Les mystérieux carnets de Ramanujan enfin décryptés !

Édouard Thomas
Secrétaire du Kafemath

Kafemath du jeudi 19 mai 2022

La coulée douce
51 rue du Sahel
75012 Paris

Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

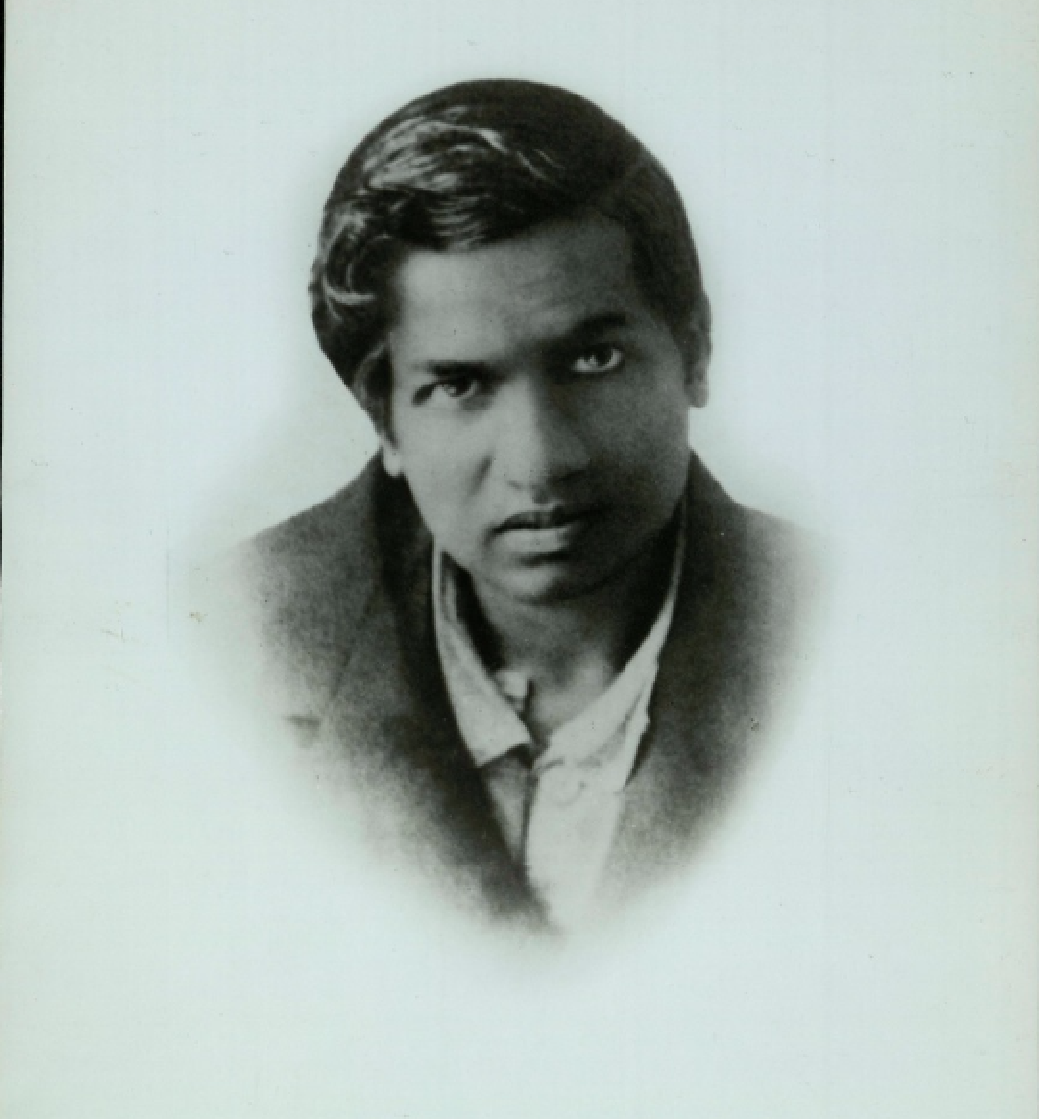
- Un mathématicien passionné
- Une destinée fulgurante
- Une intuition puissante et mystérieuse
- Des formules mathématiques inédites
- Un héritage inouï : les carnets
- *The Man Who Knew Infinity* (Matt Brown, 2016)

Précédentes interventions…

- La Coulée Douce (le 19–01–12)
- Maison des Arts et Métiers (le 19–11–13)
- Cité internationale des arts (le 14–5–14)
- Maison de l’environnement, des sciences et du développement durable, Magny-les-Hameaux (le 4–12–14)
- Association des Supélec (le 17–3–16)
- Salon « culture et jeux mathématiques » (le 28–5–16)

