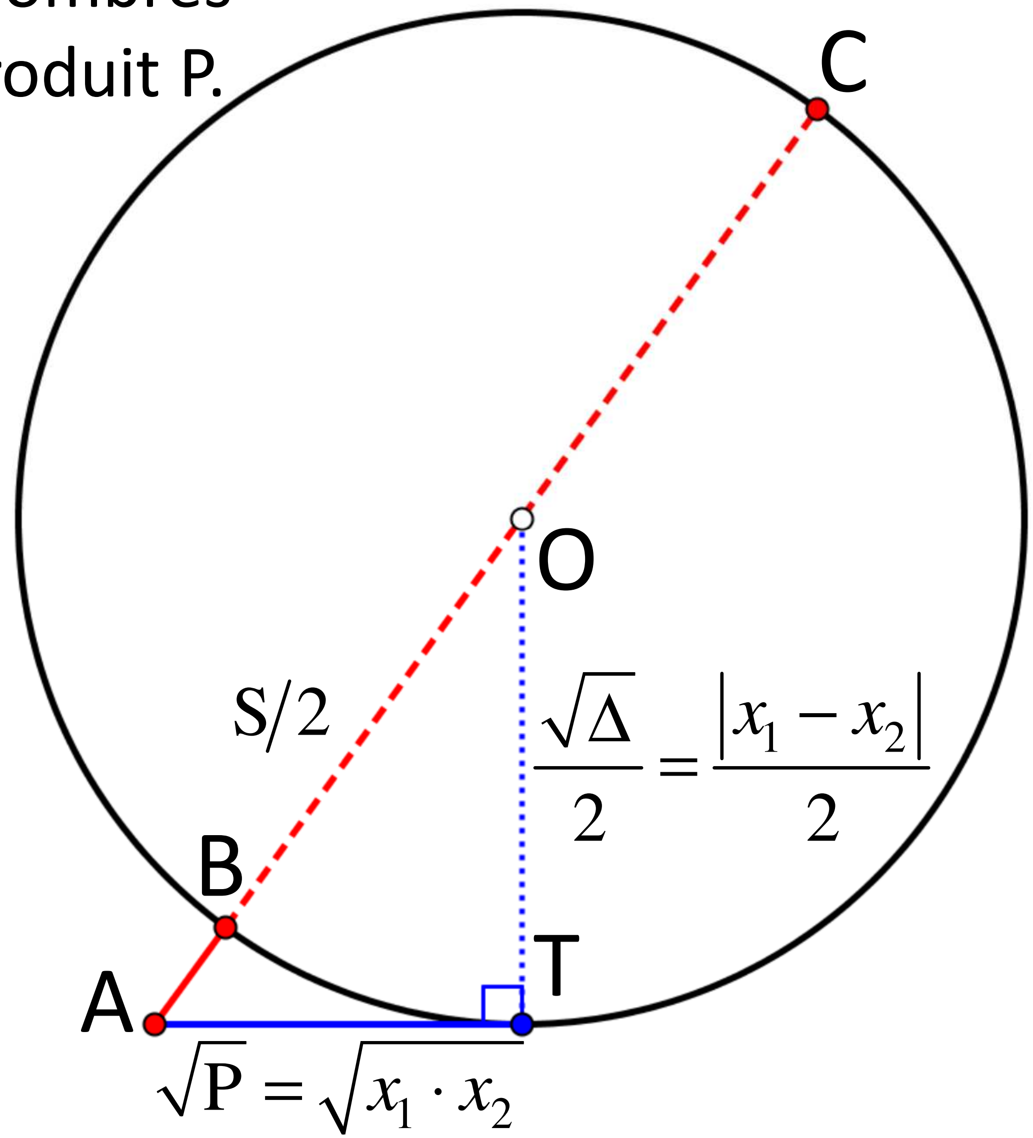
$$\mathrm{OA} = \mathrm{S}/2$$

$$\mathrm{AT} = \sqrt{\mathrm{P}}$$

$$\mathrm{OT} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Solutions:

AB et AC



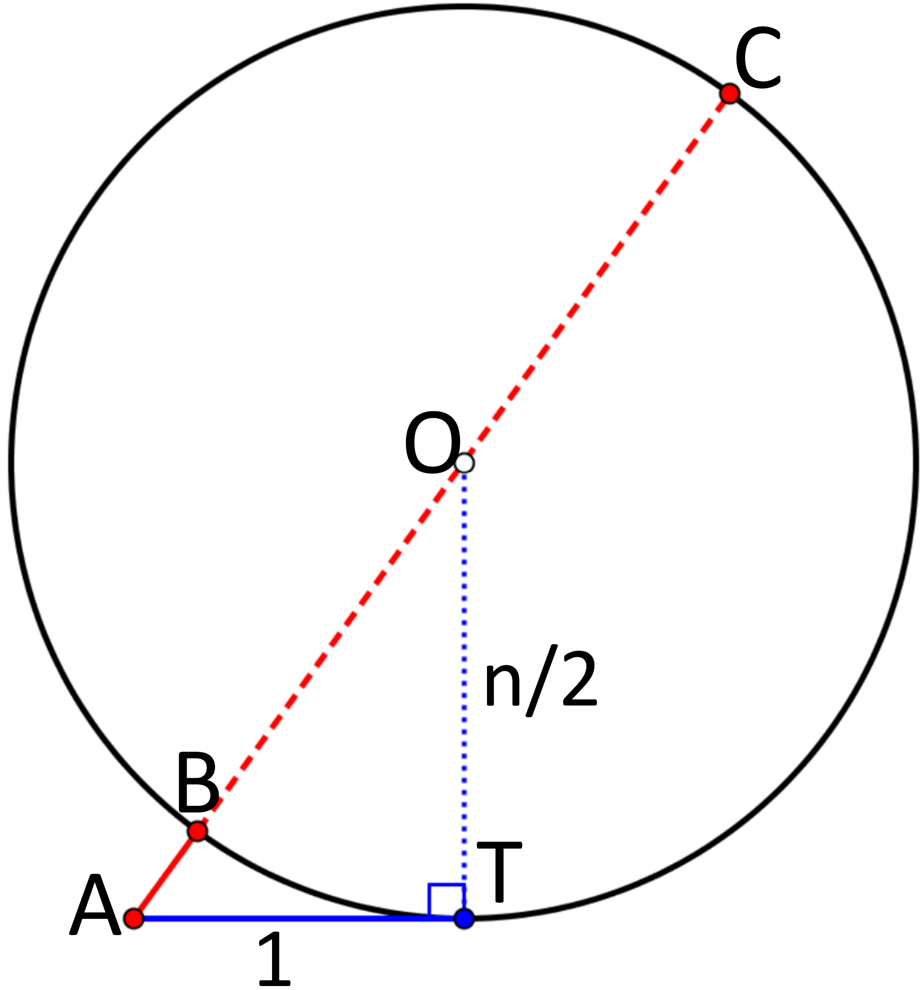
1er thème: Puissance

$$AB \cdot AC = 1$$

$$AC = n + AB$$

$$AC = n + \frac{1}{AC}$$

$$= n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{\cdots}}} \equiv [n]$$



