

# LE PLUS GRAND DES NOMBRES

Hervé Stève

G4G à la Coulée Douce

jeudi 21 octobre 2021

1



# Introduction

- Les nombres entiers
- Grains de riz sur échiquier
- Le gogol ...
- Puissances itérées de Knuth
- Flèches chaînées de Conway
- Nombre de Graham, de Rayo ...







# L'échiquier

- Grains de riz sur l'échiquier :

- **En Inde en -3000 AJC** : Sissa pour récompense de sa présentation du jeu d'échec demande au roi de mettre 1 grain de riz sur la 1<sup>ère</sup> case, puis de doubler les grains à la case suivante et ainsi de suite jusqu'à la 64<sup>ème</sup> case. Le pays fuit alors ruiné !

- En effet le **nombre de grains de riz** :

$$N = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

soit environ 18 milliards de milliards de grains de riz !

il faut 1000 ans de production mondiale,

base année 2010 : 720 000 millions de tonnes

- Il faut environ 50 grains par cm<sup>3</sup>, soit le volume des grains de l'échiquier  $V = 18 \cdot 10^{18} / 50 \cdot 10^6 \sim 0,36 \cdot 10^{12}$  cm<sup>3</sup>

Pour ce volume, calculons la hauteur de riz recouvrant la France :

$$h = V / 640\ 000\text{km}^2 \sim 0,5 \text{ m}$$

□ Le plus grand nombre premier connu validé en 2018 :  $2^{82\ 589} - 1$

51<sup>ème</sup> nombre premier de Mersenne

Il faudrait remplir de riz un échiquier d'au moins 9000 cases de côtés !

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
65536	131072	262144	524288	1048576	2097152	4194304	8388608
16777216	33554432	67108864	134217728	268435456	536870912	1073741824	2147483648
4294967296	8589934592	17179869184	34359738368	68719476736	137438953472	274877906944	549755813888
1099511627776	2199023255552	4398046511104	8796093022208	17592186044416	35184372088832	70368744177664	140737488355328
281474976710656	562949953421312	1125899906842624	2251799813685248	4503599627370496	9007199254740992	18014398509481984	36028797018963968
72057584037927936	144115168075855872	288230336151711744	576460672303423488	1152921504606846976	2305843009213693952	4611686018427387904	9223372036854775808



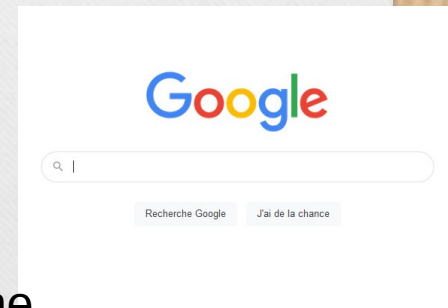
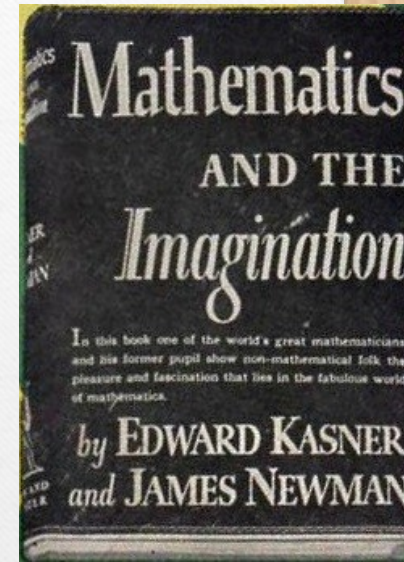


# Gogolplex

**Le nombre gogol** =  $10^{100}$  = 10...0 avec 100 zéros  
apparu en 1940 (E. Kasner & co) est bien grand que le nombre  
de riz sur l'échiquier !

10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000  
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000  
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

- **Le gogolplex** =  $10^{\text{gogol}}$  est un nombre avec 1 suivi de gogol zéros soit plus que le nombre de particules élémentaires de l'Univers pour le représenter
- **Le gogolplexian** =  $10^{\text{gogolplex}}$  = est vraiment un très grand nombre !
- A l'origine du nom de la société *Google* moteur de recherche sur Internet



# Puissances itérées de Knuth

- **Incrémentation :**

Addition :  $a + b = a + 1 + \dots + 1$  avec  $b$  exemplaires de 1

Multiplication :  $a \times b = a + a + \dots + a$  avec  $b$  exemplaires de  $a$

Exponentiation :  $a^b = a \times a \times \dots \times a$  avec  $b$  exemplaires de  $a$

- **Puissance itérées de Donald Knuth (1976) :**

$a \uparrow b = a^b$  on dit :  $a$  flèche  $b$  ou  $a$  exposant  $b$

$a \uparrow\uparrow b = a \uparrow a \uparrow \dots \uparrow a =$  avec  $b$  exemplaires de  $a$

$a \uparrow^n b = a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1))$  si  $b$  non nul et  $n > 1$

si  $b=0$  alors  $a \uparrow^n 0 = 1$  (convention du produit vide)

si  $b=1$  alors  $a \uparrow^n 1 = a$

- **Calculs prioritaires à droite :**

$a \uparrow b \uparrow c = a \uparrow (b \uparrow c) = a \uparrow b^c =$

attention :  $= 3^8 = 1761$  est différent de  $(3^2)^3 = 729$

**exemples)**

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow 3 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3^{27} \text{ gigantesque}$$

avec  $\sim$  chiffres !