… pour tout savoir sur Ramanujan

- Espace sciences et Métiers, Saint-Brieuc (le 24–01–17, **disponible en ligne**)
- Comité de la régie d'entreprise de la RATP (le 11–3–17)
- Bibliothèque municipale, Vendôme, puis Bibliothèque Abbé-Grégoire, Blois (le 17–6–17, **DVD disponible**)
- Maison des Arts et Métiers (le 18–6–19)



Les contributions mathématiques

De nombreux domaines abordés :

séries (hypergéométriques, de Dirichlet, de Lambert, d'Eisenstein, bilatérales, *q*-séries), **fonctions spéciales** (fonctions thêta, fausses formes modulaires, fonctions elliptiques), **analyse combinatoire** (nombres de Bernoulli, transformations, identités remarquables, invariants de classe, équations modulaires, modules singuliers), **théorie des nombres** (fonctions arithmétiques, fractions continues, radicaux imbriqués, nombre de partitions, fonction tau, conjecture de Ramanujan), **analyse** (produits infinis, calcul intégral, développements asymptotiques, formules d'inversion, produit de Hadamard)…

Points d'orgue

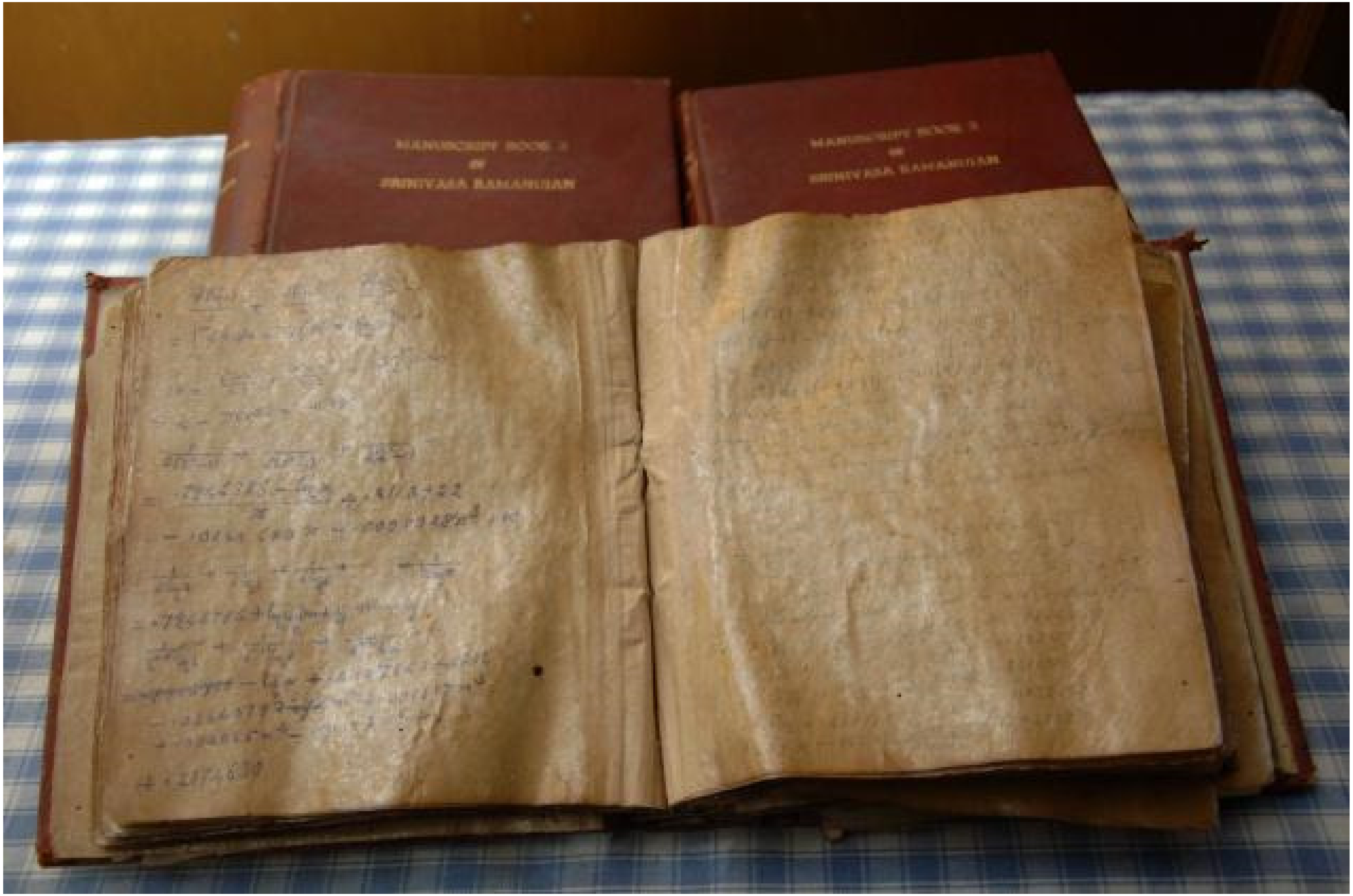
- La théorie des partitions (partages d'entiers)
- Travaux et conjecture sur la fonction tau
- Une théorie des séries divergentes
- De nouvelles formules pour approximer π
- La fraction continue de Rogers–Ramanujan
- Approximations diophantiennes
- Valeur de zêta aux entiers positifs impairs
- Les « fausses formes modulaires »