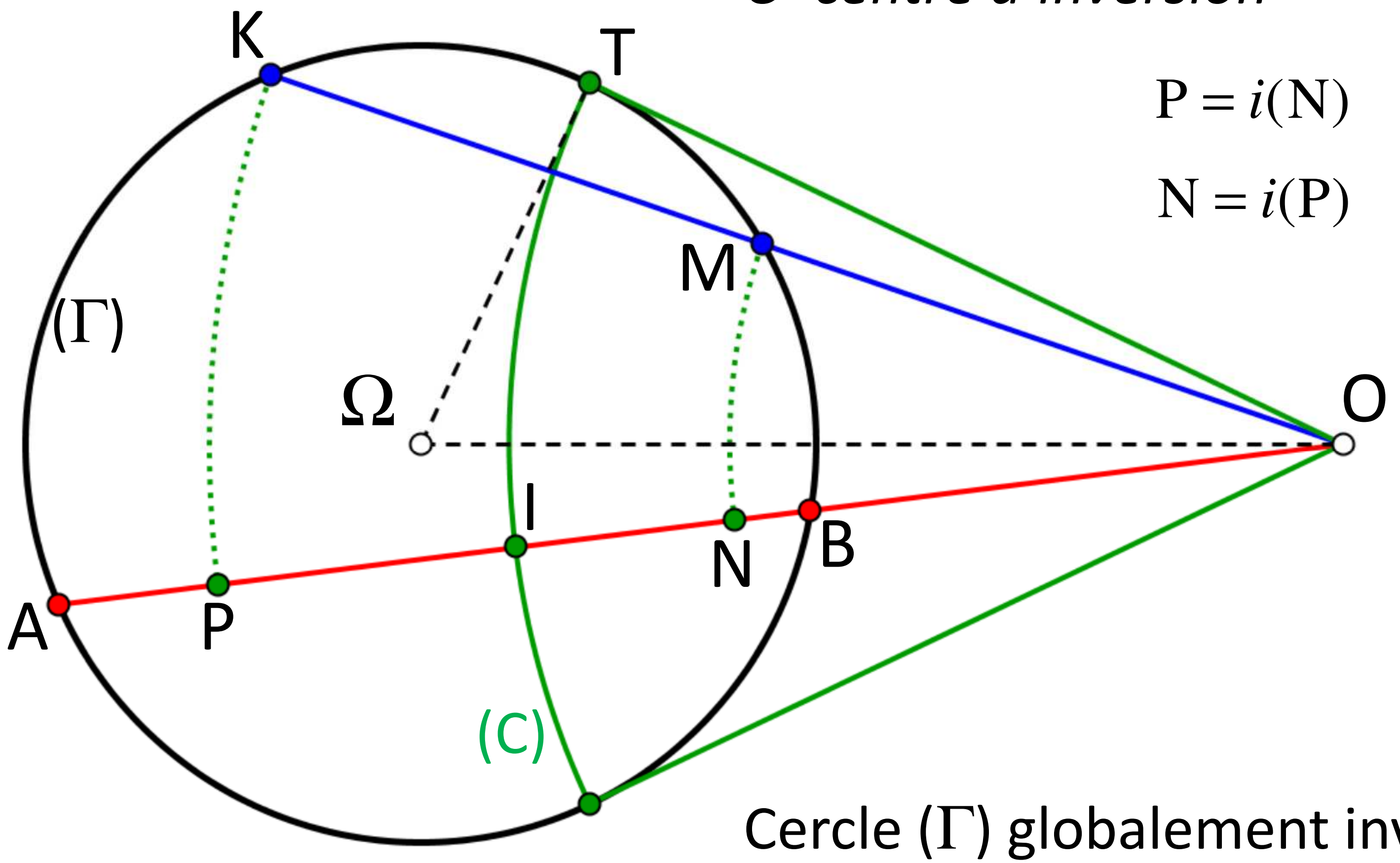
Nombre d'or : $n = 1$

L'Inversion, l'autre thème

Transformation involutive $i \circ i(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$ $\overline{\mathrm{OM}} \cdot \overline{\mathrm{OM}'} = k$

k puissance de l'inversion, (C) *cercle d'inversion*

O centre d'inversion



$\mathrm{P} = i(\mathrm{N})$

$\mathrm{N} = i(\mathrm{P})$

Cercle (Γ) globalement invariant

L'Inversion, l'autre thème

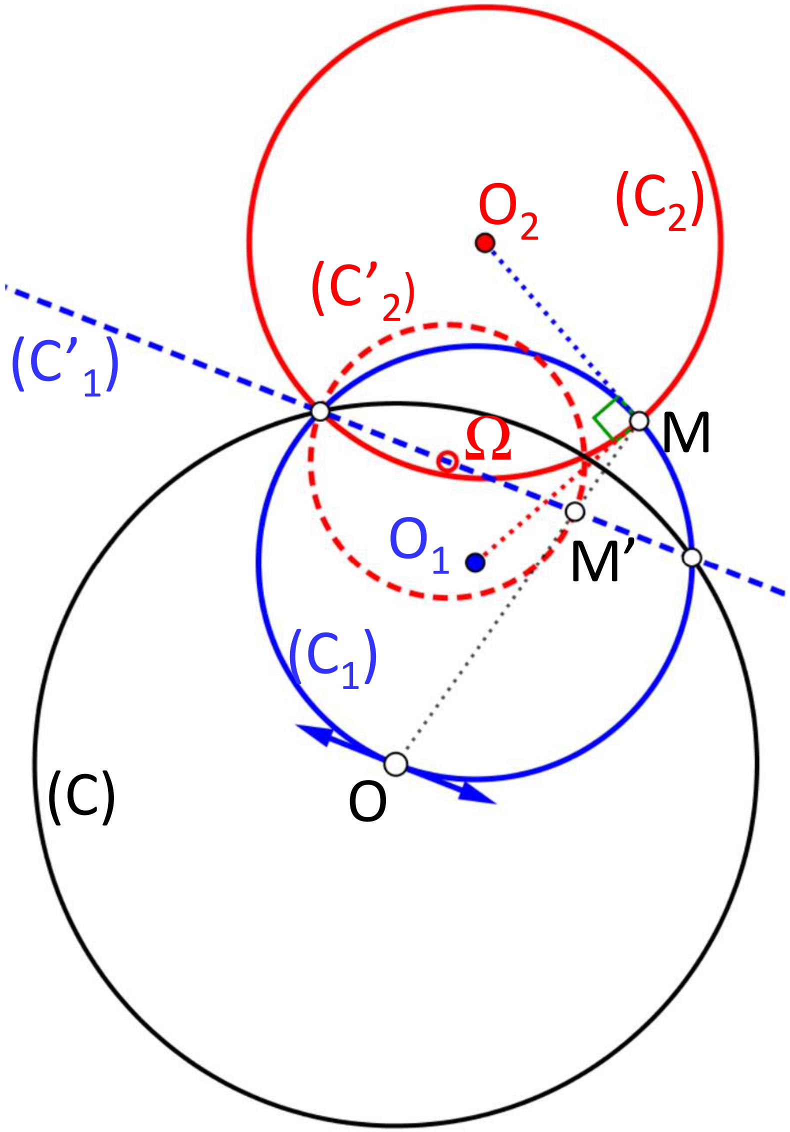
O centre d'inversion
(C) cercle d'inversion