Donald Knuth  
né en 1938





# Flèches chaînées de Conway



John Horton Conway  
(1937-2020)

- **Encore plus grand :**

$a$  est un nombre (chaîne de longueur 1)

$a \rightarrow b = a \uparrow b = a^b$  est l'exponentiation (chaîne de longueur 2)

$a \rightarrow b \rightarrow n = a \uparrow^n b$  est la puissance itérée de Knuth

$a \rightarrow b \rightarrow n \rightarrow m$  chaîne de longueur 4 ...

- **Forme générale :** une chaîne de longueur  $n$  est constituée d'une «tête»  $X$  de longueur  $n-1$  et d'un entier  $y$  positif ou « queue » de longueur 1 :  $X \rightarrow y$

- **Propriétés :**

$$X \rightarrow 1 = X \text{ et } X \rightarrow y \rightarrow 1 = X \rightarrow y$$

$$X \rightarrow p+1 \rightarrow q+1 = X \rightarrow (X \rightarrow p \rightarrow q+1) \rightarrow q = X \rightarrow (X \rightarrow (\dots Y \dots) \rightarrow q) \rightarrow q$$

avec  $Y = X \rightarrow (X) \rightarrow q$

- **Exemples :**

$$a \rightarrow b \rightarrow 2 \rightarrow 2 = a \rightarrow b \rightarrow (a \rightarrow b) = a \rightarrow b \rightarrow a^b = a^b$$

pour  $a=3$  et  $b=2$  on a :

$$3 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 2 = 3 \ 2 = 3 \ 3 = 3 \ (3 \ 2) = \dots$$

$$= 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ (3 \ 2)$$

$$= 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3^{27}$$



# Nombre de Graham

- **Entier naturel crée par Ronald Graham** (1935-2020) qui a été longtemps le plus grand nombre utilisé par les mathématiciens : en lien avec la théorie de Ramsey (combinatoire).



**Martin Gartner** (en 1997), propose le nombre  $G$  de Graham comme majorant d'un problème de graphe sur un hypercube ( $2^n$  sommets)

- **Définition** avec les puissances itérées de Knuth :

$$G_0 = 4$$

$$G_1 = 3 \uparrow^{G_0} 3 = 3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3 \gg 3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 2$$

...

$$G_n = 3 \uparrow^{G_{n-1}} 3$$

$$\text{et ainsi } G = G_{64} = 3 \uparrow^{G_{63}} 3$$

- Encadrement avec les chaînes de Conway (voir plus loin) :

$$3 \rightarrow 3 \rightarrow 64 \rightarrow 2 < G < 3 \rightarrow 3 \rightarrow 65 \rightarrow 2$$

mais la chaîne  $3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \gg G !$

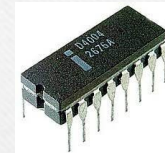
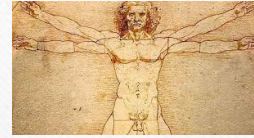




# Bilan

Le plus grand nombre pour :

- **un humain** : l'infini ou mieux les transfinis de taille  $\aleph_0$
- mais **un cerveau humain** :  $10^{11}$  neurones
- **une machine** :  $3,402\ 823\ 5 \times 10^{38}$  nombres en simple précision
- **un physicien** :  $\sim 10^{80}$  particules dans l'Univers
- **Un enfant de 8 ans en 1940** :  $10^{100}$  le gogol
- **un joueur d'échec** :  $\sim 10^{120}$  parties, nombre de Shannon
- **Un joueur de go** :  $\sim 10^{600}$  parties
- **Un mathématicien** :  
nombre de Graham (Guinness Record 1980)  
nombre de Rayo (établit en 2007) est un nombre **inaccessible** : plus petit entier supérieur à tout entier définissable par une expression de langage\* **soit le plus grand nombre spécifiquement nommé** ! Exemple : mille sept-cent-quatre-vingt-dix-neuf en 7 mots  $\Rightarrow 1800$  !



(\*) du premier ordre de la théorie des ensembles, en moins de gogol symboles ! <sup>9</sup>