Publications

- Une vingtaine d'articles en Europe
- Une vingtaine de notes
- La correspondance avec Hardy
- 3 rapports trimestriels (université de Madras)
  formules d'interpolation, théorème maître de Ramanujan
- 58 problèmes soumis au *Journal Of The Indian Mathematical Society*
- … et **3 carnets**

Les carnets

- Compilés entre 1903 et 1914
- Assemblage grossier de feuilles de papier
- Uniquement des résultats aboutis
  - Absence de développements, d'explications, de définitions, de conventions, de notations…
  - Calculs intermédiaires réalisés sur ardoise
  - Coût du papier, influence de George Carr
  - « Cartes de visite », non destinés à publication



Des documents à analyser

- Carnet 1 : 351 pages
- Carnet 2 : 356 pages (reprend le carnet 1)
- Carnet 3 : 33 pages
- « Carnet perdu » : 138 / 419 pages
- Peu d'organisation, gestion confuse des pages
- Quasiment aucune indication
- Aujourd'hui numérisés et disponibles

Il faut
les éditer !

- 1920 : Hardy plaide pour une édition des trois carnets de Ramanujan
- Pour les résultats déjà connus : produire une référence précise
- Pour les résultats corrects : en fournir une preuve, si possible dans l'esprit de l'auteur
- Pour les résultats faux : un résultat correct n'est sans doute pas loin, il faut le chercher…

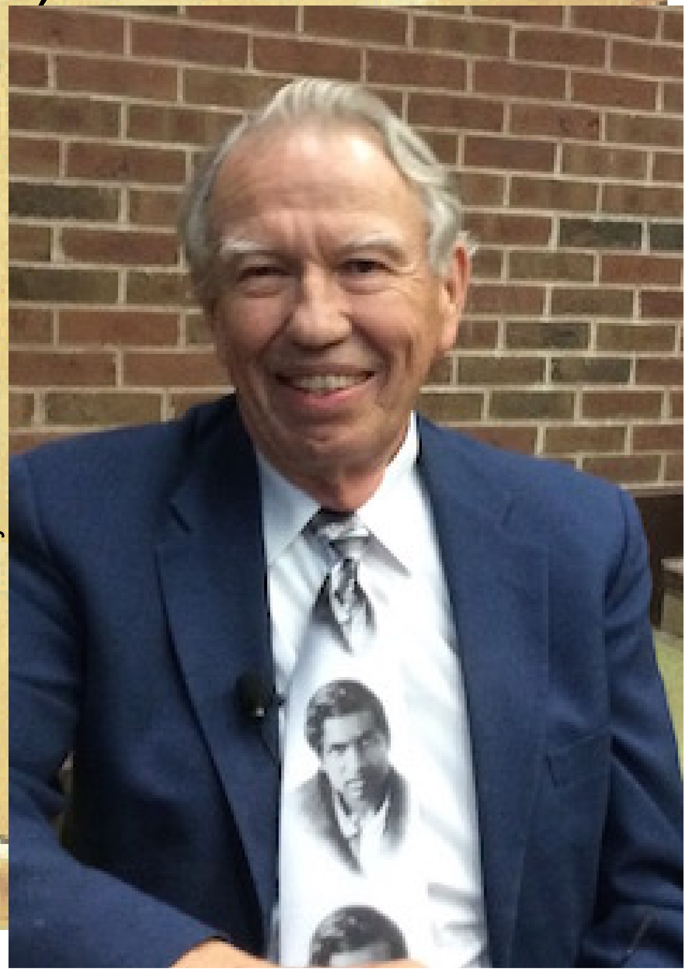
Une tâche laborieuse

- 1920–1947 : Hardy produit une vingtaine d'articles inspirés des carnets
- 1929–1940 : travail d'édition entrepris par Bertram Martin Wilson et George Neville Watson (plus de trente articles issus de six à huit chapitres du carnet 2)
- Travaux épars de divers mathématiciens

Le « *q-king* »