$(C_1) \perp (C_2)$

$\Downarrow$

$(C'_1) \perp (C'_2)$

Inversion d'une droite
=
cercle passant par le centre,
tangente au centre // à la droite
(*et réciproquement*)

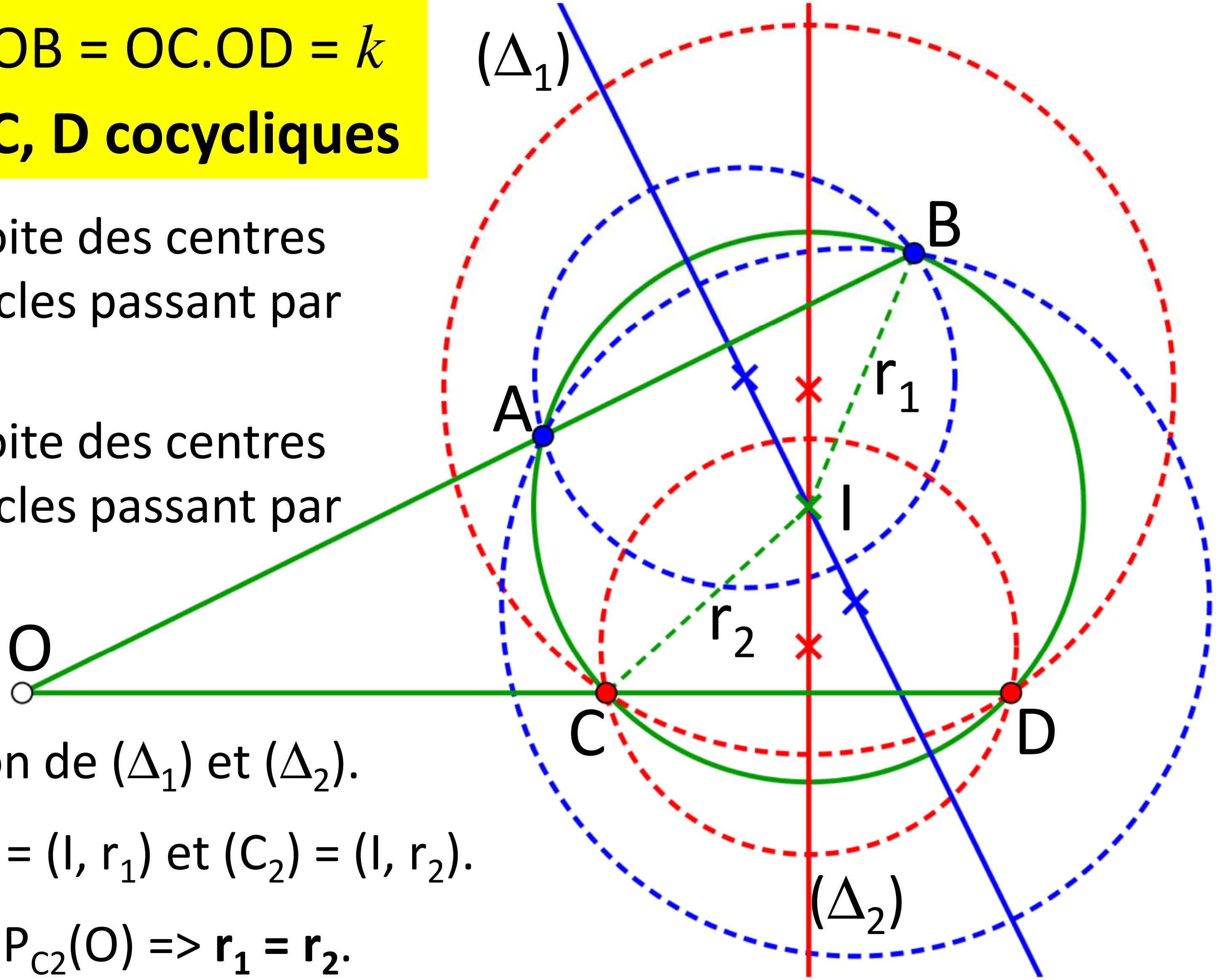


Si OA.OB = OC.OD = k

A, B, C, D cocycliques

(Δ_1) droite des centres des cercles passant par A et B.

(Δ_2) droite des centres des cercles passant par C et D.



I intersection de (Δ_1) et (Δ_2).

Cercles $(C_1) = (I, r_1)$ et $(C_2) = (I, r_2)$.

$P_{C1}(O) = P_{C2}(O) \Rightarrow \mathbf{r_1 = r_2}$.

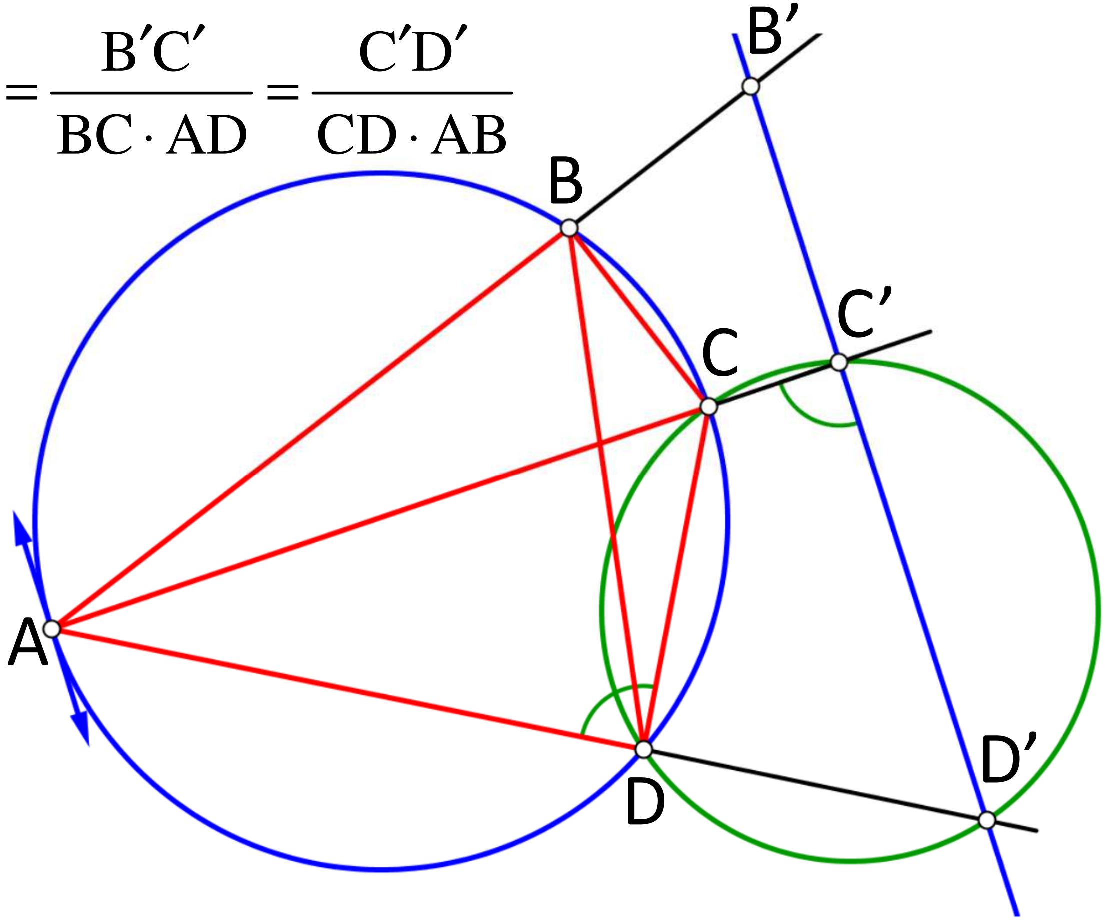
Inversion de pôle A : $\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AB}'=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AC}'=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AD}'=k$

