

LOGIQUES & PARADOXES

Hervé Stève

herve.steve@hotmail.fr

Kafemath du 7/04/2022

À la Coulée Douce, Paris 12ème



Introduction

- Logiques classiques & logiques plurivalentes
- Paradoxes logiques, sémantiques & paradoxes pragmatiques
 - Quelques paradoxes :
 - ✓ l'œuf et la poule
 - ✓ Le tas
 - ✓ Achille et la tortue
 - ✓ Les anniversaires
 - ✓ Les jumeaux



Logique

Du grec *logos* : raison, langage et raisonnement

Distinguer le vrai du faux

- **Depuis l'antiquité :**

étude des règles formelles que doit respecter toute argumentation correcte

- **Disciplines :**

philosophie, éthique, physique

mathématique et informatique, ingénierie (récent)

- **Logique classique ou formelle**

- **Logiques plurivalentes**



Logique classique / formelle

Selon 3 principes :

- **Principe d'identité** : une chose est identique à elle-même

une proposition P est vraie V ou fausse F (bivalence)

- **Principe de non contradiction** : une chose n'est pas son contraire

Vérité première selon Aristote (axiome), ne peut être déduit

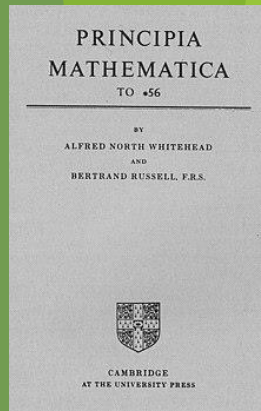
« non (P et non P) » (univoque) on ne pas dire une chose et son contraire

- **Principe du tiers exclus** : une chose ou bien son contraire

Introduit par Aristote : « Socrate est mort ou vivant », pas de troisième possibilité.

« P ou non P » (application univoque)

Sa négation nie le principe de non contradiction



Russel



Logiques plurivalentes

- **logiques intuitionnistes :**

notion de preuve constructive au lieu de vérité : vrai \neq ne pas être faux sans le principe du tiers exclus mais sa négation est impossible

Ex) Kurt Gödel (1929) : ce qui est démontrable, non démontrable et indécidable dans l'arithmétique de Peano

- **Logiques modales :**

Basées sur les qualités du vrai

Ex) obligatoire, interdit, permis, facultatif

- **Logiques floues :**

proposition P varie suivant des degrés numériques de vérité de 0 (faux) à 1 (vrai)

Attention : le flou c'est de l'imprécision et non pas de l'incertitude (probabilité)

Ex) eau potable avec un degré 0,9 \neq proba de 90% (soit 10% nocif)

- **Logique de la mécanique quantique :**

le chat de Schrödinger est **vivant**, **mort** et **mort-vivant**

En effet, le chat peut être dans un état de superposition

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\text{chat assis}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{chat couché}\rangle$$

Paradoxe

Du grec « paradoxos » : contre (para) et opinion (doxos).

- **paradoxe logique ou sémantique :**

repose sur la non acceptation des principes logiques (formels)

=> **contradiction, choix interdit et autoréférence**

- **paradoxe pragmatique (monde réel humain) :**

il n'y a pas de contradiction à l'intérieur de ce qui est exprimé, mais dans l'effet produit : « elle m'aime mais je n'en sais rien » les 2 parties peuvent être vraies, mais la seconde semble ignorer la première.



Penrose triangle
Paradox

Illegal or letal ?



Dessins de Besot

1: Contradiction

- Une proposition qui aboutit à une contradiction, à une **absurdité**

Bertrand Russel 1872-1970

Mathématicien gallois, philosophe,
Homme politique
fondateur de la logique moderne



« Le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes »

Ex logique) **paradoxe du barbier**

Ex sémantique) **paradoxe du menteur** (du Crétois ou Epiménide vers -556) : un homme déclare « je mens »



La version populaire de l'antinomie de Russell pose que le barbier du village rase les villageois qui ne se rasent pas eux-mêmes. Le barbier se rase-t-il lui-même ?

2 : Choix interdit

- Le **choix est interdit** contrairement au **dilemme** (choix difficile)

car les solutions se rejettent l'une de l'autre, ce qui conduit à un raisonnement circulaire sans fin

Ex) dans le **paradoxe du menteur** : il ment s'il dit la vérité, il dit la vérité s'il ment, ...

