L'INTEGRALE

Hervé Stève, herve.steve@hotmail.fr

Kafemath du 17/02/ 2022

À la Coulée Douce, Paris 12ème

Introduction

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

- L'intégration est le calcul d'une intégrale
c'est-à-dire l'aire sous une courbe ou celui d'une primitive

- **Notation** : symbole mathématique représenté par un S allongé :
$\int$ ce qui signifie somme (*s*umma en latin), introduit par Leibniz

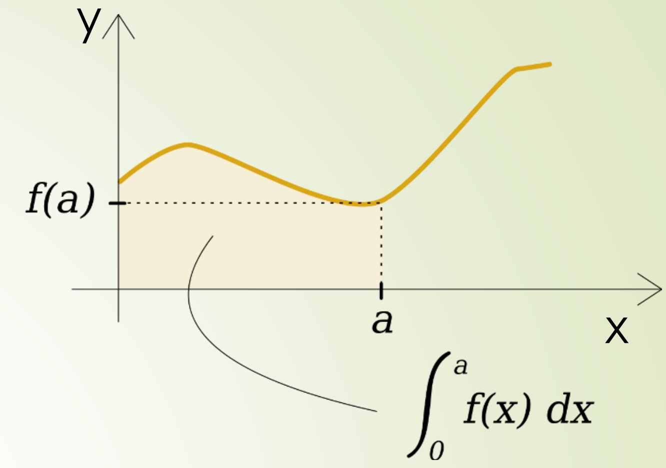
attention : à ne pas confondre avec le signe somme $\sum$ pour une somme discrète, alors que le signe intégral $\int$ s'emploie pour une somme continue c.a.d. d'une infinité de *quantités infinitésimale* selon Leibniz …

- **Justification** : l'intégrale de Riemann

- **Généralisation** : l'intégrale de Lebesgue

- **Applications** : intégrales curviligne, de surface, multiple

Calcul d'aire



- Dans le cas d'une fonction continue positive,

On note I=[0,a] le domaine d'intégration

- L'intégrale de f sur I est noté :

$$\boxed{\int_0^a f(x)\,dx}$$

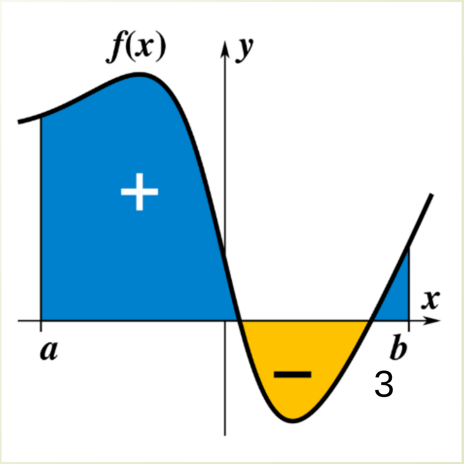
c'est l'aire d'une surface délimitée par la courbe graphique de **l'intégrande f** et les 3 droites d'équations x=0 , y=0 et x=a.

Cette aire a un signe positif lorsque la fonction est positive (au dessus de l'axe des abscisse), a un signe négatif lorsque la fonction est négative. Dans le cas plus général d'une fonction positive et négative, on fera la somme des aire en tenant compte des signes

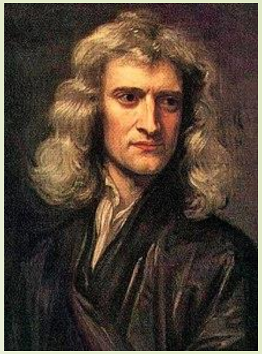
- **dx** ? indique que l'on intègre sur la variable x

  par *petites tranches*

  dx est une **forme différentielle**, il s'agit d'intégrer f(x) dx sur le chemin d'intégration [a,b]



Calcul de primitives


Isaac Newton
1642-1727

- Permet de calculer l'intégrale d'une fonction f(x)

