Planches glissantes

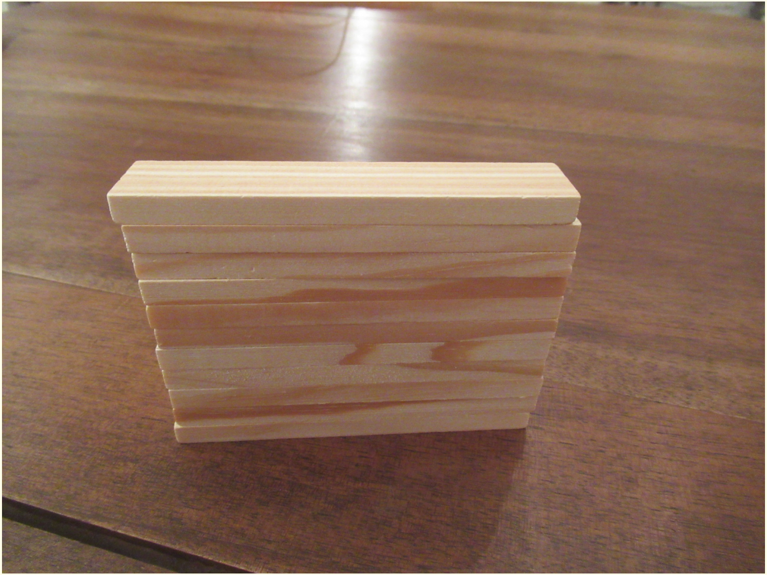
François Dubois*

d'après Samuel Tapie et Joe Viola, *Images des Mathématiques* (2016)

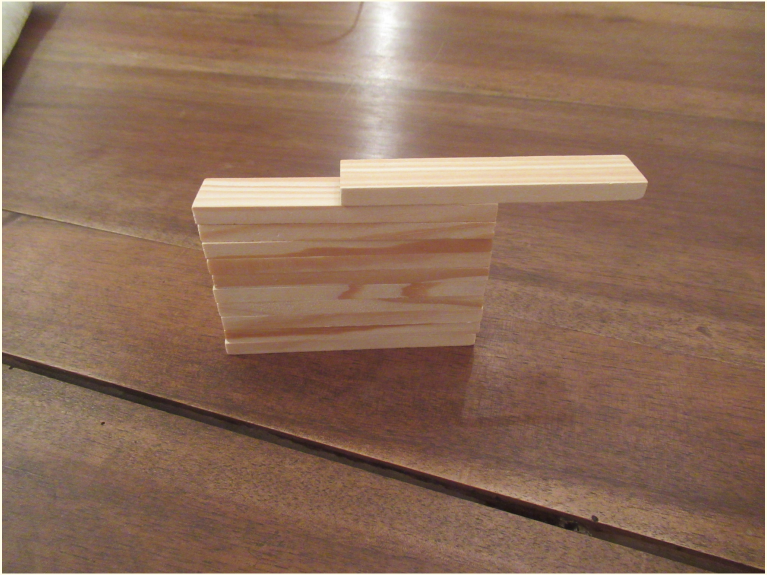
Gathering 4 Gardner
La Coulée Douce, Paris 12e
jeudi 21 octobre 2021

* co-animateur du Kafemath.

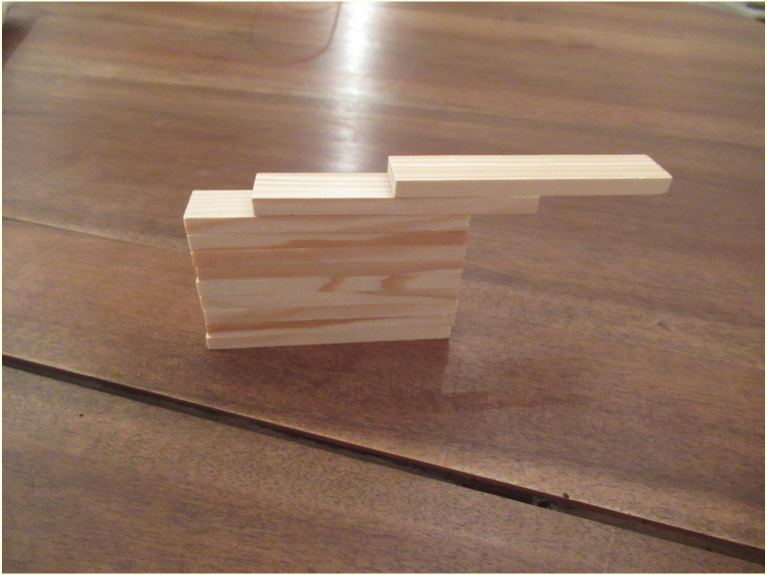
Kapla, un jeu de construction pour petits et grands