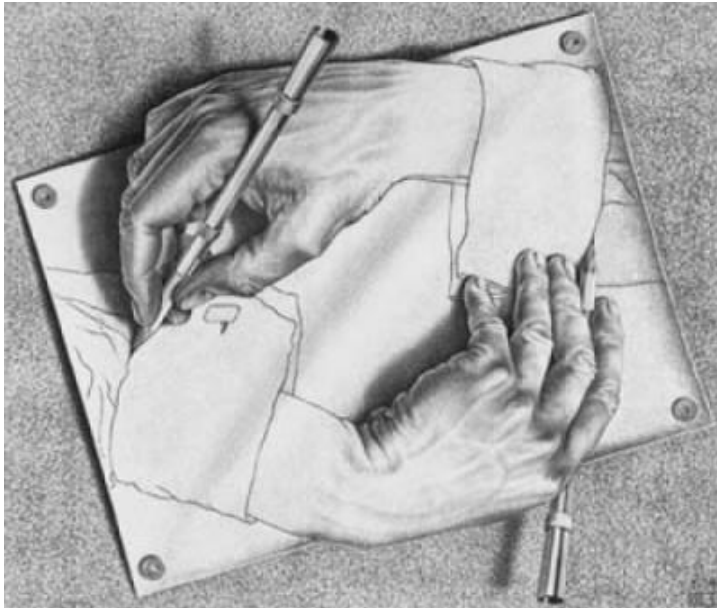
Le paradoxe formel rend possible que « quelque chose » soit à la fois acteur et terrain de son action



Jean Yann, RTL

3 : Autoréférence

- **Structure autoréférentielle** : le paradoxe a un référent qui parle de lui-même



Mains de M.C. Escher 1898-1972



La pendule auto référente
(tangente n° 192 page 41)

Paradoxe pragmatique

Ce n'est plus la logique formelle, **mais le réel** (monde humain)



« ce sont les acteurs, par la manière dont ils construisent leurs représentations d'une situation qui créent, ou non, **le paradoxe existentiel** » *La valeur heuristique du paradoxe pour les sciences de l'organisation* Véronique Perret, Emmanuel Josserand HAL 15/11/2010

- **Caractère relativiste** : subjectivité du paradoxe dans l'esprit, ce qui est paradoxal pour l'un ne l'est pas pour l'autre => **position neutre**
- **Dimension interactionnelle** : aspect social, logique d'actions paradoxales dans l'organisation. 2 solutions existent, mais leurs gestions restent paradoxales => **cercle vicieux, face sombre du paradoxe**
- **Principe dialectique** : opposition de 2 opinions nécessaire pour chercher une solution. Les contraires s'activent mutuellement => **face claire du paradoxe.**
- Science des systèmes *ago-antagonistes* (boucles positives/négatives systémiques)
- Double contrainte ou injonction paradoxale : *on doit désobéir pour obéir*

L'œuf et de la poule



Qui est apparu en premier : l'œuf ou la poule ?

- C'est l'œuf qui est en premier ... car la question !

Le paradoxe est d'abord **sémantique** : la poule pond un œuf, et de l'œuf naît la poule

Le paradoxe vient aussi des 2 sens du mot premier : **logique** ou **chronologique**

- **Pour Aristote**, c'est la poule car seul l'être adulte peut être procréateur
- **Pour les évolutionnistes**, c'est l'œuf car celui-ci existait avant les poules, l'être qui précède diffère de son descendant ... les oiseaux descendant des dinosaures pondaient aussi des œufs !

Mais comment distingue t-on la poule de la *proto-poule* ? paradoxe du barbu : Comment distingue t-on un barbu d'un non barbu ? longueur du poil, nombre de poils, ...

Y a t-il une limite à la chaîne des ancêtres ? Au-delà de l'être unicellulaire ? voir le paradoxe du tas



Paradoxe du tas (ou sorite)

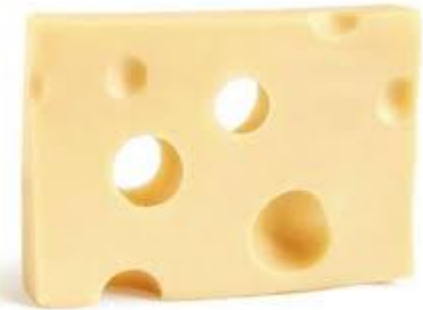


Comment de grains de sable pour former un tas ?

Paradoxe formulé 4^{ème} siècle A.J.C par Eubulide

- Si un grain de sable n'est pas un tas, disons que c'est un *non tas*. Si on ajoute un grain de sable à un *non tas*, cela ne fait pas un tas ... et donc par récurrence on en déduit que l'on ne peut pas constituer de tas par accumulation de grains !
- Mais si un tas reste un tas si on lui enlève un grain de sable, alors par récurrence, on peut déduire qu'un grain unique est un tas ... ainsi que l'absence de grain !