- George Andrews (né en 1938) : expert des *q*-séries et des fonctions spéciales

- 1976 : découvre des manuscrits inattendus à la bibliothèque du Trinity College (« carnet perdu »)



Le « carnet perdu »

- 138 pages manuscrites de Ramanujan
- 1 200 résultats (*q*-séries, fonctions thêta, fonctions thêta déguisées / fausses formes modulaires, équations modulaires, modules singuliers, intégrales, séries de Dirichlet…)
- Travaux réalisés entre 1919 et 1920
- Absence de textes
- 1987 : publication **élargie** (419 pages)

Bruce Berndt

- Né en 1939
- Théoricien des nombres (analyse et séries)
- 1974 à 1978 : se convainc de reprendre tout le travail éditorial sur les trois carnets
- Démarche systématique, rigoureuse, tenace

- Aide de nombreux mathématiciens, d'étudiants, de l'éditeur Springer, de fondations…

21 ans plus tard…

- 1998 : l’édition des trois carnets est achevée
- **3 254 résultats** (comptabilité de Berndt)
- **Moins d’une dizaine sont faux**
- **Les deux tiers sont originaux**
- 5 livres (2 300 pages)
- Plus de 100 articles

Citations 1

- *« Des formules telles que, s'il ne les avait pas écrites, personne ne les aurait trouvées, même dans cent ans, même dans deux cents ans »* (Berndt)
- *« Sans aucun doute, Ramanujan pensait comme tout autre mathématicien, il pensait simplement* "with more insight" *que la majorité d'entre nous »* (Berndt)

Le carnet perdu

- Plusieurs dizaines d'articles de G. Andrews
- Édition systématique avec B. Berndt :
  - 2005, volume I, 440 pages
  - 2009, volume II, 420 pages
  - 2012, volume III, 446 pages
  - 2013, volume IV, 452 pages
  - 2018, volume V, 430 pages
- La dernière formule a cédé fin 2021

Citations 2

- *« Ramanujan savait parfaitement quand ses méthodes heuristiques le conduisaient à des résultats corrects, et quand ce n'était pas le cas »* (Berndt)
- *« Personne, dans l'histoire des mathématiques, ne possédait l'habileté de Ramanujan dans le domaine des fractions continues ou des radicaux imbriqués »* (Berndt)

Florilège

$$\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}=3{,}1416\ldots$$

370

11

(1) $\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}} = 3.14164\cdots = \pi + .00005$

(2). $\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{7}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{13}{4^2}\cdot\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 + \frac{19}{4^3}\cdot\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \cdots$

(3). $\frac{16}{\pi} = 5 + \frac{47}{64}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{89}{64^2}\cdot\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 + \frac{131}{64^3}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \cdots$

(4) $\frac{8(1+\sqrt{5})}{\pi} = (6+\sqrt{5}) + (66+19\sqrt{5})\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{64}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8 +$

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9} - 2\right)}$$

$$2\sin\frac{\pi}{18}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{\ldots}}}}}$$

où la suite des signes −, +, + a pour période 3

$$\frac{\sum\limits_{n\geq 0} e^{-7\pi n^2}}{\sum\limits_{m\geq 0} e^{-\pi m^2}} = \sqrt[8]{28}\,\frac{\sqrt{13+\sqrt{7}}+\sqrt{13+3\sqrt{7}}}{14}$$

Pour $\quad 0 < a < b + \frac{1}{2}$,

$$\int_0^{+\infty} \prod_{j \geq 1} \frac{1 + \left(\frac{x}{b+j}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a+j-1}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)\Gamma(b+1)\Gamma\left(b - a + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)\Gamma(b-a+1)}$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}=\prod_{j\geq 1}\frac{1}{(1-q^{5j-1})(1-q^{5j-4})}$$

Soit q un complexe tel que $|q| < 1$.

On définit les fonctions suivantes :

$$\Psi(q) = \sum_{m \geq 0} q^{\frac{m(m+1)}{2}}, \quad f(-q) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}(q) = \cfrac{q^{1/5}}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{q^2}{1 + \cfrac{q^3}{\ddots}}}}$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\mathrm{R}\left(e^{-2\pi}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Une formule pour déterminer $\mathrm{R}\left(e^{-\pi\sqrt{u}}\right)$ pour tout rationnel positif *u*