ΔACD et ΔAC'D' semblables $\dfrac{k}{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}}=\dfrac{\mathrm{AC}'}{\mathrm{AD}}=\dfrac{\mathrm{AD}'}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{C}'\mathrm{D}'}{\mathrm{CD}}$

$$\frac{k}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{B}'\mathrm{D}'}{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{C}'\mathrm{D}'}{\mathrm{CD}\cdot\mathrm{AB}}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{\alpha a+\beta c}{\alpha b+\beta d}$$

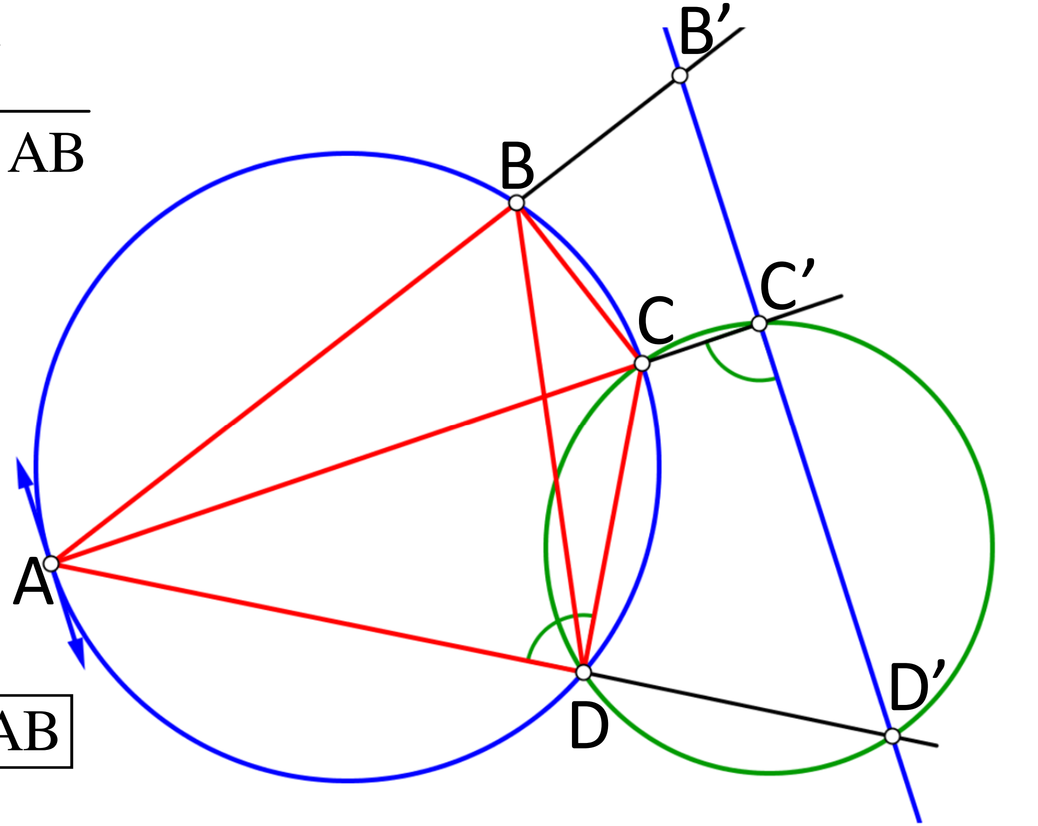
$$\frac{\mathrm{B}'\mathrm{D}'}{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{B}'\mathrm{C}'+\mathrm{C}'\mathrm{D}'}{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}+\mathrm{CD}\cdot\mathrm{AB}}$$



$$\frac{B'D'}{BD \cdot AC} = \frac{B'C' + C'D'}{BC \cdot AD + CD \cdot AB}$$

$$B'D' = B'C' + C'D'$$

$$\boxed{BD \cdot AC = BC \cdot AD + CD \cdot AB}$$



Théorème de Ptolémée : *Pour qu'un quadrilatère convexe soit inscriptible dans un cercle, il faut et il suffit que le produit des diagonales soit égal à la somme des produits des côtés opposés.*

L'Inversion, l'autre thème

Cercles tangents

Apollonios de Perga (né vers -240) : *Coniques*

5ème ouvrage : *Traité des contacts* (perdu)

2 livres, 21 lemmes, 60 théorèmes, 11 problèmes

Pappus (IVème s.) synthétise :

3 éléments quelconques étant donnés en position parmi les points (r = 0), les droites (r = ∞) et cercles, mener un cercle passant par les points (en cas de points donnés) et tangent aux droites et aux cercles.

•	/	○
3	0	0
2	1	0
2	0	1
1	2	0
1	1	1
1	0	2
0	3	0
0	2	1
0	1	2
0	0	3

10 cas résolu par Apollonios

combinatoire

EUCLIDE:

PPP = 3 points = cercle circonscrit

DDD = 3 droites non // = cercle inscrit

L'après Pappus:

François VIETE : *Apollonius Gallus* (1600)

René DESCARTES:
Quatre éléments étant donnés parmi des points, des plans et des sphères, décrire une sphère passant par les points, dans le cas de points donnés, et tangente aux plans et aux sphères.

Pierre de FERMAT: *Varia Opera mathematica* (1679)

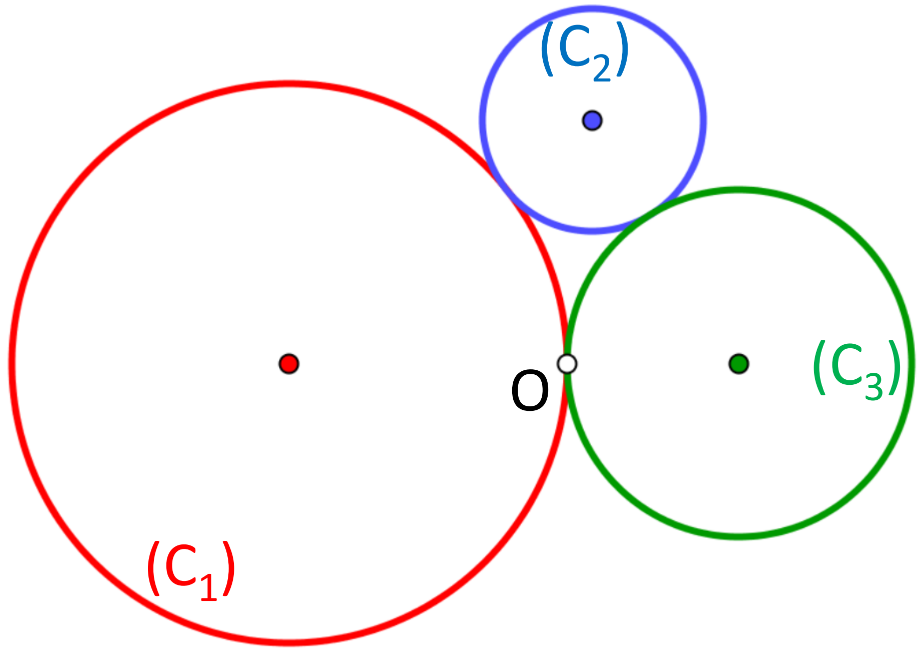
Newton : *Arithmetica Universalis* (1760) $\subset$ **VIETE**
Solution géométrique 3 cercles inégaux :
Newtoni Philosophiae naturalis principia mathematica (1725)

Michel de l'Hospital, Cramer, Castillon, Malfatti,….