Problème entre le mélange du quantitatif (grains) et du qualitatif (tas). Bertrand Russel préconise alors d'utiliser la logique floue.



Paradoxe du fromage à trous : syllogisme AAA

- ✓ plus il y a de fromage, plus il y a de trous ;
- ✓ or plus il y a de trous, moins il y a de fromage ;
- ✓ donc plus il y a de fromage, moins il y a de fromage

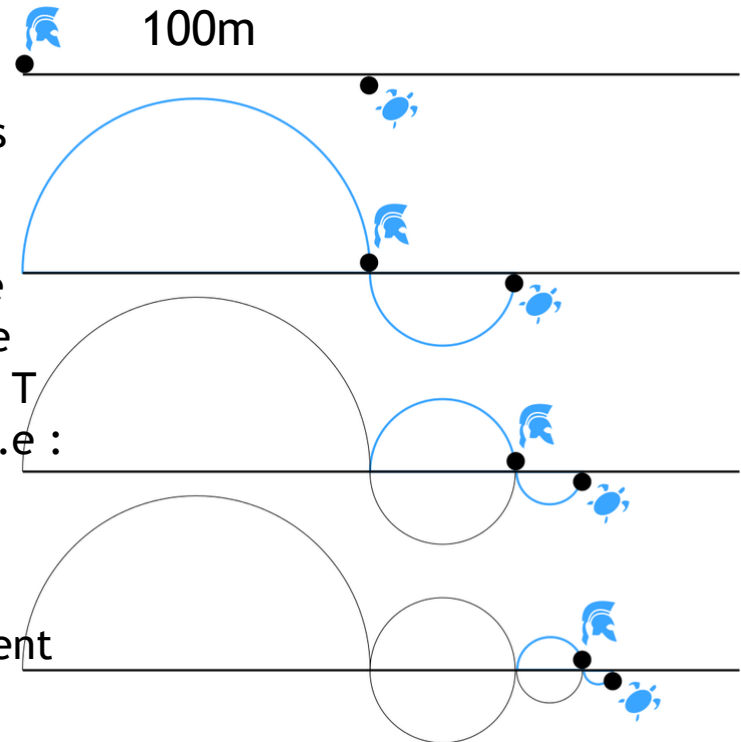
Achille et la tortue

Achille peut-il rattraper la tortue qui est plus lente mais a 100m d'avance ?

Paradoxe formulé au 5^{ème} siècle A.J.C par Zénon d'Elée (Livre 6 de *La Physique* d'Aristote)

- Si Achille avance jusqu'à la tortue, la tortue avance aussi mais ne peut être rattrapée d'où le paradoxe, cela montre aussi que l'infiniment petit n'existe pas physiquement.
- **Résolution du paradoxe** : si Achille a une vitesse de 10m/s et la tortue 5m/s alors la durée exacte est de $T=20s$ pour rattraper la tortue. En effet, on cherche T telle que Achille et la tortue soit au même endroit i.e :
 $10 \times T = 100 + 5 \times T$ d'où $5T=100$
et $T=100/5=20$

Remarque : cela ne réfute pas l'existence de l'infiniment petit car il y a indépendance du nombre d'étapes



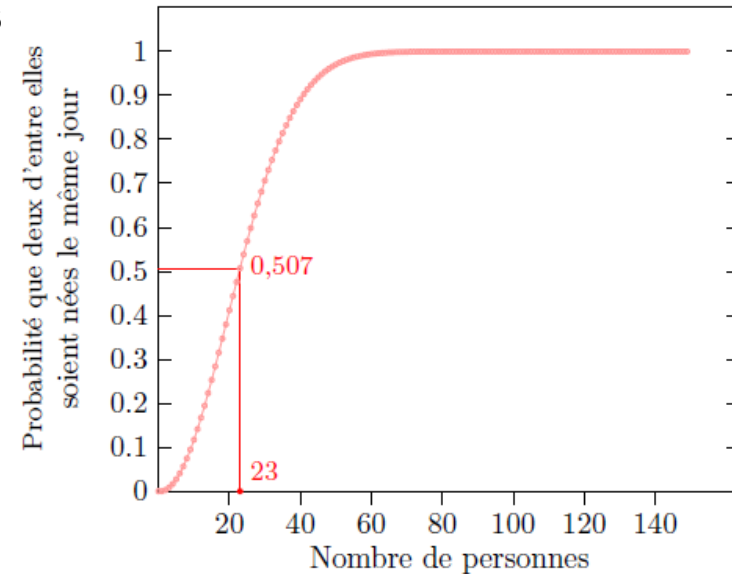
Les anniversaires

Quelle est le nombre de personnes suffisant pour avoir une chance sur deux l'anniversaire le même jour ?