Pour $u = 64$:

$$R\left(e^{-8\pi}\right) = \sqrt{c^2+1} - c, \quad \text{où} \quad 2c = 1 + \frac{a+b}{a-b}\sqrt{5},$$

$$\text{avec} \quad a = 3 + \sqrt{2} - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad b = \sqrt[4]{20}$$

$$
\begin{aligned}
5^{3/5}\int_0^q \frac{f^2(-t)\,f^2\left(-t^5\right)}{\sqrt{t}}\,dt
&= 2\int_{\arccos\left(\left(\varepsilon \mathrm{R}(q)\right)^{5/2}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^{-5}5^{-3/2}\sin^2\varphi}} \\
&= \sqrt{5}\int_0^{2\arctan\left(5^{1/4}\sqrt{q}\,\frac{f^3\left(-q^5\right)}{f^3(-q)}\right)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^{-5}5^{-3/2}\sin^2\varphi}} \\
&= \int_0^{2\arctan\left(5^{3/4}\sqrt{q}\,\frac{\Psi\left(q^5\right)}{\Psi(q)}\right)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon 5^{-1/2}\sin^2\varphi}}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}} = n\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Alg}\left(\ell, \ell', k, k'\right)$$

Équations modulaires

(à la sauce Kafemath)

Un concept facile à saisir

- Pour une fonction réelle f donnée, « relation algébrique » entre $f(x)$ et $f(x^2)$, $f(x^3)$… $f(x^n)$…
- Le plus grand entier n qui apparaît est l'*ordre*

- Pour une fonction f constante, $f(x) = f(x^n)$ quel que soit l'entier n

- Pour une fonction puissance, idem :

$$f(x) = x^p,\ (f(x))^n = (x^p)^n = x^{np} = (x^n)^p = f(x^n)$$

Au-delà des cas triviaux

- Pour le logarithme népérien ($f(x) = \ln x$) :

$$f(x^n) = \ln(x^n) = n \ln(x) = n\, f(x)$$

- Une équation modulaire d'ordre 2 (exemple) :

$$f(x) = \frac{2\sqrt{f(x^2)}}{1 + f(x^2)}$$

- D'autres exemples d'équations modulaires : les formes modulaires (variable complexe z) !

Modules singuliers

- Les formes modulaires vérifient des symétries riches, surprenantes, inhabituelles
- Omniprésentes dans les carnets
- Invariants (nombres algébriques) vérifiant des conditions supplémentaires : *modules singuliers*
- L'expert historique en la matière : Ramanujan
- Mise en évidence d'un lien avec des formules d'approximation de π (Ramanujan, 1914)

Retour à R

$$\mathrm{R}(q) = \cfrac{q^{1/5}}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{\ddots}}}}$$ est la fraction continue de Rogers–Ramanujan

Elle vérifie de nombreuses équations modulaires :

$$\mathrm{R}(q)\mathrm{R}\left(q^4\right) = \frac{\mathrm{R}\left(q^4\right) - \mathrm{R}^2(q)\mathrm{R}\left(q^2\right)}{\mathrm{R}\left(q^4\right) + \mathrm{R}^2\left(q^2\right)}$$ (ordre 4)

$$\mathrm{R}(q)\mathrm{R}(-q)\mathrm{R}^2\left(q^2\right) = -\frac{\mathrm{R}(q)\mathrm{R}(-q) + \mathrm{R}\left(q^2\right)}{\mathrm{R}(q) + \mathrm{R}(-q)}$$ (ordre 2)

Un lien avec π (1)

La forme modulaire

$$f(z) = 16z \prod_{n \geq 1} \left(\frac{1+z^{2n}}{1+z^{2n-1}} \right)^8$$

vérifie l'équation modulaire d'ordre 7 suivante :

$$\sqrt[8]{f(z) f\left(z^7\right)} \times \sqrt[8]{\left(1-f(z)\right)\left(1-f\left(z^7\right)\right)} = 1$$

Un lien avec π (2)

- Une suite de modules singuliers associée :

$$k_p = \sqrt{f\left(e^{-\pi\sqrt{p}}\right)}$$

- « Très curieusement », les nombres $\dfrac{-2}{\sqrt{p}}\ln\dfrac{k_p}{4}$

coïncident avec π sur plusieurs décimales !

- Plus *p* augmente, meilleure est la précision

Un lien avec π (3)

Lorsque l'entier *p* vaut 210, Ramanujan a calculé (première lettre à Hardy) :

$$k_{210} = \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)^2\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^2\left(\sqrt{64}-\sqrt{63}\right)$$
$$\times\left(\sqrt{10}-\sqrt{9}\right)^2\left(\sqrt{15}-\sqrt{14}\right)\left(\sqrt{16}-\sqrt{15}\right)^2\left(\sqrt{36}-\sqrt{35}\right),$$

qui conduit à vingt décimales correctes de π

Un lien avec π (4)

- Pour $p = 2^{40} = 1\ 099\ 511\ 627\ 776$, on obtient π avec plus d’un million de décimales correctes !
- Ramanujan en déduit des constructions approchées de π à la règle et au compas
- Il en déduit également ses célèbres formules donnant exactement π (et dont la validité ne sera établie que dans les années 1986–1990)

