Nouvelles Miscellanées Mathématiques

Roger Mansuy

Kafemath

27 janvier 2022

> *Les miscellanées sont un genre littéraire composé de textes divers, « mélangés » avec une unité plus ou moins manifeste. C'est une technique de fragments, une sorte de mosaïque littéraire.*
>
> Wikipedia

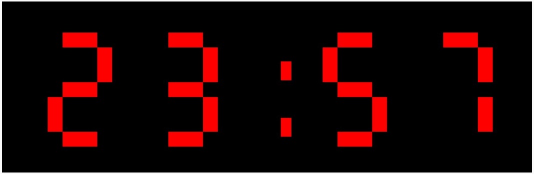
Lors du premier confinement de 2020, une émission en direct sur la chaîne Myriogon a proposé 25 sujets mathématiques pour attiser la curiosité ou frapper l'imagination.
Le début de ce support provient de cette tentative d'interactions *confinées*.

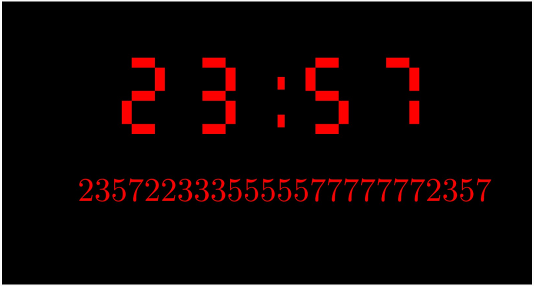
Numéro 1 : 2357

- Décomposez l'heure sur votre réveil en facteurs premiers jusqu'à vous endormir

Numéro 1 : 2357

- Décomposez l'heure sur votre réveil en facteurs premiers jusqu'à vous endormir



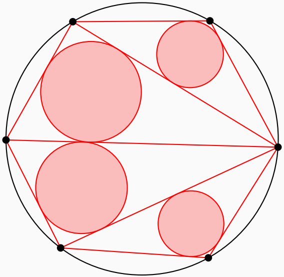

23:57
2357223335555577777772357

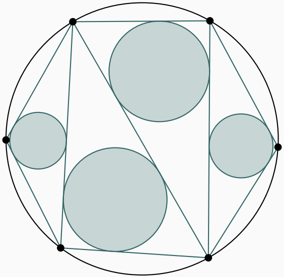
Numéro 14 : Théorème japonais

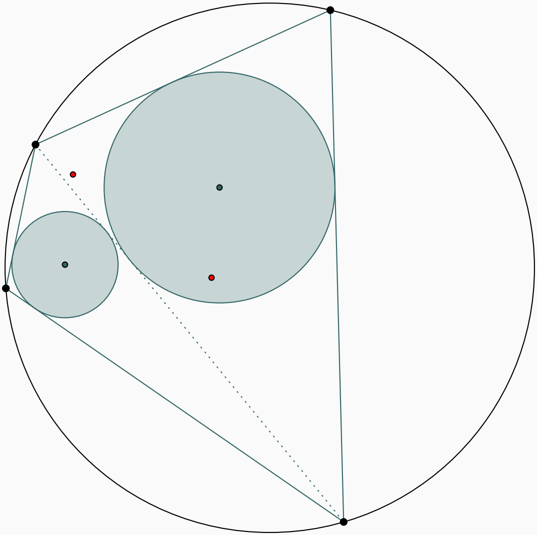
- Considérez un polygone inscrit dans un cercle
- Triangulez ce polygone
- Calculez la somme des rayons des cercles inscrits dans les triangles

Numéro 14 : Théorème japonais

- Considérez un polygone inscrit dans un cercle
- Triangulez ce polygone
- Calculez la somme des rayons des cercles inscrits dans les triangles