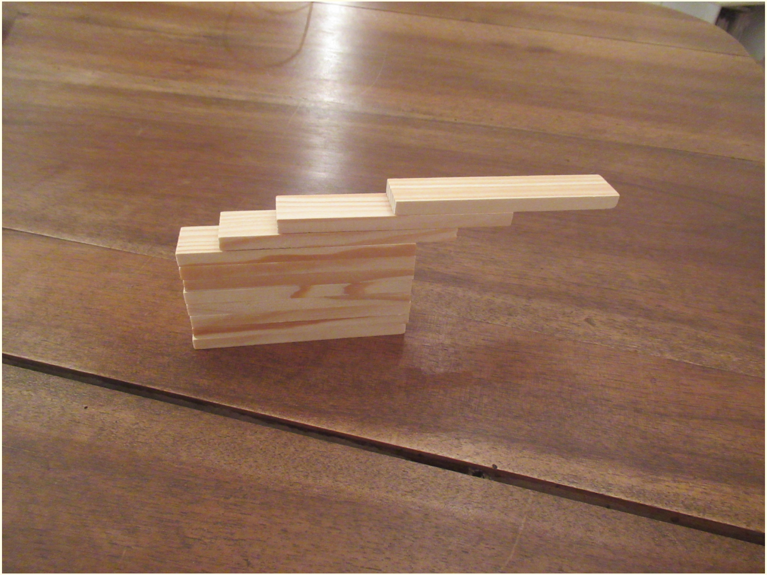
une première planchette



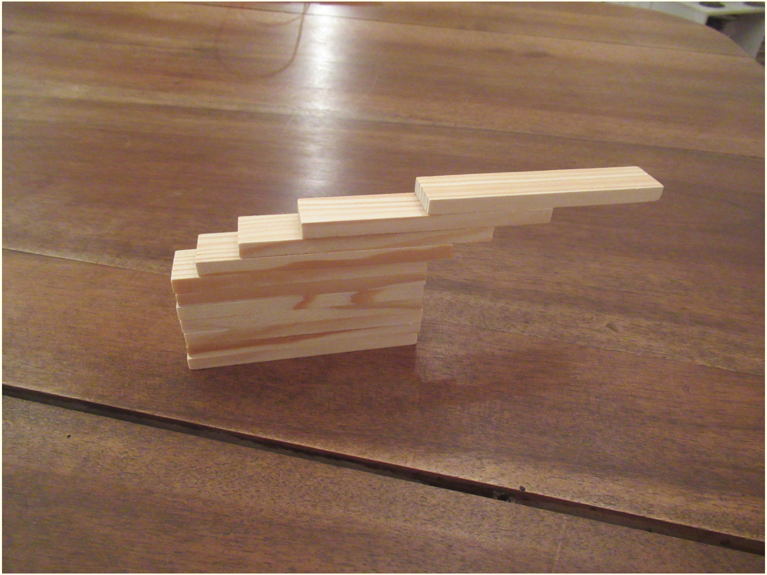
une seconde...