- On introduit la fonction F(x) dérivable appelée **primitive** de f :

$$F'(x) = f(x)$$

- Calcul de l'intégrale sur [a,b] :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

- Ainsi F(x) peut être obtenues par ses **intégrales indéfinies** :

  $F(x) = \int_a^x f(t)dt + K$ avec K=F(a)

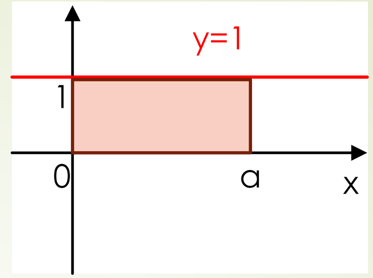
- Sous certaines conditions le calcul d'intégrale à l'aide de la primitive (opération de primitivation) est équivalente à celle de calcul d'aire sous une courbe

cf. **le théorème fondamental de l'analyse** (Newton) :

1: certaines fonctions sont « la dérivée de leur intégrale»

2: certaines fonctions sont « l'intégrale de leur dérivée»

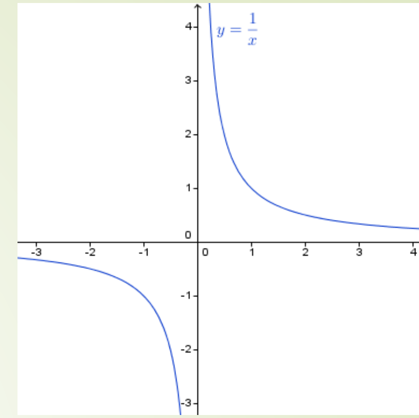
Calcul d'intégrales



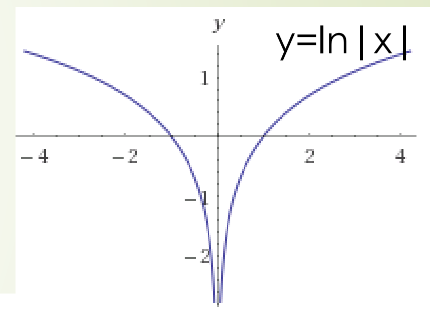
- f(x)=1 : fonction constante

calcul par les aires : $\int_0^a 1\,dx = 1 \times a = a$

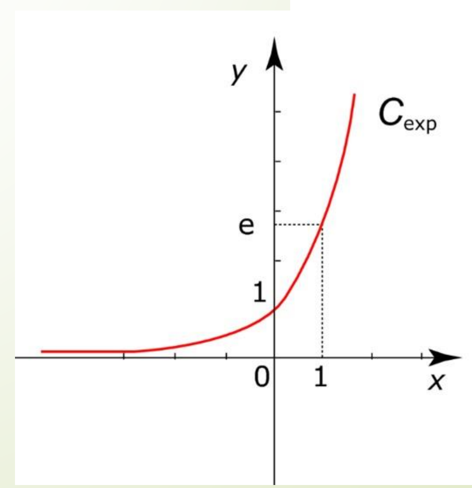
La primitive est F(x) = x : $\int_0^a 1\,dx = F(a) - F(0) = a - 0 = a$



- f(x) = x , primitive F(x) = x² / 2
- f(x) = x^k , primitive F(x) = x^{k+1} / k+1 pour k ≠ -1
- f(x) = 1/x , primitive F(x) = ln |x| (logarithme népérien)



- f(x) = F(x) = e^x (exponentielle)
- f(x)=cos(x) , primitive F(x) = sin(x)
  f(x)=sin(x) , primitive F(x) = -cos(x)
  f(x)=tan(x) , primitive F(x)= -ln |cos(x)|



Attention aux domaines de définition …

Propriétés

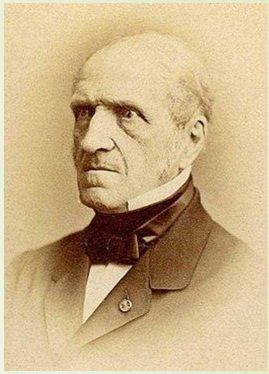
- Calcul de la **moyenne** d'une fonction f sur l'intervalle [a,b] :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