3 cercles inégaux tangents deux à deux

Courbure d'un cercle de rayon R:

$$k = \frac{1}{R}$$



Théorème de Descartes:

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2 \cdot (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

Problème CCC d'Apollonius

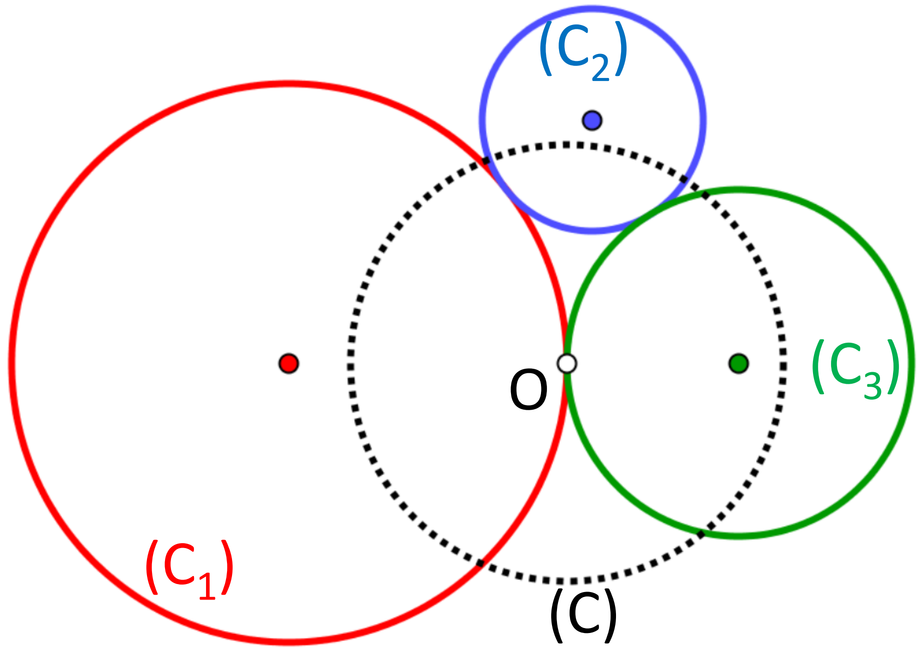
Trouver un cercle tangent à trois cercles donnés

Cas particulier: les trois cercles sont tangents entre eux.

Cercle (C) d'inversion:

Centre O : point de tangence de deux cercles

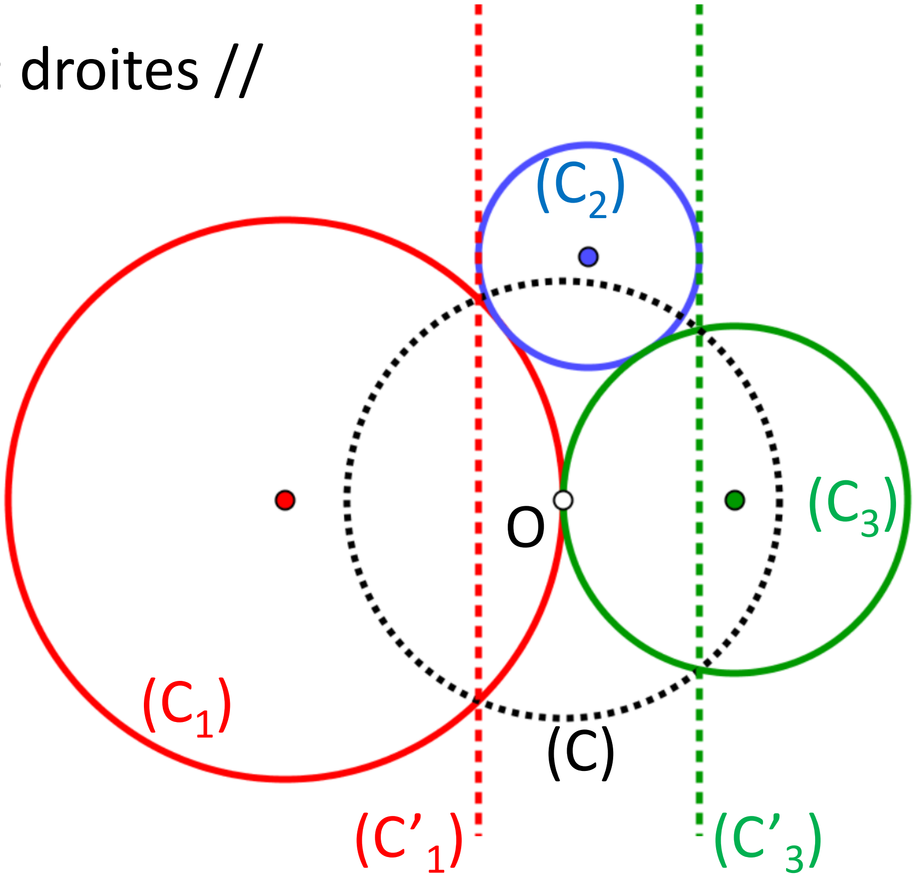
Rayon pour laisser invariant le 3ème cercle



Inversion par rapport au cercle (C) :