- la réponse mathématique est 23 * !

Le paradoxe vient du fait que l'intuition est contredite par la vérité mathématique, on pouvait s'attendre à beaucoup plus : il n'y a pas de raison a priori que pour 2 personnes, les 2 dates d'anniversaires soient identiques ou différentes

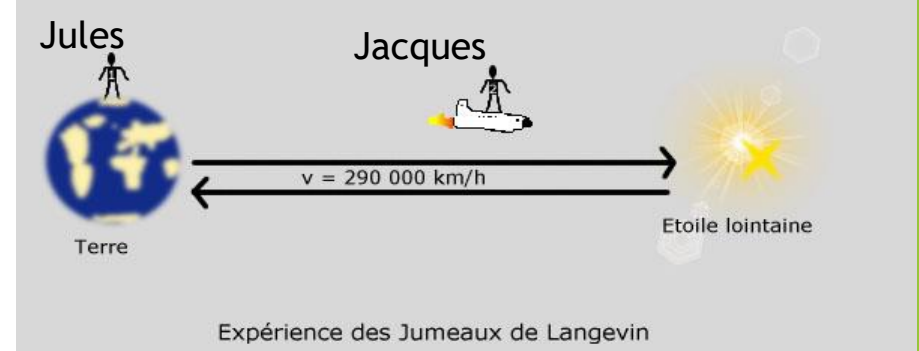
(*) Soient n ce nombre, p(n) la probabilité et N=365 le nombre de jours de l'année
Soit q(n)=1-p(n) probabilité que chaque personne ait un anniversaire différent des autres, alors comme les n événements ont indépendants :
 $q(n) = N/N \times (N-1)/N \times \dots \times (N-n+1)/N = N! / (N^n \times (N-n)!)$



Paradoxe des jumeaux

Un jumeau quitte la Terre à la vitesse proche de celle de la lumière, puis revient et retrouve sur Terre son frère jumeau resté sur place plus âgé que lui.

- **Paul Langevin** en 1911 au congrès de Bologne



En relativité restreinte (Einstein 1905) avec la dilatation des durées, pour Jules, sa durée est plus grande que celle de Jacques. Comme le temps s'écoule à sa propre horloge, aucun des jumeaux ne sait s'il est au repos ou en mouvement. Ainsi, Jacques a mesuré moins de secondes que son frère. Mais par changement de repère, celui qui voyage peut penser que c'est son frère qui s'est éloigné de lui puis revenu vers lui, alors il a mesuré plus de secondes.

D'où le paradoxe qui remet en cause la relativité restreinte.

En fait, le problème n'est pas symétrique entre le jumeau voyageur qui change de repère galiléen et le jumeau resté sur Terre qui n'en change pas.

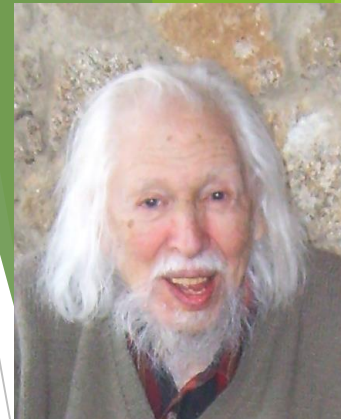
En relativité générale : expérience de Hafele-Keating en 1971 avec 2 avions voyageant en sens opposé (2 tours de rotation). Sur 632h de vols, décalages observés par des horloges atomiques de ~ 59 ns (vers l'Est) et ~ 273 ns vers l'Ouest (proches de la théorie)

Conclusion

Paradoxe ou théorème des buveurs :

« drinking principle » (1978) de Raymond Smullyan (1919-2017)

Dans un bar, comme la Coulée Douce, il y a une personne telle que si elle boit alors tout le monde boit



L'optimiste



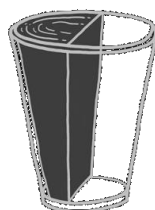
Le pessimiste



Le réaliste



Le chimiste



Le surréaliste



Le relativiste



L'utopiste



Le sceptique



Le nihiliste

@<https://clairerommeblog.wordpress.com/2018/01/16/le-verre-a-moitie-plein-il-est-plus-qua-moitie-vide/>