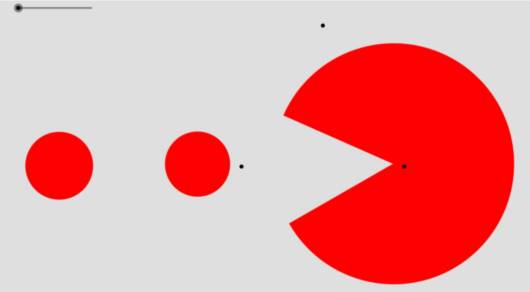


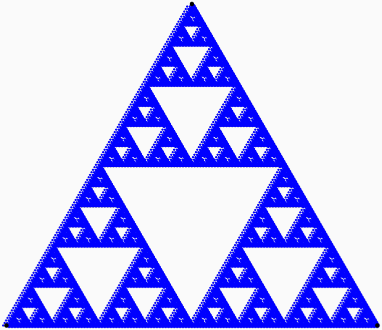


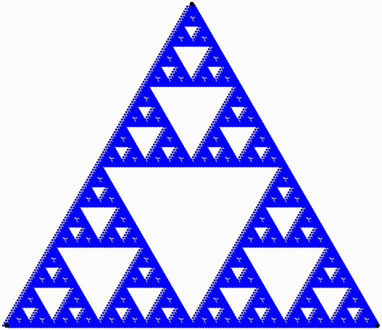
Ryokan Maruyama (1800)

Numéro 25 : Théorème de Hutchinson

- Considérez un triangle équilatéral ABC
- Dessinez une figure
- Transformez la figure par les homothéties de centres A, B, C et de rapport $\frac{1}{3}$
- Itérez







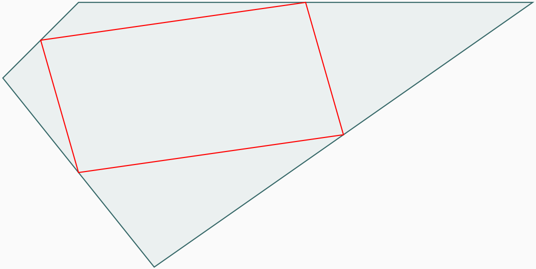
en gif

Numéro 26

- Considérez un quadrilatère
- Construisez le quadrilatère joignant les milieux des côtés

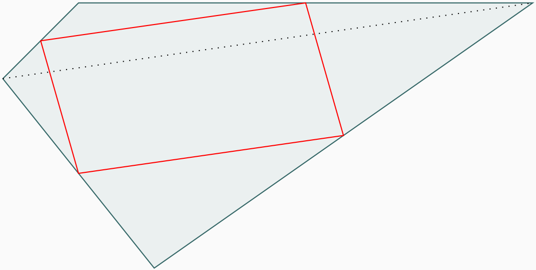
Numéro 26

- Considérez un quadrilatère
- Construisez le quadrilatère joignant les milieux des côtés



Numéro 26 : Théorème de Thalès

- Considérez un quadrilatère
- Construisez le quadrilatère joignant les milieux des côtés



Numéro 27

- Considérez un nombre
- Permutez les chiffres de ce nombre à votre guise
- Calculez la différence avec le nombre initial

Numéro 27

- Considérez un nombre
- Permutez les chiffres de ce nombre à votre guise
- Calculez la différence avec le nombre initial

$$23571246 - 12237654 = 9 \times 1259288$$
$$23571246 - 12234567 = 9 \times 1259631$$

Numéro 27

- Considérez un nombre
- Permutez les chiffres de ce nombre à votre guise
- Calculez la différence avec le nombre initial

$$23571246 - 12237654 = 9 \times 1259288$$
$$23571246 - 12234567 = 9 \times 1259631$$