Un lien avec π (5)

- Ramanujan, 1914 :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9\,801} \sum_{n \geq 0} \frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)^4\, 396^{4n}}$$

- Chaque terme de la somme ajoute
  huit décimales correctes supplémentaires

Formes modulaires et conjectures de Ramanujan

Arithmétique : des *q*-séries remarquables

Elles sont des **formes modulaires** :

- Séries thêta (représentations de l'entier n comme somme de carrés)
- Séries d'Eisenstein (somme des diviseurs)
- Séries q-hypergéométriques (partages de n)
- Provenant de courbes elliptiques (nombre des solutions des congruences modulo n)
- Provenant des représentations galoisiennes (décomposition de l'entier n dans un corps de nombres)

Formes modulaires

Forme modulaire de *poids* *k* (« symétrie ») :

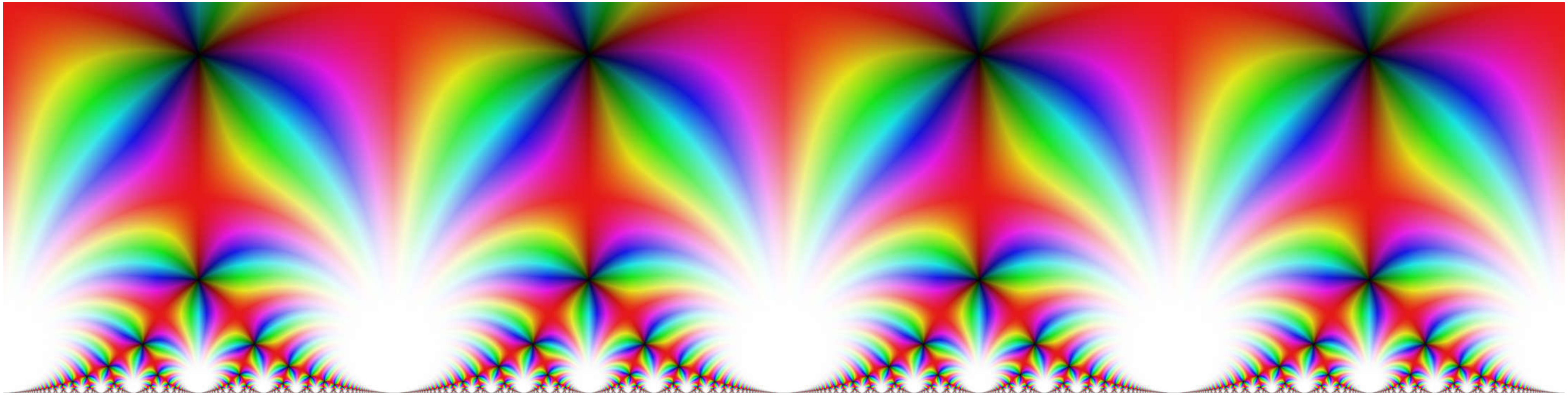
$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\left(cz+d\right)^k f\left(z\right)$$ dès que $ad - bc = 1$

Pour $a = b = d = 1$ et $c = 0$: $f(z+1) = f(z)$
donc f est développable en série de Fourier

0 est la seule forme modulaire de poids impair

Exemples : fonction êta de Dedekind,
j-invariant de Klein d'une courbe elliptique

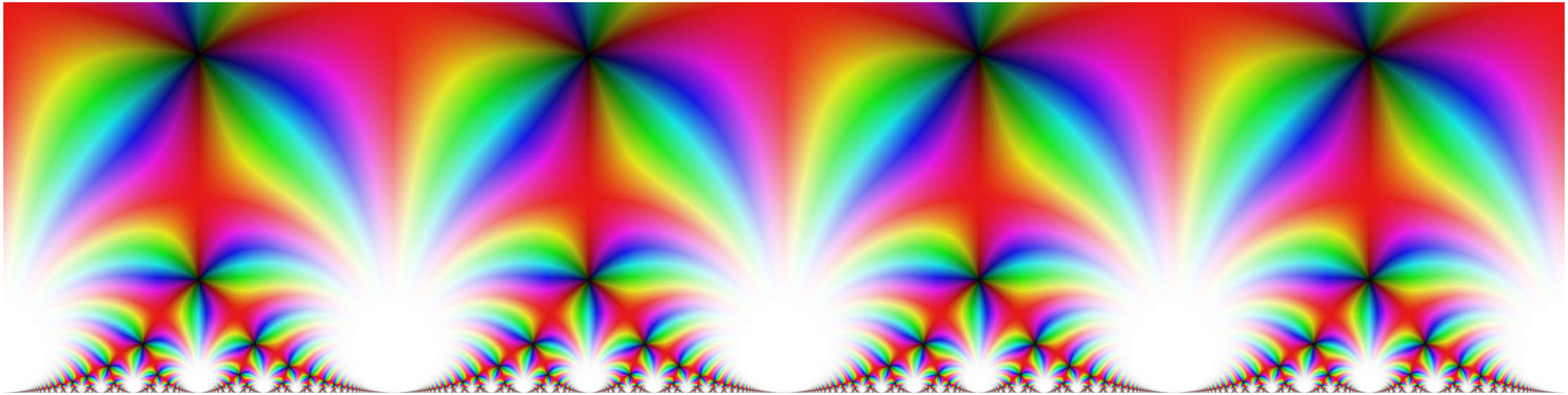
Le *j*-invariant sur [–2, 2] × [0, 1].