- **Relation de Chasles** :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

si a=c alors $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$



Michel Chasles
1793-1880

- **Linéarités** :

soit k réel alors $\int_a^b k\, f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f+g)(x)\,dx$$

(linéarité de la fonction intégrale)

Propriétés (suite)

- **Intégration par parties** :
  si f et g de classe C^1 (dérivables et dérivées continues)

$$\int_a^b f(x)\, g'(x) dx + \int_a^b f'(x)\, g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

  d'après la dérivée du produit : [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)

Exemple) f(x)=ln(x) et g'(x)=x

$$\int_1^2 x\, ln(x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\ \ln 2 - \frac{3}{4}$$

- **Changement de variables** :
  si f continue et g de classe C^1

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(g(t))\, g'(t) dt \qquad \textit{avec } x=g(t)$$

avec dx=d[g(t)]=g'(t)dt

Exemple) I=$\int_a^b 2t\, cos(t^2)\, dt$ *avec a*=-$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et b=2$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Soit g(t)=t² le changement de variable, g'(t)=2t d'où I=$\int_{\pi/2}^{2\pi} cos(x) dx = [sin\ (x)]_{\pi/2}^{2\pi}$ = *0 – 1 = -1*

Intégrer l'X

- « X » c'est Polytechnique,
  un polytechnicien Xannée de promo (pour les filles ont dit X7)
- Première année ou « sup » (classe préparatoire supérieure) :

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

- 2nde année ou « spé » (classe préparatoire spéciale) :

$$\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

- 3ème année toujours en « spé » (les redoublants) :

$$\int_2^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

- 7/2 n'existe quasiment plus aujourd'hui …

Aire du disque

- R rayon du disque, équation du cercle $x^2 + y^2 = R^2$

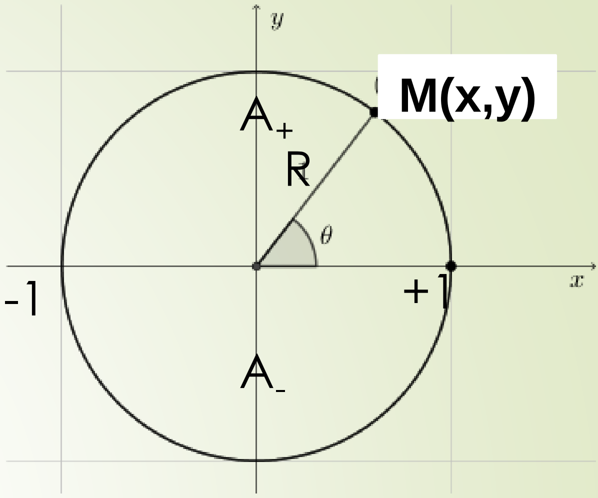
  $y = f(x) = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$

- Aire $A = A_+ - A_- = 2\int_{-1}^{+1} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$

- Changement de variable : *$x = R\cos\theta$ et $y = R\sin\theta$*

  d'où $dx = d(R\cos\theta) = -R\sin\theta\, d\theta$

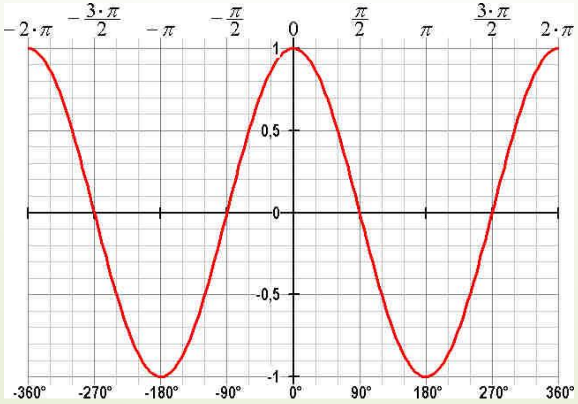
  et $\sqrt{R^2 - x^2} = R\sin\theta$



- Ainsi

$$A = -2R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2\theta\, d\theta = 2R^2 \int_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta = 2R^2 \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\, d\theta = 2R^2\, \pi/2 = \pi R^2$$