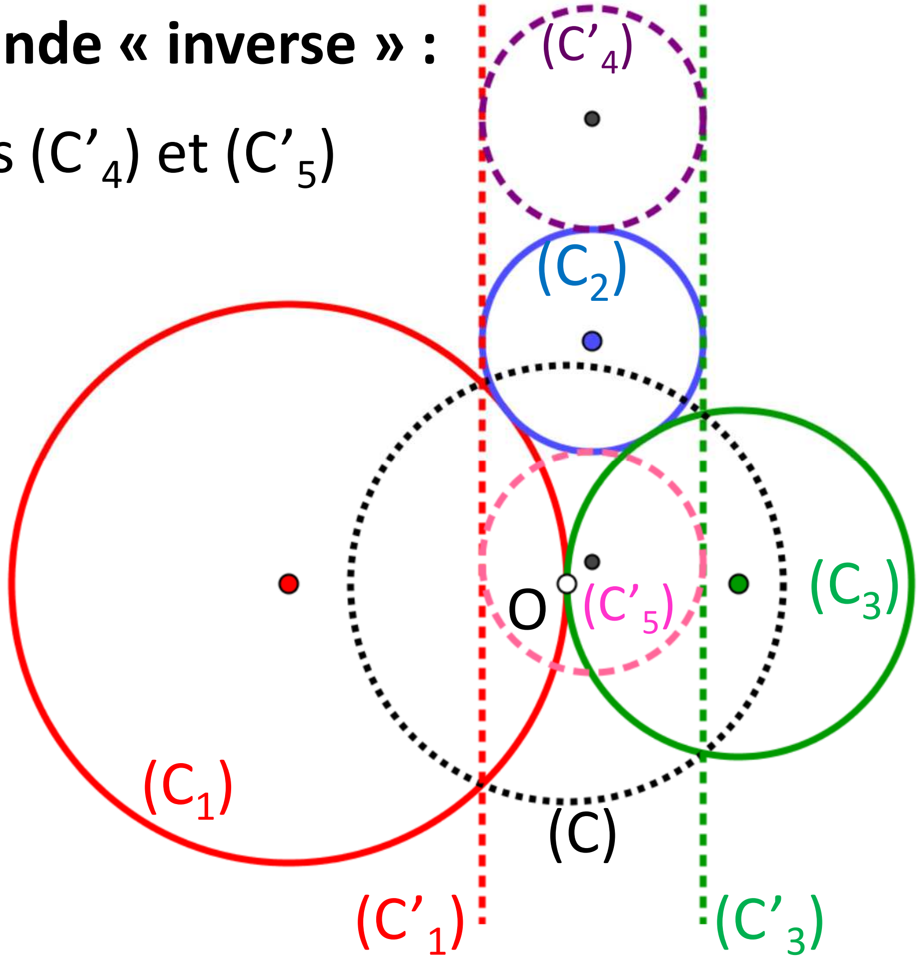
Cercles tangents en O : droites //

Cercle (C2) invariant



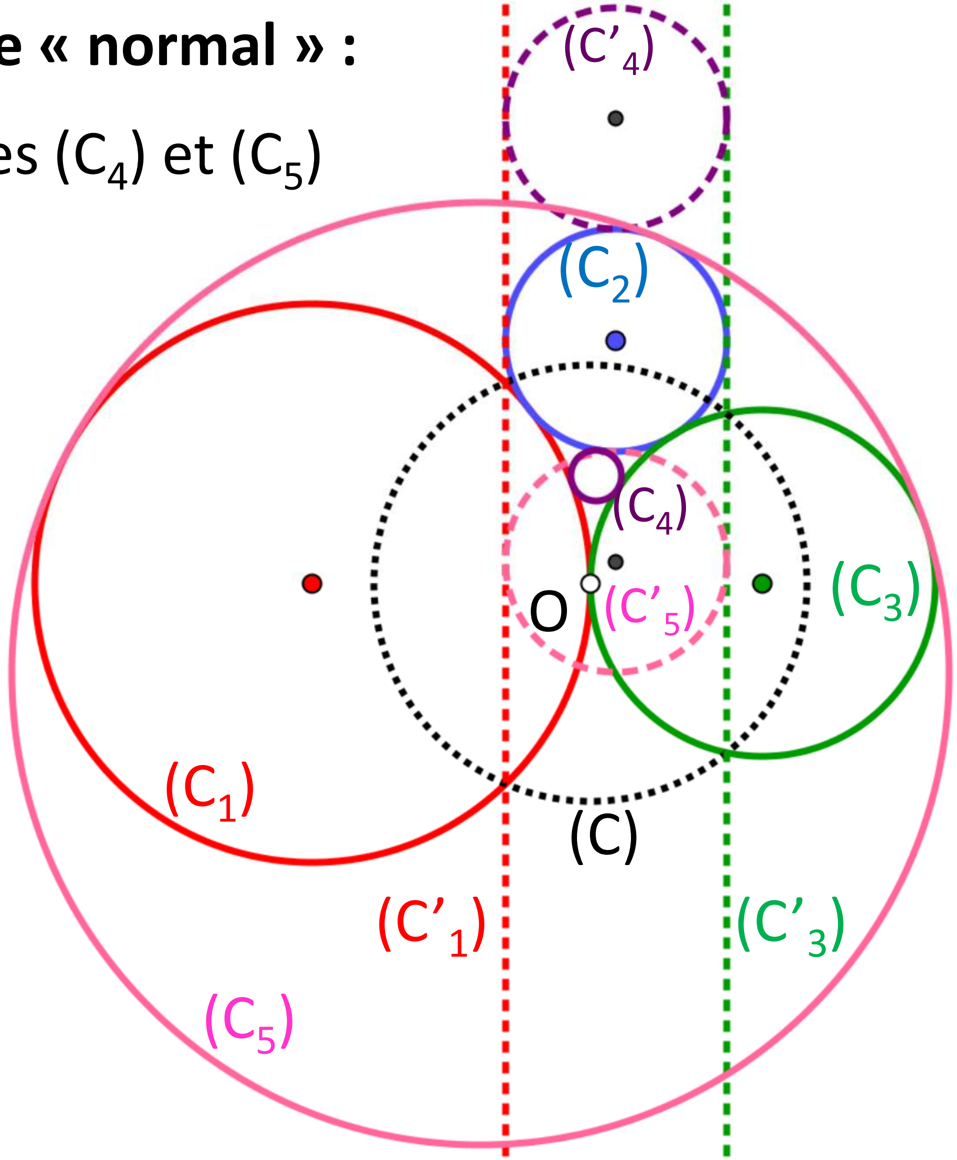
Résolution dans le monde « inverse » :

Deux solutions: Cercles (C'$_4$) et (C'$_5$)



Retour dans le monde « normal » :

Deux solutions: Cercles (C_4) et (C_5)