(Images de Fredrik Johansson, 2014)

Zoom sur $\left[\sqrt{2}, \sqrt{2}+10^{-101}\right] \times \left[0,\ 2{,}5 \times 10^{-102}\right]$.

Le j-invariant sur $[-2, 2] \times [0, 1]$.



Géométriquement, les formes modulaires « sont des fractales » !
(Images de Fredrik Johansson, 2014)

Zoom sur $\left[\sqrt{2}, \sqrt{2}+10^{-101}\right] \times \left[0,\ 2{,}5 \times 10^{-102}\right]$.

Le discriminant modulaire

$$\Delta(z) = q\prod_{n\geq 1}\left(1-q^n\right)^{24}, \quad q = \exp(2i\pi z), \quad \mathrm{Im}(z) > 0$$

- On a bien $|\,q\,| < 1$
- $\Delta(z) = q - 24q^2 + 252q^3 - 1\,472q^4 + 4\,830q^5$
  $- 6\,048q^6 - 16\,744q^7 + 84\,480q^8 - 113\,643q^9 + \ldots$

  $$= \sum_{n\geq 1}\tau(n)\,q^n$$

  Série génératrice
  (ou « développement en série de Fourier » !)

- Forme modulaire de poids 12

$$\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12}\,\Delta(z)$$

Trois observations de Ramanujan

- Si *n* et *m* sont premiers entre eux :

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$$

Ramanujan, 1916
Mordell, 1917

- $\tau(p) - 1 - p^{11}$ est divisible par 691 (*p* premier)

Ramanujan, 1916

- $\left|\tau(p)\right| \leq 2p^{\frac{11}{2}}$ pour tout nombre premier *p*

Ramanujan, 1916
Deligne, 1974

Trois conjectures historiques !

- Conduisent aux représentations galoisiennes modulaires (Jean-Pierre Serre, Pierre Deligne)
- Fondent en partie la théorie moderne
- Exploitées par Pierre Deligne (médaille Fields 1978) pour prouver la conjecture d'André Weil
- Andrew Wiles, programme de Langlands...
- Généralisation : si la forme modulaire $\sum_{n\geq 1} a_n q^n$ est de poids *k*, alors pour *p* premier

$$\left|a_p\right| \leq 2p^{\frac{k-1}{2}}$$

Des « accidents »...

Pour *p* un nombre premier :

- $\tau(p)-1-p^{11}$ est divisible par 2^5 (si $p \neq 2$)
- $\tau(p)-1-p$ est divisible par 3 (si $p \neq 3$)

- $\tau(p)-p^{30}-\left(p^{41}\right)^{-1}$ est divisible par 5^3 (si $p \neq 5$)
- $\tau(p)-p-p^{4}$ est divisible par 7 (si $p \neq 7$)
- $\tau(p)-1-p^{11}$ est divisible par 691

... qui n’en sont pas !

- Ce sont les seules congruences possibles (!)
- Lien profond avec la théorie de Galois
- Même phénomène (Sander Zwegers, 2002) pour les « fausses formes modulaires » de la dernière lettre de Ramanujan : symétrie cachée, liens avec l’arithmétique...
- Vers une « théorie des formes modulaires quantiques » ? (Don Zagier, années 2010)

Partages d’entiers et « fausses formes modulaires »

Partitions

$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$

On écrit : $p(4) = 5$

On calcule que $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$…

$p(7) = 15$, $p(100) = 190\,569\,292$

Question :

quelles sont les propriétés
de la fonction p ?