Fonction cosinus



Volume de la sphère

Bonaventura Francesco Cavalieri 1598-1647

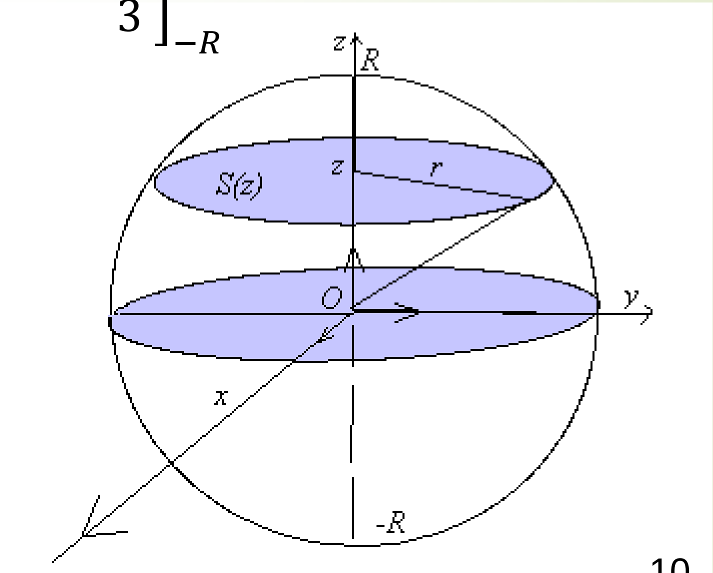
- R rayon de la sphère, équation de la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$

- **Méthode des indivisibles** (principe de Cavalieri) :
découpage en petits disques de rayon r(z) tq $r^2=R^2-z^2$

- Le volume V est l'intégrale pour z=-R à +R de
la surface des petits disques $S(z)=\pi r^2$

$$V = \int_{-R}^{R} \pi r^2 \, dz = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2) \, dz = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi \left[R^3 - R^3/3 + R^3 - R^3/3 \right] = 4/3 \, \pi R^3$$



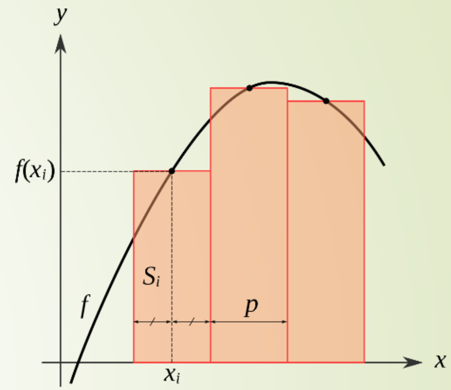
Intégrales numériques

- Les fonctions n'ont pas toujours de primitives explicites !

Exemple) f(x) = 1/ln(x)
Quand on est dans le cas de courbes expérimentales, quand n'a pas de formules

- **Méthode des rectangles/point milieu** :

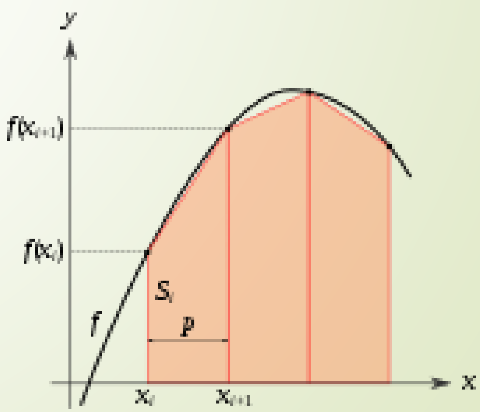
soit une suite de points équidistants x_i, $f(x_i)$
avec $p = x_{i+1} - x_i$ pour i=0 à n
soit S_i l'aire d'un rectangle de hauteur $f(x_i)$ et de largeur p,
alors $I_{rectangle} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, p$



