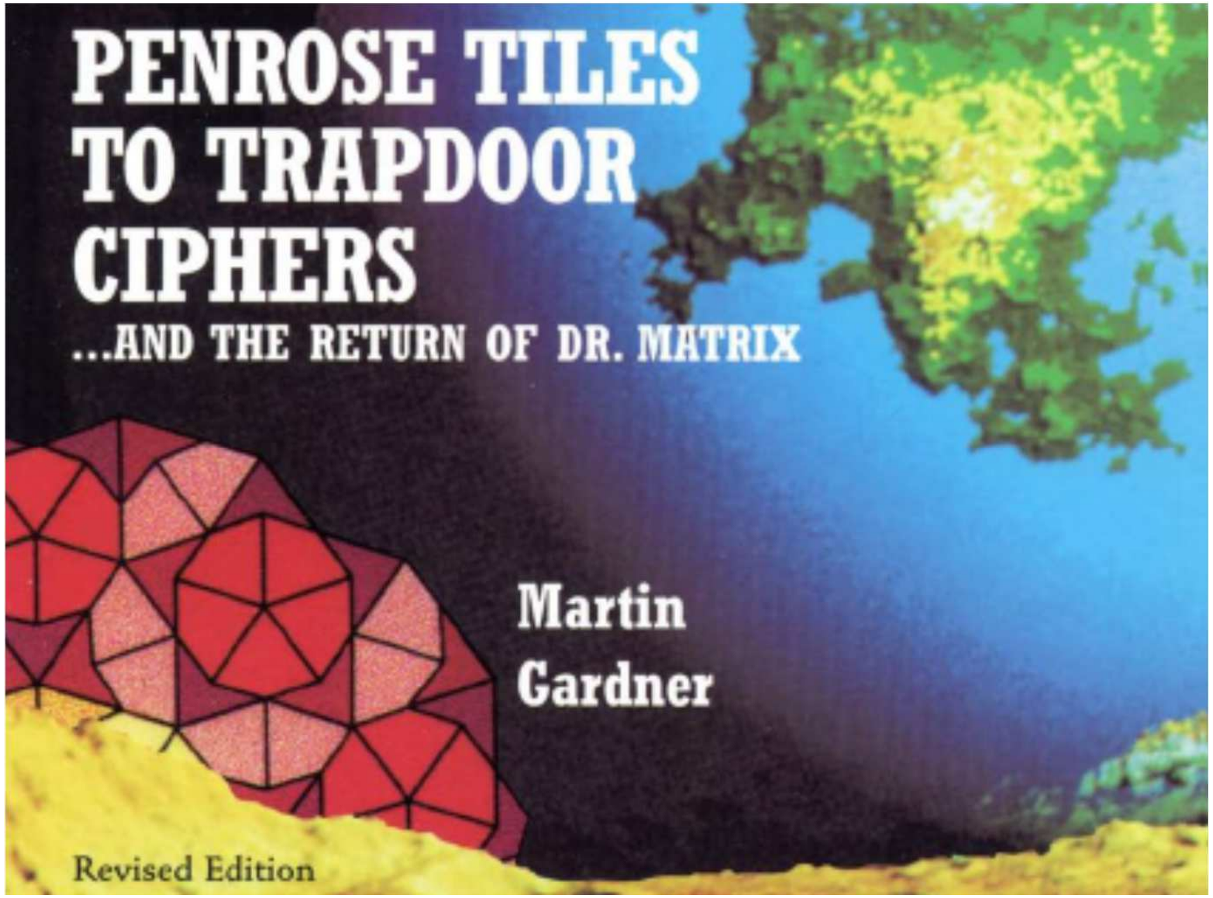
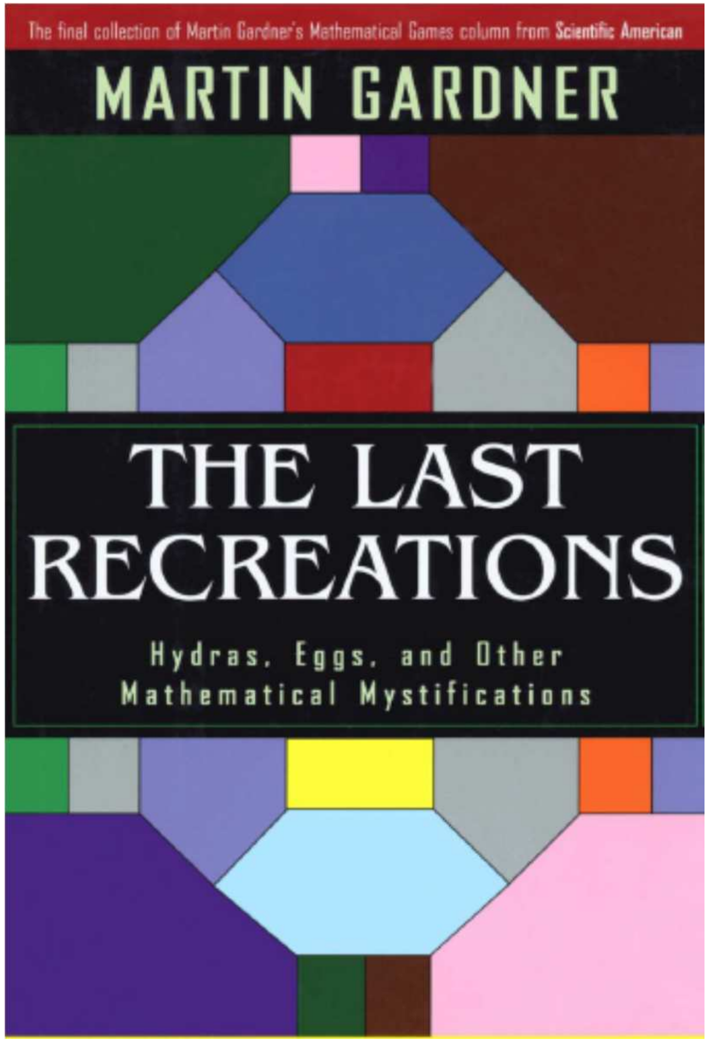
Martin Gardner