Un exemple

- 50,04 % des $p(n)$ inférieurs à 10^6 sont pairs, et 49,96 % sont impairs…

  La proportion des nombres pairs est-elle 1/2 ?
- De même, on observe que 33,1 % des $p(n)$ sont multiples de 3. La proportion est-elle 1/3 ?
- Par ailleurs, 34,6 % des $p(n)$ sont des multiples de 5…
- **Quelle est la distribution des valeurs $p(n)$?**
- Toujours pas le moindre angle d'attaque…

Premières réponses

- $p(5k+4)$ est un multiple de 5
  $p(7k+5)$ est un multiple de 7
  $p(11k+6)$ est un multiple de 11
- $$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$
- Vers une formule *exacte* (Rademacher, 1937)

La « fausse forme modulaire » χ_0

$$\chi_0(q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q^m}{\prod_{k=0}^{m-1}\left(1-q^{m+k+1}\right)}, \quad |q|<1$$

- Fonction génératrice des partages d'entiers possédant un unique plus petit terme et sans terme strictement supérieur à deux fois ce plus petit terme
- Pour n = 7 : 7 = 6+1 = 5+2 = 4+3 = 5+1+1 = 4+2+1 = 3+3+1 = 3+2+2 = 3+2+1+1 = 4+1+1+1 = 3+1+1+1+1 = 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1 = 2+1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1+1

$$\rho_0(7) = 3$$

Lien avec le rang

$$\chi_0(q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q^m}{\prod_{k=0}^{m-1}\left(1-q^{m+k+1}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_0(n) q^n$$

Le *rang* d'une écriture dans un partage d'entier est le plus grand terme moins le nombre de termes (le rang de « 5+1+1 » est 5 – 3, donc 2 ; le rang de « 2+2+1+1+1 » est 2 – 5, donc –3)

$\rho_0(n) =$ nombre de partages de 5*n* dont le rang est un de plus qu'un multiple de 5, moins le nombre de partages de 5*n* dont le rang est multiple de 5 (conjecture « fausse thêta »)

Les conjectures « fausses thêtas »

- Dix identités **arithmétiques** similaires recensées sans la moindre piste ou démonstration (Ramanujan en avait certainement une)
- Prouvées entre 1988 et 2010 par Sander Zwegers, Dean Robert Hickerson, Amanda Folsom, Dean Hickerson et Eric Mortenson
- Un début de théorie des « fausses formes modulaires » (parties holomorphes de formes de Maass spéciales harmoniques faibles) par Kathrin Bringmann, Ken Ono...

La dernière lettre

- Datée du 12 janvier 1920, incomplète
- L’une des lettres les plus importantes, les plus influentes et les plus énigmatiques de l’histoire des mathématiques
- « fausses formes modulaires »
- Quel est le but poursuivi par Ramanujan ?

Nouveau chantier : retrouver l’intuition
... et poursuivre la quête !

Un génie

« Son talent était exceptionnellement hors du commun, et il est l'un des rares mathématiciens contemporains que je qualifierais de génie au sens populaire du terme » (Terence Tao)

Mystères…

« Ses méthodes pour calculer les invariants de classe demeurent en grande partie dans une obscurité impénétrable ; c’est regrettable qu’il ne nous ait laissé aucun indice » (Berndt)

« Bien que des progrès considérables aient été réalisés, un rideau noir nous a empêchés de voir ce qui se passe sur la scène, à savoir quelles furent les idées de Ramanujan derrière ses découvertes » (Andrews et Berndt, 2018)

Références

The man who knew infinity – a life of the genius Ramanujan. Robert Kanigel, Washington Square Press, 1991

Le comptable indien. David Leavitt, Denoël, 2009

Les mystérieux carnets de Ramanujan enfin décryptés ! Édouard Thomas, *in Maths Société Express*, Comité international des jeux mathématiques, 2016

La Nuit des maths. DVD de trois conférences, ACL–Éditions du Kangourou, 2017

The Man Who Knew Infinity. Matthew Brown, 2016

Mathématiques et mathématiciens. Godfrey Harold Hardy, Nitens, 2018

Ramanujan. Letters And Commentary. Bruce Berndt et Robert Rankin, American Mathematical Society, 1995

Ramanujan's Notebooks – Part I.
Bruce Berndt, Springer, 1985

Ramanujan's Notebooks – Part II.
Bruce Berndt, Springer, 1989

Ramanujan's Notebooks – Part III.
Bruce Berndt, Springer, 1991

Ramanujan's Notebooks – Part IV.
Bruce Berndt, Springer, 1994

Ramanujan's Notebooks – Part V.
Bruce Berndt, Springer, 1998

Ramanujan's Lost Notebook – Part I.
George Andrews et Bruce Berndt, Springer, 2005

Ramanujan's Lost Notebook – Part II.
George Andrews et Bruce Berndt, Springer, 2009

Ramanujan's Lost Notebook – Part III.
George Andrews et Bruce Berndt, Springer, 2012

Ramanujan's Lost Notebook – Part IV.
George Andrews et Bruce Berndt, Springer, 2013

Ramanujan's Lost Notebook – Part V.
George Andrews et Bruce Berndt, Springer, 2018