Cette somme finie approche l'intégrale de f(x) de x_0 à x_n quand n tend vers l'infini
Elle est d'ordre 1 (exacte pour les polynômes d'ordre 1 : p(x)=ax+b)

- **Méthode des trapèzes** :

Si est l'aire du trapèze (voir figure)
Alors $I_{trapèze} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(f(x_i)+f(x_{i+1}))}{2}$ p
Elle est aussi d'ordre 1 mais moins performante



- **Ordres supérieurs** : Simpson, Newton-Cotes …

Intégrale de Riemann

Bernard Riemann
1826-1866

- Intégrale des fonctions sur un segment d'une fonction réelles bornée et presque partout continues* : fonctions continues, continues par morceaux et les fonctions réglées …

- **Fonctions réglées** : fonctions qui sont la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier

- **Fonctions en escalier** : fonctions constantes par morceaux

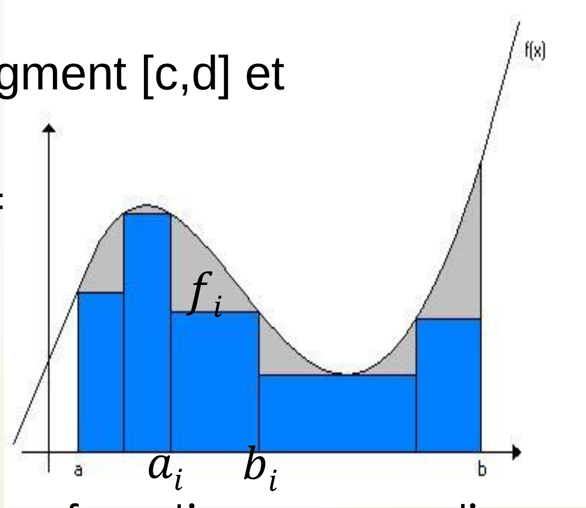
  sur un intervalle [c,d] : $\int_c^d \chi[c,d]\, dx = d - c$

avec $\chi[c,d]$ fonction caractéristique qui vaut 1 sur le segment [c,d] et 0 ailleurs

Ainsi sur [a,b] on aura : $\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} f(x)\ dx =$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \int_{a_i}^{b_i} \chi[a_i, b_i]\ dx = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{b_i} - \boldsymbol{ai})\boldsymbol{f_i}$$

avec f_i fonction indicatrice sur $[a_i, b_i]$



fonction en escalier

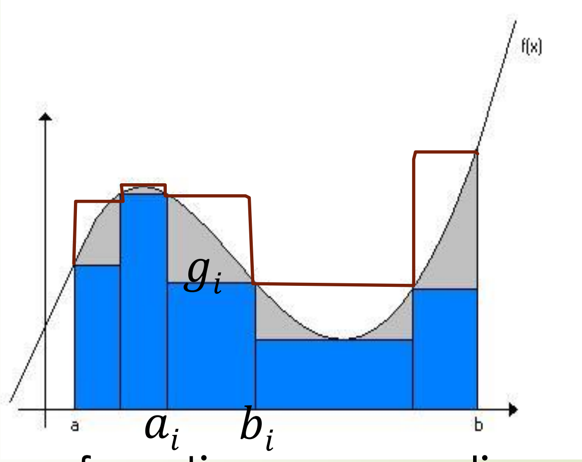
Donc l'intégrale d'une fonction en escalier est une combinaison d'indicatrices, et on obtient la même valeur pour toute décomposition

(*) fonctions continues sauf un ensemble de mesure nulle

Intégrale de Riemann bis

- Intégrales inférieures et supérieures puis passage à la limite pour Intégrer les fonctions réglées