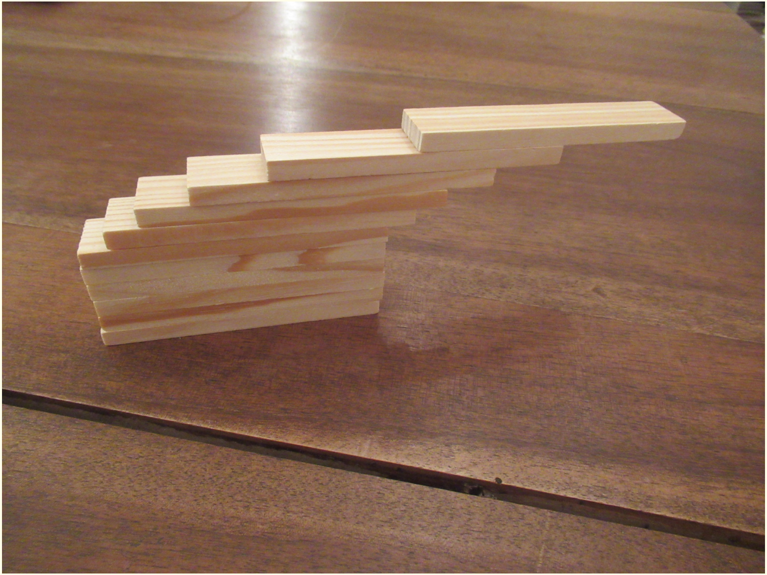
une troisième...



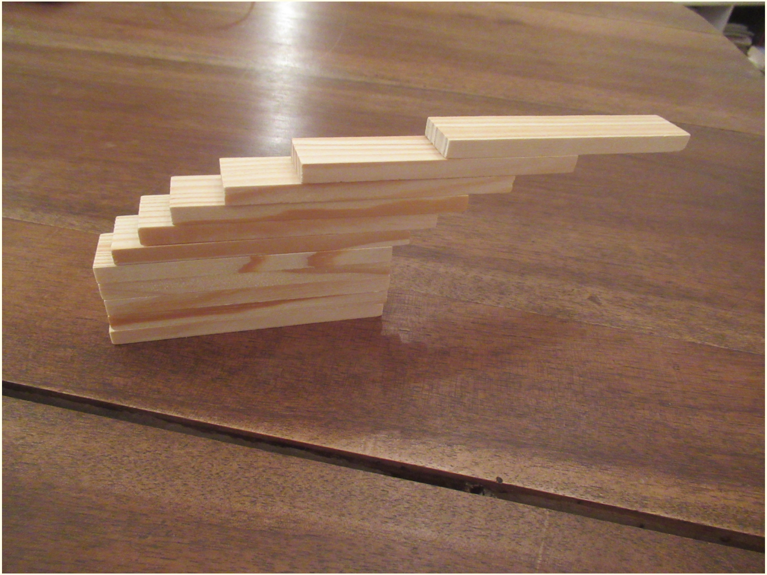
une quatrième...



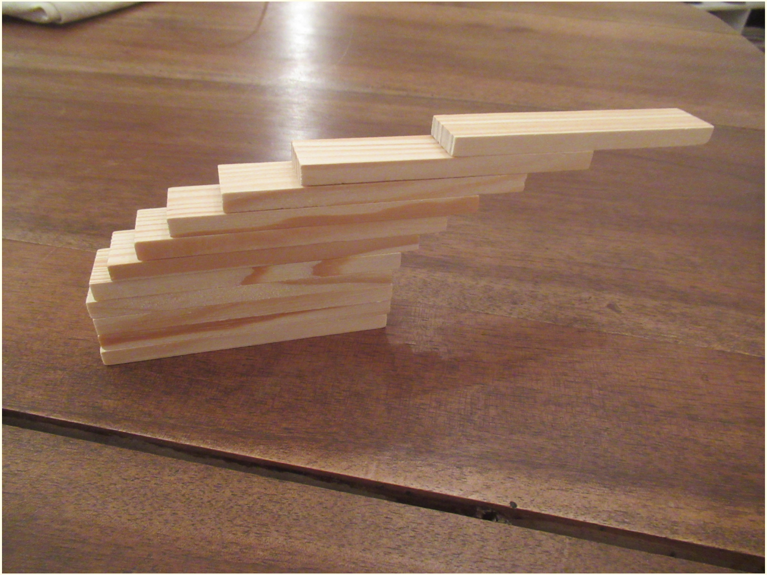
une cinquième...



une sixième...