L'Inversion, l'autre thème

$$P_C(M) = MA^2 = MB^2$$

$$P_C(N) = -NA^2 = -NB^2$$

$$P_C(M) + P_C(N) = MN^2$$

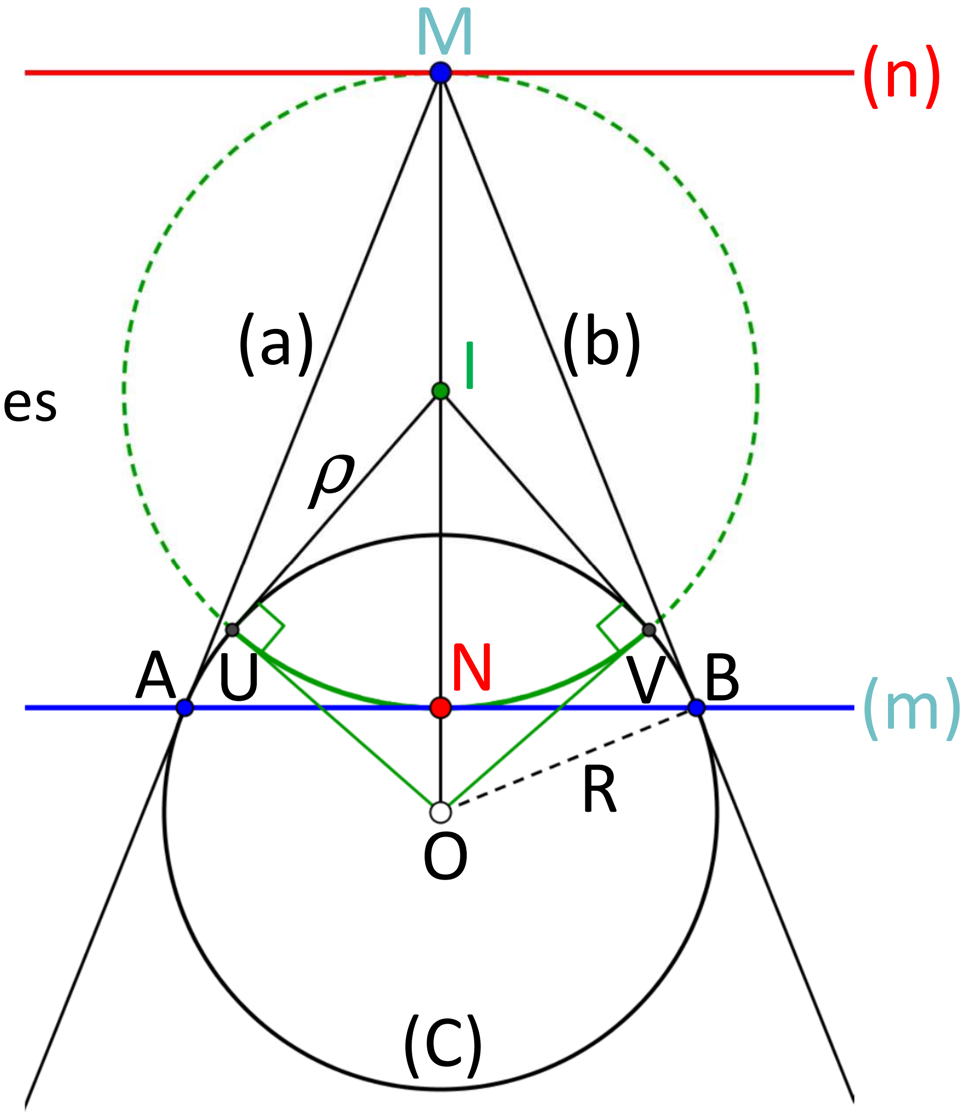
ΔMOB et ΔBON semblables

$$\frac{R}{OM} = \frac{ON}{R}$$

=> Relation symétrique:

$$OM \cdot ON = R^2$$

(m) Polaire de M
M pôle de (m)
(n) Polaire de N
N pôle de (n)



L'Inversion, l'autre thème

Quatre points alignés O, P, I, Q.
Les points O et I sont dits conjugués harmoniques s'ils divisent harmoniquement le segment [PQ], c'est-à-dire si les points P et Q divisent « de la même façon » le segment [PQ] :

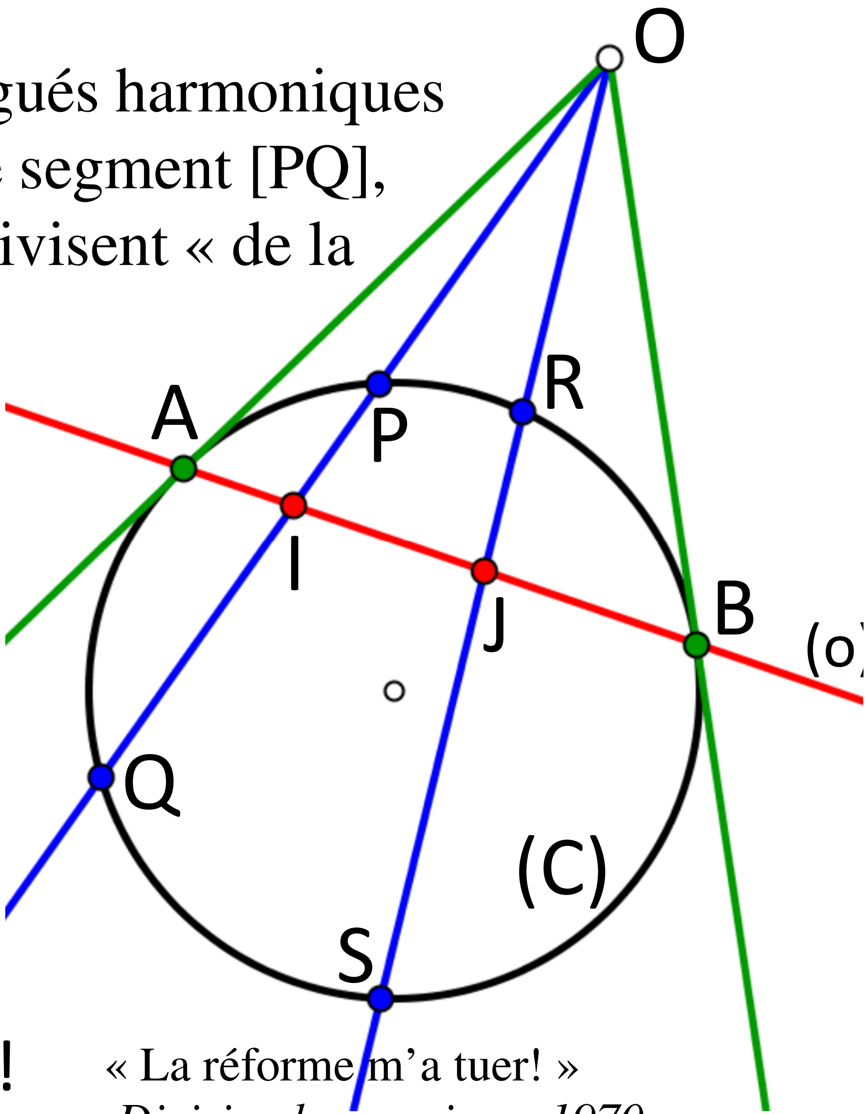
$$\frac{IP}{IQ} = \frac{OP}{OQ}$$

Birapport:

$$[P,Q,O,I] = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \cdot \frac{\overline{IQ}}{\overline{IP}} = -1$$