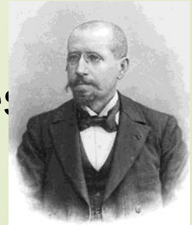
- **Soit l'intégrale inférieure** de f : $I_-(f)$
Cette intégrale doit être supérieure à toute fonction en escalier g inférieure à f et ainsi :
$g(x) \leq f(x) \Rightarrow \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx$
et $I_-(f) := \sup_{g \leq f} \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx$



fonction en escalier

- **De même avec l'intégrale supérieure** de f : $I_+(f)$,
Cette intégrale doit être inférieure à toute fonction en escalier g supérieure à f et ainsi
$g(x) \geq f(x) \Rightarrow \int_a^b g(x)\, dx \geq \int_a^b f(x)\, dx$ *et* $I_+(f) := \inf_{g \geq f} \int_a^b g(x)\, dx \geq \int_a^b f(x)\, dx$

- **Définition** : f(x) est intégrable au sens de Riemann si les deux intégrales inférieures et supérieures sont égales i.e. $I_-(f) = I_+(f) = I(f)$


Gaston Darboux 1842-1917

- Aujourd'hui on utilise plutôt **les sommes de Darboux** (avec un pas h)

Intégrale impropre

- Ou **intégrale généralisée.**

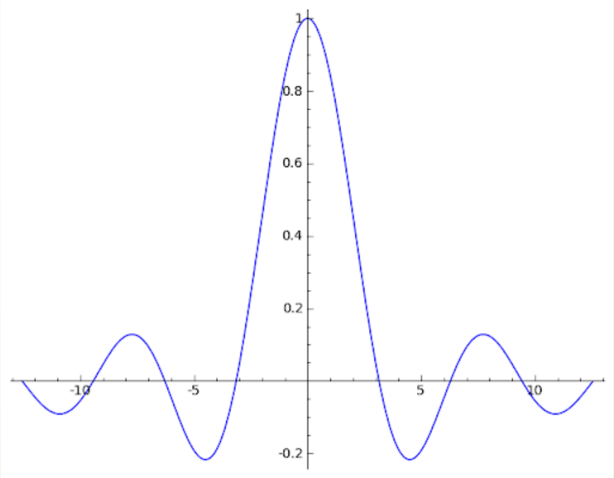
- **Convergence d'une intégrale impropre** :
  - Lorsqu'on intègre jusqu'à une borne infinie
  - Lorsque qu'on intègre jusqu'à une borne en laquelle la fonction n'a pas de limite finie
  - Lorsqu'on englobe un point hors du domaine de définition dans l'intervalle d'intégration

- Exemple) l'intégrale de Dirichlet :

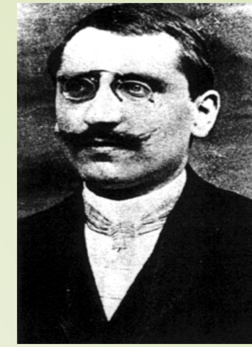
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

est semi-convergente et vaut π/2 mais :

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$ diverge !



Intégrale de Lebesgue



Henri Lebesgue
1875-1941

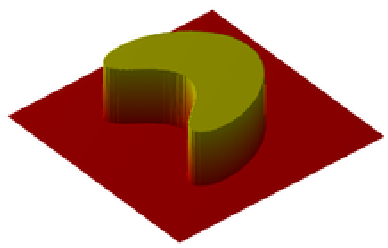
- **Généralise l'intégrale de Riemann** : limitation aux fonctions bornées (pbm des intégrales impropres), limitation aux fonctions réglées => extension aux *fonctions étagées i.e. fonctions mesurables*

- **Utilise la mesure de Lebesgue** pour intégrer les fonctions mesurables.