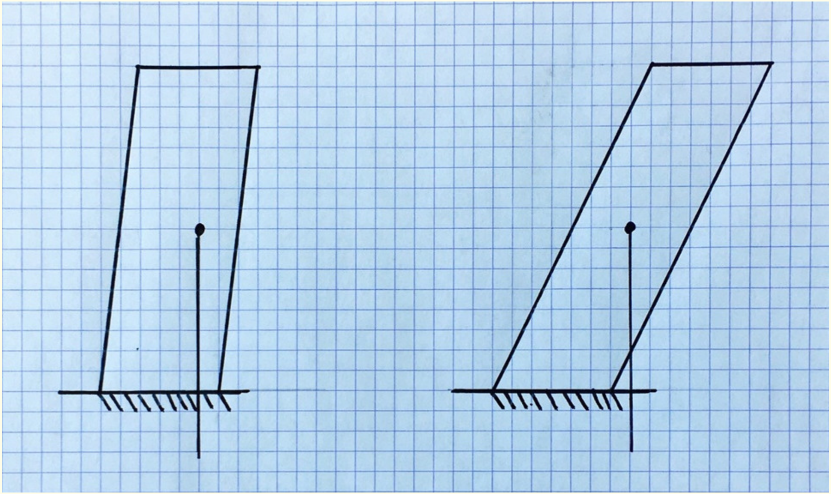
une septième...



équilibre statique

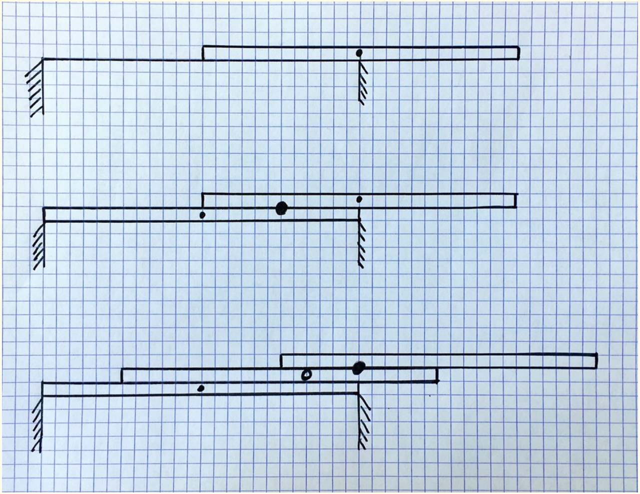
wikipedia

stabilité d'un équilibre statique



la verticale passant par le centre de gravité
doit se projeter à l'intérieur du polygone de sustentation

déplacement des trois premières plaques



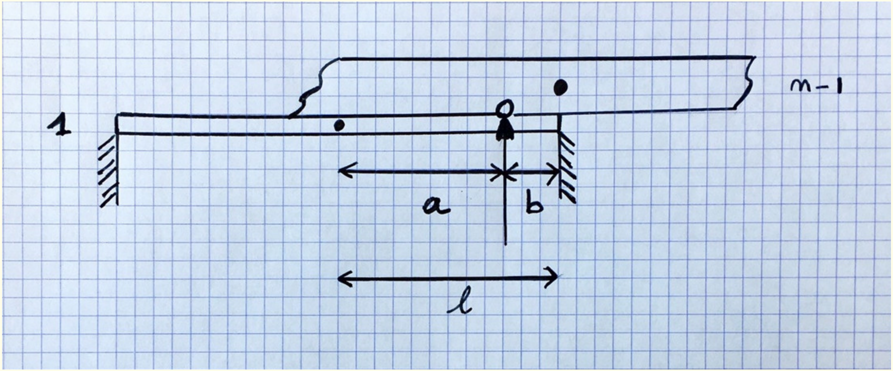
ℓ

$\ell + \frac{\ell}{2}$

$\ell + \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{3}$

$$d_1 = \ell,\ \ d_2 = \ell + \frac{\ell}{2},\ \ d_3 = \ell + \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{3}$$