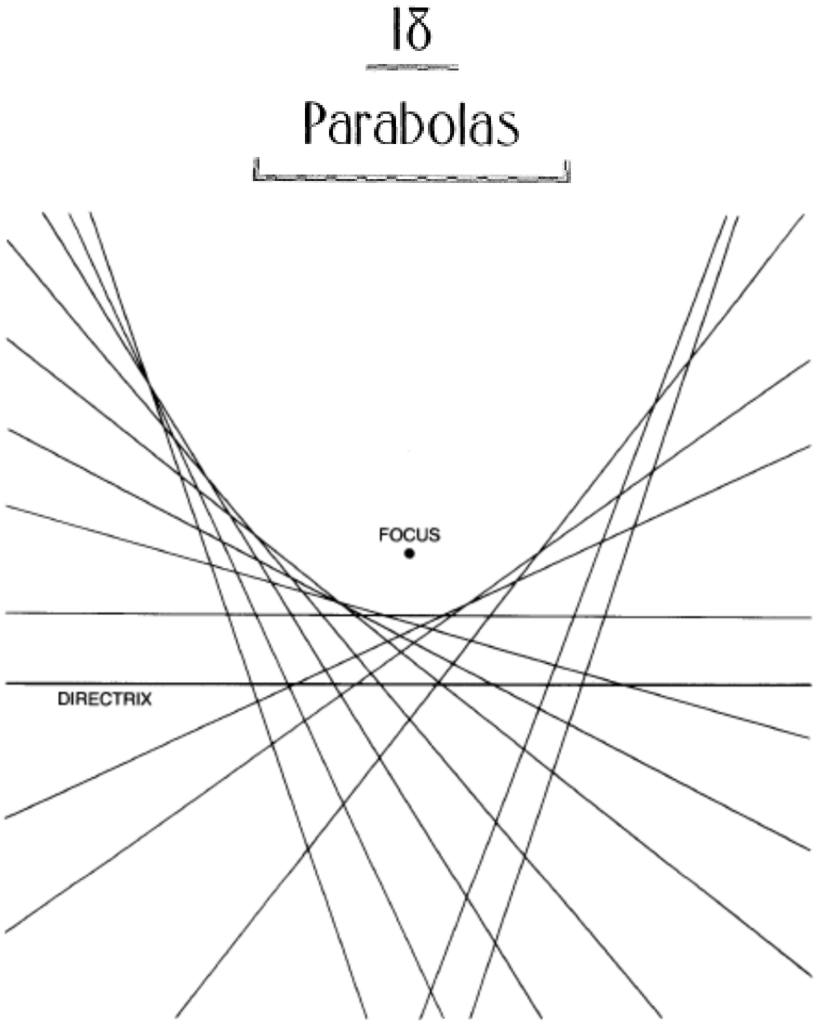
(21/10/1914-22/05/2010)