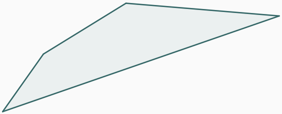
Numéro 27 : Preuve par 9

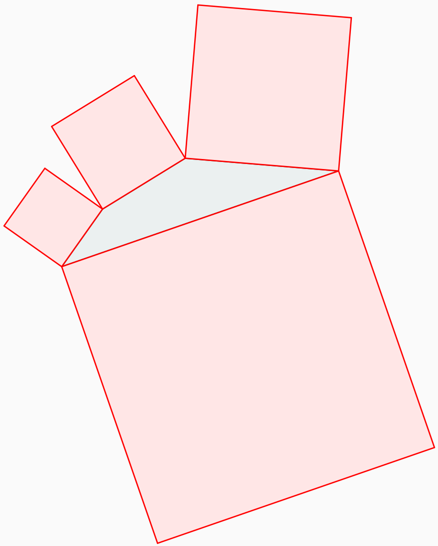
- Considérez un nombre
- Permutez les chiffres de ce nombre à votre guise
- Calculez la différence avec le nombre initial

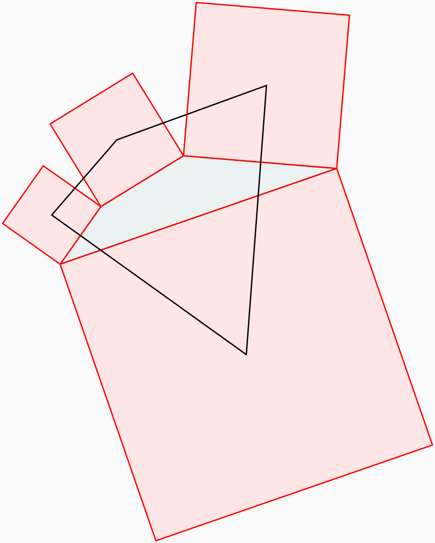
$$23571246 - 12237654 = 9 \times 1259288$$
$$23571246 - 12234567 = 9 \times 1259631$$

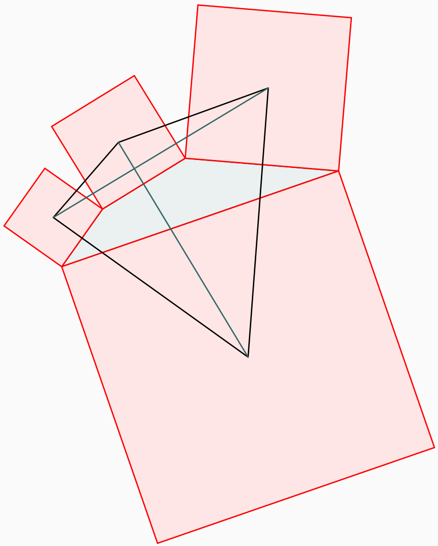
Numéro 28 : Napoléonerie

- Considérez un quadrilatère
- Construisez (extérieurement) des carrés sur les côtés du quadrilatère
- Construisez le quadrilatère dont les sommets sont les centres de ces carrés