analyse de l'ajout de la $n^{\rm o}$ plaque



$d_n = d_{n-1} + b$

la position du centre de gravité permet d'équilibrer

une masse unité à gauche

une masse $(n-1)$ à droite. Donc $1 \times a = (n-1) \times b$

comme $a + b = \ell$, $(n-1)\, b + b = \ell$, $b = \frac{\ell}{n}$ et $d_n = d_{n-1} + \frac{\ell}{n}$

série de la somme des inverses, ou série harmonique

relation de récurrence : $d_1 = \ell$ et si $n \geq 2$, $d_n = d_{n-1} + \frac{\ell}{n}$

donc $\frac{1}{\ell}\, d_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$ *série harmonique*

(à ne pas confondre avec la suite des harmoniques en musique !)

on ajoute de plus en plus de termes de plus en plus petit...

d_n tend vers une limite finie ? d_n tend vers l'infini ?

expérimentation numérique

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 \\ d_{10} &\approx 2,92896825 \\ d_{100} &\approx 5,18737751 \\ d_{1000} &\approx 7,48547086 \\ d_{10000} &\approx 9,78760603 \end{aligned}$$

jusqu'où peut on aller en avançant si lentement ?

la série harmonique selon Nicolas Oresme (1320-1382)

mathématicien français
évêque de Lisieux et conseiller du roi Charles V le Sage
philosophe, astronome, mathématicien, économiste, musicologue, ...

merci à Nicolas Oresme !

$d_1 = 1$ [on présente le calcul avec $\ell = 1$]

$d_2 = d_1 + \frac{1}{2}$

$d_4 = d_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq d_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = d_2 + \frac{1}{2}$

$d_8 = d_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq d_4 + \frac{4}{8} = d_4 + \frac{1}{2}$

donc $2{,}717 \approx d_8 \geq 1 + \frac{3}{2} = 2{,}5$

on remarque que $8 = 2^3$

de proche en proche, $d_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$

la série harmonique d_n tend vers l'infini

elle devient aussi grande que l'on veut si on prend assez de termes

donc les planches glissantes peuvent (théoriquement !) aller aussi loin que l'on veut !

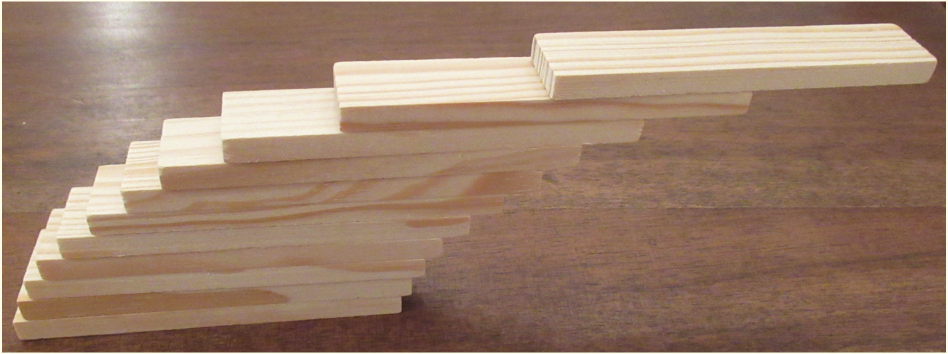
Pour en savoir plus

Kapla
jeu créé par Tom van der Bruggen en 1987, www.kapla.com.

Marc-Antoine Coppo
"Une histoire des séries infinies ; d'Oresme à Euler", 2010, hal-00519026.

Samuel Tapie et Joe Viola
"Une tour de cartes qui penche à l'infini",
Images des Mathématiques, CNRS, 2016, images.math.cnrs.fr.

Merci de votre attention !



vous avez reconnu que ces planches ne sont pas des “Kapla”
mais des “Vilac” (www.vilac.com),
à Moirans-en-Montagne dans le Jura depuis 1911 !