CHAPTER 15

Hyperbolas

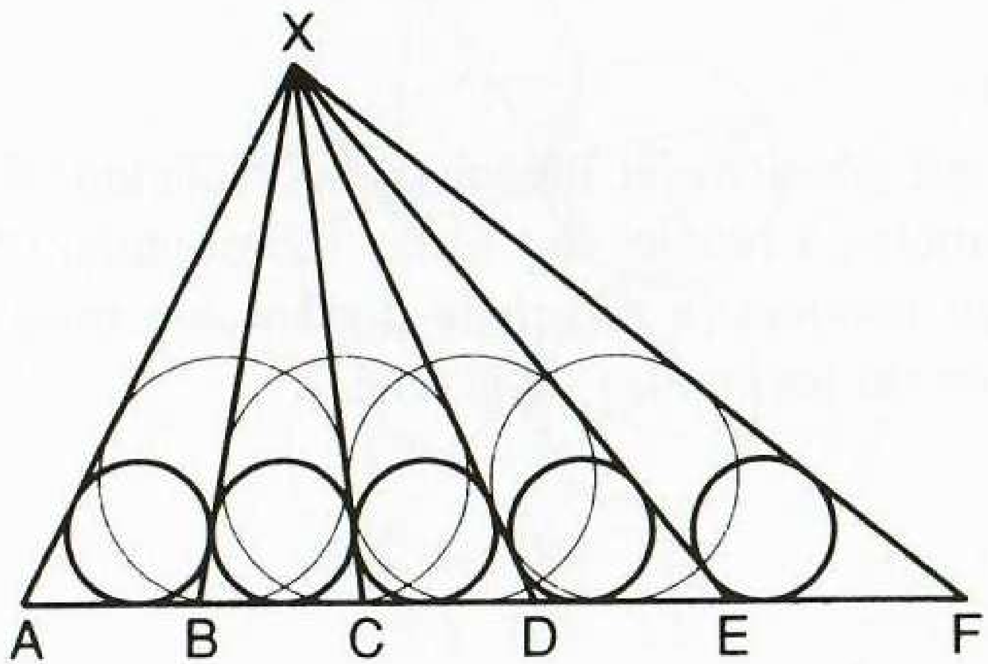

The final collection of Martin Gardner's Mathematical Games column from Scientific American
MARTIN GARDNER
THE LAST RECREATIONS
Hydras, Eggs, and Other Mathematical Mystifications