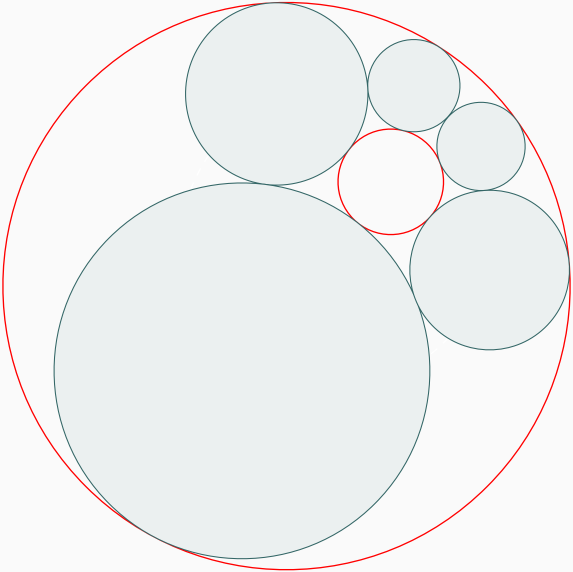






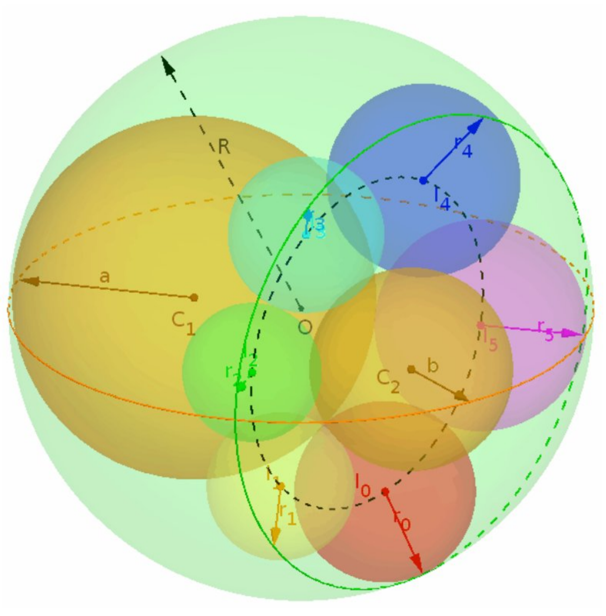
Numéro 29 : Porisme de Steiner

- Considérez deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$
- Choisissez un cercle $\mathcal{C}_1$ tangent à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$
- Pour tout $k \geq 2$, choisissez un (nouveau) cercle $\mathcal{C}_k$ tangent à $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_{k-1}$



Numéro 29 : Hexlet de Soddy (1937)

- Considérez trois sphères $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ deux à deux tangentes
- Alors, il existe six sphères $\mathcal{S}_1$, ..., $\mathcal{S}_6$ à la fois tangentes à
  - $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$
  - la suivante $\mathcal{S}_{k+1}$ et la précédente $\mathcal{S}_{k-1}$ dans la liste (avec les conventions $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_6$ et $\mathcal{S}_7 = \mathcal{S}_1$)


R
a
C_1
O
r_4
I_4
I_3
r_3
r_2
I_2
r_5
I_5
b
C_2
I_1
r_1
I_0
r_0

Numéro 30 : Problème de Leo Moser (1957)

- Choisissez secrètement 5 nombres
- Calculez puis communiquez les 10 sommes obtenues en additionnant les nombres deux à deux

Numéro 30 : Problème de Leo Moser (1957)

- Choisissez secrètement 5 nombres
- Calculez puis communiquez les 10 sommes obtenues en additionnant les nombres deux à deux

$$(1, 3, 7, 17, 37) \leftrightsquigarrow (4, 8, 10, 18, 20, 24, 38, 40, 44, 54)$$

Attention, cela ne marche plus si l'on communique des 6 sommes obtenues avec 4 nombres inconnus.

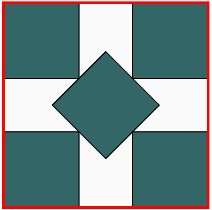
$$(1, 2, 3, 6) \text{ ou } (0, 3, 4, 5) \rightsquigarrow (3, 4, 5, 7, 8, 9)$$

Numéro 31 : Problème des 5 carrés (Frits Göbel, 1979)

- Placez cinq carrés de côté 1 dans un carré de côté a sans qu'ils se superposent
- Vérifiez $a \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Numéro 31 : Problème des 5 carrés (Frits Göbel, 1979)

- Placez cinq carrés de côté 1 dans un carré de côté a sans qu'ils se superposent
- Vérifiez $a \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

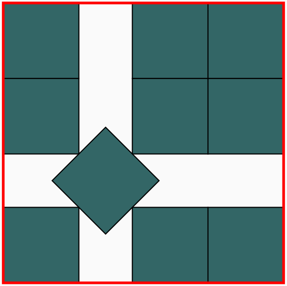


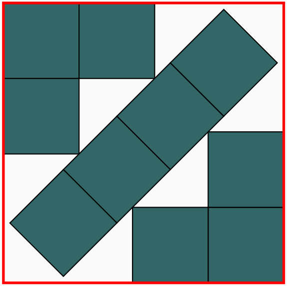
Numéro 31bis : Problème des 10 carrés (Walter Stromquist, 2003)