On introduit un *espace mesurable* (X,A,μ) avec *X espace euclidien* R^n ou C^n, *A* la *tribu des boréliens* de X (intervalles ouverts, pavés, boules,…), μ est la *mesure de Lebesgue* (aussi une probabilité sur l'espace de probabilité (X,A)) :

soit A un élément de *A*, 1_A la fonction indicatrice de A : =1 sur A et 0 ailleurs. Alors on obtient $\int 1_A \, d\mu = \mu(A)$, et par combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices i.e. fonctions étagées :

$$\int \sum_i a_i 1_{A_i} \, d\mu = \sum_i a_i \, \mu(A_i) \quad \text{pour tout } a_i \text{ réels}$$



fonction étagée

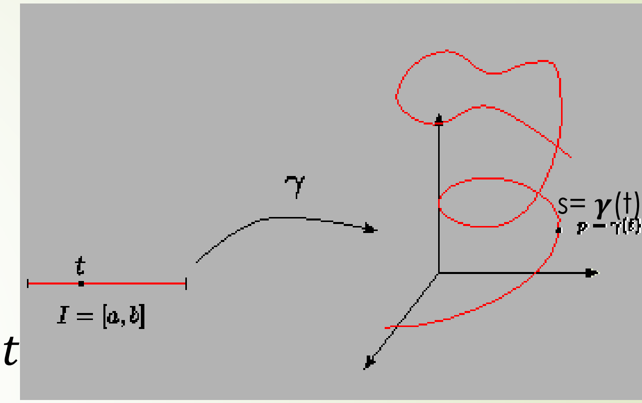
- **L'intégrale de Lebesgue** d'une fonction f est construite par la borne supérieure des fonctions étagées g : $\int_A f \, d\mu = \sup_{g \leq f} \int_A g \, d\mu$

si $\int_A |f| \, d\mu < +\infty$ alors f est intégrable au sens de Lebesgue

Intégrale curviligne

- La fonction à intégrer est à évaluer sur une courbe Γ pour un champ scalaire f de Γ vers R : soit s_γ(t) l'abscisse curviligne paramétrée par la variable t le long de l'arc (a,b) :

$$\int_\Gamma f\ ds = \int_a^b (f \circ \gamma) ds_\gamma$$



- Si f est de classe C[1], alors :

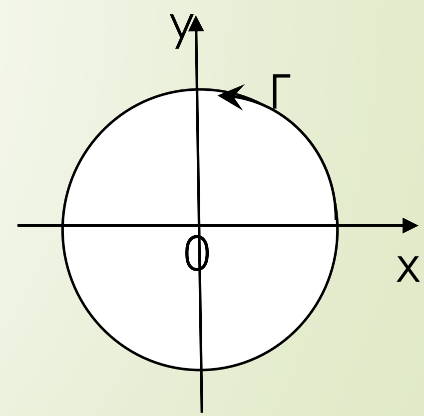
$$\int_\Gamma f\ ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

- Cas complexe (C=R²) : z=x+iy avec i²=-1

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Si Γest une courbe fermée on note :

$$\oint_\Gamma f(z)dz$$

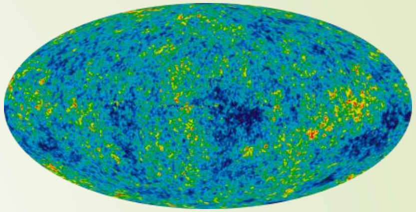


Ainsi pour f(z)=1/z et Γ=cercle unité, $\gamma(t)$=$z = e^{it}$ alors

$\oint_\Gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}$ dt = 2iπ (cf. **théorème des résidus**)

Intégrale de surface

- La fonction à intégrer est à évaluer sur une surface S de R^3 pour un champ f scalaire ou v vectoriel.



rayonnement diffus de l'univers

- **Champ scalaire** :

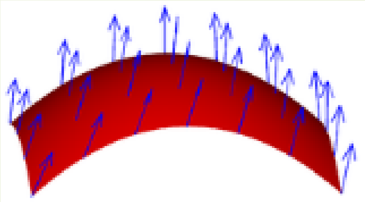
soit x(s,t) le paramétrage de la surface S

$$\int_S f\,dS = \iint_T f(x(s,t)) \left\| \frac{\partial x}{\partial s} \times \frac{\partial x}{\partial t} \right\| \mathrm{dsdt}$$

avec x le produit vectoriel
On calcule l'aire de S en prenant f=1
exercice) S=sphère de rayon R , aire(S)=$4\pi R^2$ (idée : coordonnées polaires)