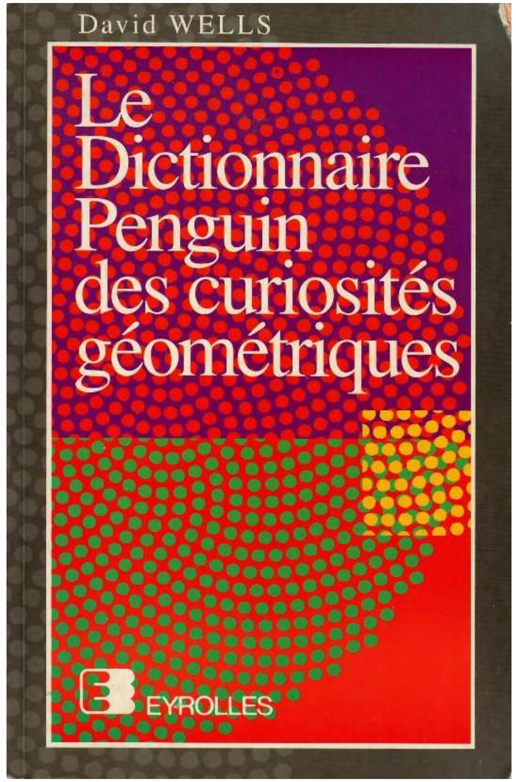

18
Parabolas
FOCUS
DIRECTRIX

La parabole des triangles

cercles inscrits égaux, théorème des

Les rayons partant de X sont choisis de sorte que les triangles XAB, XBC, XCD, etc. aient tous des cercles inscrits identiques. Par conséquent, les triangles XAC, XBB, etc. ont également des cercles inscrits identiques.
De façon similaire, les triangles XAD, XBE, etc. auront également des cercles inscrits égaux, tout comme les triangles XAE et XBF.

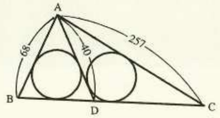




その1

問　題　図のように、三角形 ABC において、AD を引き、その中へ2つの等円を入れる。

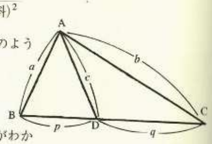
辺 AB = 68 寸、辺 AC = 257 寸、辺 AD = 40 寸であるとき、辺 BC の長さを求めよ。



現代的解に入る前に、この問題の術文に注目してみる。答に至る式は、数学的に表すと次のようになる。

$$大斜 = \sqrt{(中斜 + 小斜)^2 - 4\times\ (界斜)^2}$$

これを、問題の図の記号で表わすと次のようになる。



$$BC = \sqrt{(a+b)^2 - 4c^2}$$

なかなかきれいな式で表わせることがわかる。

実はこの問題を解くため、スチュアートの定理を用いると容易に解決できる。スチュアートの定理という耳なれない定理ではあるが、図形問題を解くときに知っていると大きな手がかりになるので、ここではスチュアートの定理を取り上げて解説する。

スチュワートの定理

三角形 ABC において、辺 BC を $m:n$ に内分する点を D とするとき、次の式が成り立つ。

$$nAB^2 + mAC^2 = (m+n)AD^2 + nBD^2 + mCD^2$$

これを、スチュアートの定理という。

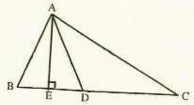
スチュアートの定理を証明してみよう。

【証明】

頂点 A から辺 BC へ垂線を下ろし、辺 BC との交点を E とする（ここでは、点 E は、図のように、線分 BD 上にある場合について考える）。

△ ABE について、三平方の定理より

$$\begin{aligned} AB^2 &= AE^2 + BE^2 \\ &= AE^2 + (BD - DE)^2 \\ &= AE^2 + BD^2 - 2BD\cdot DE + DE \\ &= (AE^2 + DE^2) + BD^2 - 2BD\cdot DE \\ &= AD^2 + BD^2 - 2BD\cdot DE \cdots\cdots ① \end{aligned}$$



（∵直角三角形 ADE について、三平方の定理を使う）

△ACE について、同様に三平方の定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= AE^2 + CE^2 \\ &= AE^2 + (CD + DE)^2 \\ &= AE^2 + CD^2 + 2CD\cdot DE + DE^2 \\ &= (AE^2 + DE^2) + CD^2 + 2CD\cdot DE \\ &= AD^2 + CD^2 + 2CD\cdot DE \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

ここで、点 D は辺 BC を $m:n$ に内分する点であることに気をつけると、

$$BD : CD = m : n$$

よって、　$nBD = mCD \cdots\cdots ③$

であるから、

①× n より　$nAB^2 = nAD^2 + nBD^2 - 2nBD\cdot DE$

$$= nAD^2 + nBD^2 - 2mCD\cdot DE \cdots\cdots ④\ (∵③)$$

②× m より　$mAC^2 = mAD^2 + mCD^2 + 2mCD\cdot DE \cdots\cdots ⑤$

ゆえに、④+⑤　より

$$nAB^2 + mAC^2 = (m+n)\,AD^2 + nBD^2 + mCD^2$$

証明終わる

点 E が、線分 CD 上または、C の方の延長上にある場合も同様に証明できる。スチュアートの定理を学校の授業で学ぶ機会は少ないが、点 D が辺 BC の中心になる場合はよく取り上げられる。上のスチュアートの定理で、$m:n = 1:1$　とすればよいから、CD = BD　である。$m = n = 1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2AD^2 + BD^2 + CD^2 \\ &= 2\,(AD^2 + BD^2) \end{aligned}$$