- Placez dix carrés de côté 1 dans un carré de côté a sans qu'ils se superposent
- Vérifiez $a \geq 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Numéro 31bis : Problème des 10 carrés (Walter Stromquist, 2003)

- Placez dix carrés de côté 1 dans un carré de côté a sans qu'ils se superposent
- Vérifiez $a \geq 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$





Numéro 32 : Nombre premier fragile

- Vérifiez que le nombre 294001 est premier
- Changez l'un de ses chiffres

Numéro 32 : Nombre premier fragile

- Vérifiez que le nombre 294001 est premier
- Changez l'un de ses chiffres

$$294007 = 7 \times 97 \times 433$$
$$294011 = 41 \times 71 \times 101$$
$$294701 = 11 \times 73 \times 367$$

Numéro 33 : Un exercice de Pólya–Szegő

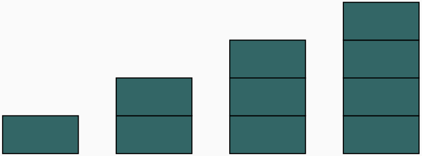
- Partitionnez $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ en deux parties C et D
- Prenez une suite complexe $(u_n)_n$ et étudiez la convergence de la série de terme général u_n^k selon que $k \in C$ ou $k \in D$

Numéro 34 : Solitaire hongrois

- Répartissez 10 jetons en une suite de tas
- Prenez un jeton dans chaque tas et empilez les jetons retirés en un nouveau tas à droite de la suite précédente
- Recommencez

Numéro 34 : Solitaire hongrois

- Répartissez 10 jetons en une suite de tas
- Prenez un jeton dans chaque tas et empilez les jetons retirés en un nouveau tas à droite de la suite précédente
- Recommencez



Ceci se généralise à tout nombre de jetons de la forme $\binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ avec n entier naturel non nul, dont les premiers sont

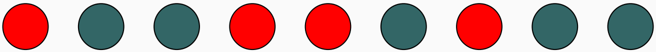
$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, \ldots$$

Numéro 35 : Théorème de van der Waerden

- Considérez 9 points régulièrement espacés
- Coloriez chaque point soit en rouge, soit en bleu

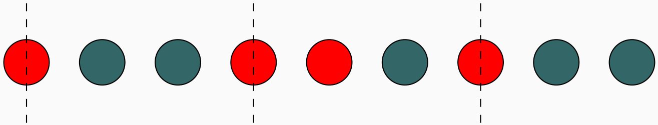
Numéro 35 : Théorème de van der Waerden

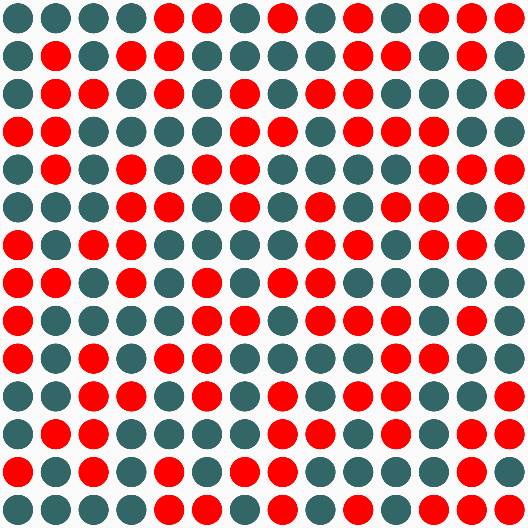
- Considérez 9 points régulièrement espacés
- Coloriez chaque point soit en rouge, soit en bleu



Numéro 35 : Théorème de van der Waerden

- Considérez 9 points régulièrement espacés
- Coloriez chaque point soit en rouge, soit en bleu





Happy Ending

Dans tout ensemble de 9 points tel que 3 points ne sont jamais alignés, il y en a 5 qui forment un pentagone convexe.