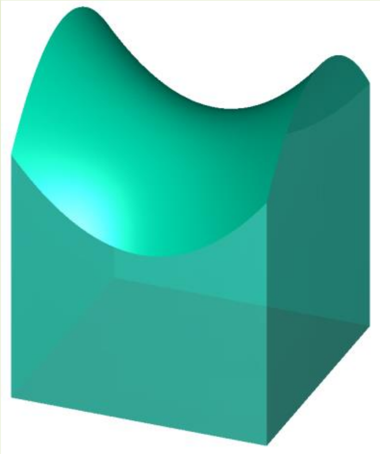
- **Champ vectoriel** :

soit x(s,t) le paramétrage de la surface S , n normale unitaire de S



$$\int_S (v\,.n)\,dS = \iint_T v\big(x(s,t)\big).\left(\frac{\partial x}{\partial s} \times \frac{\partial x}{\partial t}\right) \mathrm{dsdt}$$

Intégrale multiple



- **Intégrale d'une fonction de plusieurs variables réelles** :
sur un domaine D de R^n, on évalue :

$$\int \dots \int_D f(x_1, \dots, xn)\, dx_1 \dots dxn$$

- **Théorème de Fubini** :
  application 2D sur des pavés

$$\iint_{[a,b]\text{x}[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

- **Changement de variables** :
U,V 2 ouverts, Φ transformation de U vers V (C^1-difféomorphisme), det J_Φ le déterminant du jacobien de Φ :

$$\int_V f = \int_U (f \text{ o } \Phi)\, |\text{det} J_\Phi|$$

Application : volume de la sphère de rayon R, V = $\int_S 1\, dxdydz$
Φ : (x,y,z) → (rcosθsinφ,rsinθsinφ,rcosφ) d'où $\det J_\Phi = -r^2 \sin\varphi$

ainsi V = $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^R r^2 dr$ = 2π $[-cos\varphi]_0^\pi\, R^3/3$ = 4/3 πR^3

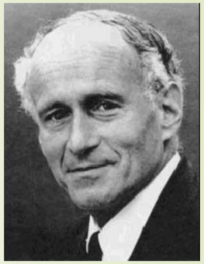
Conclusion

- Les intégrales sont incontournables en mathématiques :
  - Probabilité
  - Géométrie
  - Géométrie différentielle :

théorème de Stokes : $\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega$

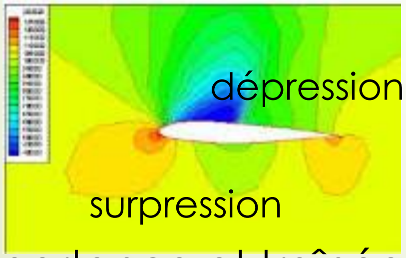
George G. Stokes
1819-1903

  - Analyse fonctionnelle, intégration
  - Théorie de la mesure
  - **Distribution** (fonction généralisée, ex le dirac)
  - Mathématiques appliquées : **transformées de Fourier, formulations variationnelles, méthodes des éléments finis**

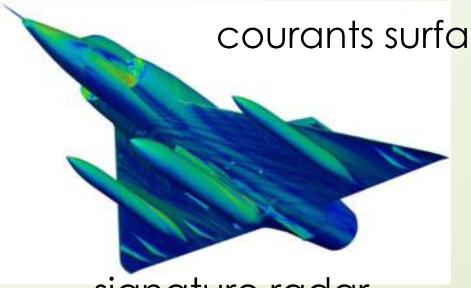


Laurent Schwartz
1915-2002

- De nombreuses applications en physique : élasticité, mécanique des fluides, mécanique quantique, électromagnétisme, acoustique …



portance et traînée
profil d'aile



signature radar
Mirage III