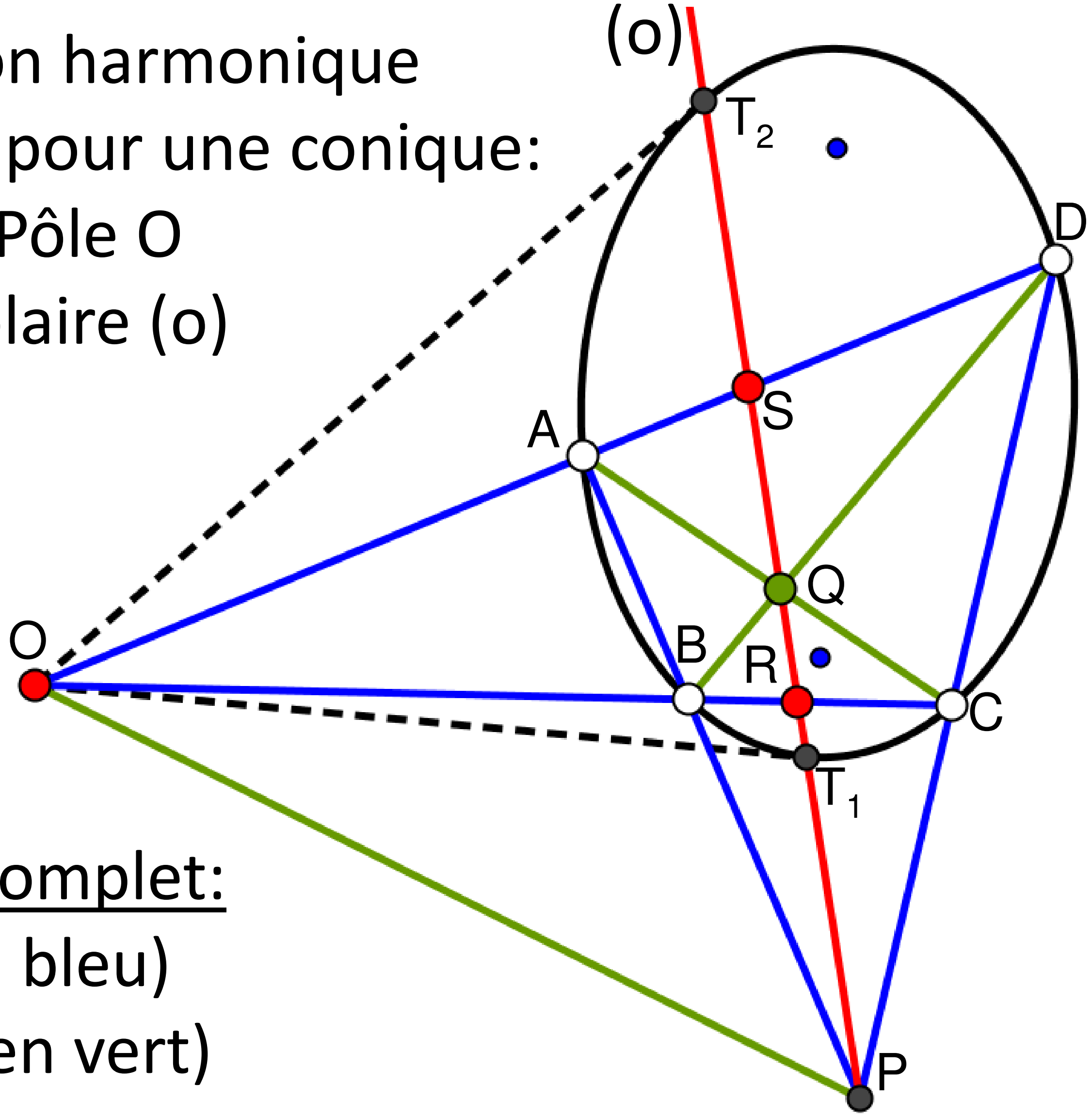
Si J tel que $[R,S,O,J] = -1$

J toujours sur la polaire (o)!



« La réforme m'a tuer! »
Division harmonique, 1970

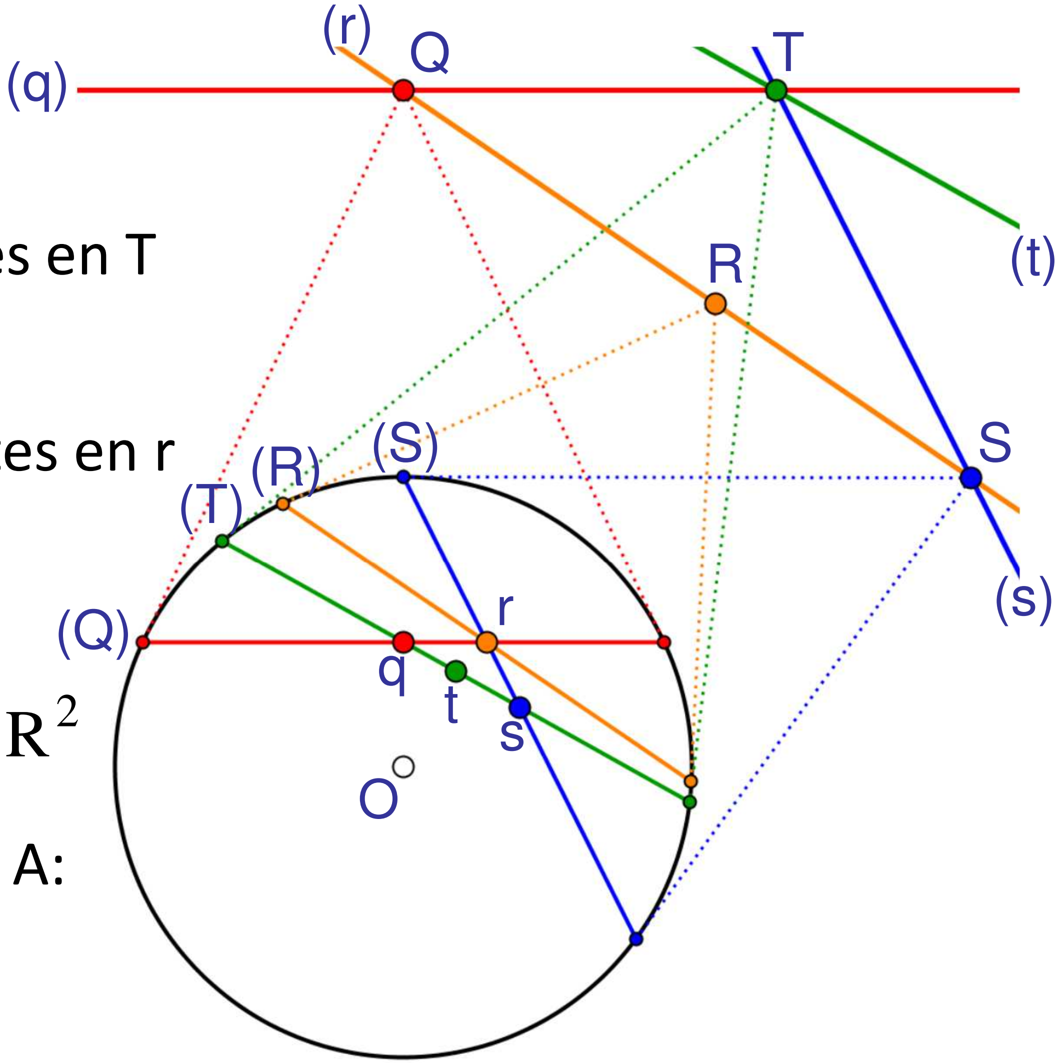
Définition harmonique
pôle-polaire pour une conique:
Pôle O
Polaire (o)



<u>Quadrilatère complet:</u>
4 droites (en bleu)
3 diagonales (en vert)

q, t, s alignés sur (T)
(q), (t), (s) concourantes en T

Q, R, S alignés sur (r)
(Q), (R), (S) concourantes en r



Plücker

Polaire: $x \cdot x_A + y \cdot y_A = R^2$

Si B appartient à la polaire de A:

$$x_B \cdot x_A + y_B \cdot y_A = R^2$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = R^2$$

La Puissance de l'Inversion