が成り立つ。これを中線定理（パップスの定理）という。

さて、スチュアートの定理を使って、現代的解を完成させよう。

本問では、点 D が辺 BC をどのような比に内分する点であるか考えればよい。

現代的解

△ABC について、辺 BC を $m:n$ に内分する点を D とする。また、$AB = a$、$AC = b$、$AD = c$　とする。

△ABD と△ACD の面積比は、高さが共通であるから、

$$△ABD : △ACD = BD : CD = m : n$$

また、二つの三角形の内接円の半径は等しいから、その面積比は、周の長さの比に等しい。すなわち

$$△ABD : △ACD = (a + c + BD) : (b + c + CD)$$

よって、

$$m : n = BD : CD = (a + c + BD) : (b + c + CD) = (a + c) : (b + c)$$

である。

ここで、スチュアートの定理で、$BD = \dfrac{m}{m+n}BC$, $CD = \dfrac{n}{m+n}BC$ 注意すると、

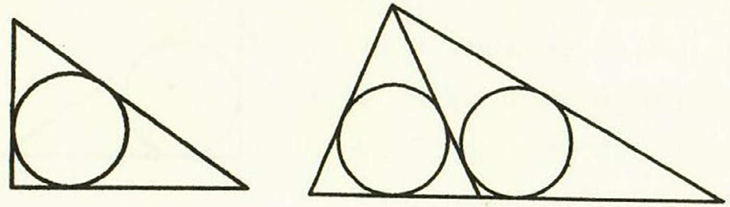
$$\begin{aligned} nAB^2 + mAC^2 &= (m+n)AD^2 + n\left(\frac{m}{m+n}BC\right)^2 + m\left(\frac{n}{m+n}BC\right)^2 \\ &= (m+n)AD^2 + \frac{m^2n + mn^2}{(m+n)^2}BC^2 \\ &= (m+n)AD^2 + \frac{mn(m+n)}{(m+n)^2}BC^2 \\ &= (m+n)AD^2 + \frac{mn}{m+n}BC^2 \end{aligned}$$

よって、$BC^2 = \dfrac{m+n}{m}AB^2 + \dfrac{m+n}{n}AC^2 - \dfrac{(m+n)^2}{mn}AD^2$

$AB = a$、$AC = b$、$AD = c$、$m = a + c$、$n = b + c$　を代入すると、

$$\begin{aligned} BC^2 &= \frac{a+b+2c}{a+c}\times a^2 + \frac{a+b+2c}{b+c}\times b^2 - \frac{(a+b+2c)^2}{(a+c)(b+c)}c^2 \\ &= (a+b+2c)\left\{\frac{(b+c)a^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(a+c)b^2}{(a+c)(b+c)} - \frac{(a+b+2c)^2}{(a+c)(b+c)}\right\} \\ &= \frac{(a+b+2c)}{(a+c)(b+c)}\left\{(b+c)a^2 + (a+c)b^2 - (a+b+2c)c^2\right\} \\ &= \frac{(a+b+2c)}{(a+c)(b+c)}\left\{(b+c)a^2 + (a+c)b^2 - (a+c)c^2 - (b+c)c^2\right\} \\ &= \frac{(a+b+2c)}{(a+c)(b+c)}\left\{(a+c)(b^2+c^2) + (b+c)(a^2-c^2)\right\} \end{aligned}$$

その1　その2



奉懸算題

今有如図三斜之内隔界斜容二円各径等只云中斜二百五十七寸小斜六十八寸界斜四十零寸問大斜幾何

答曰大斜三百一十五寸

術曰置中斜加小斜自乗之而得数之内減界斜巾四段平方開之得大斜合問

又有鈎股之内容円只云鈎股之和一十七寸又云鈎股円径各再乗巾相併為実以弦円径之差除之得数二百一十三寸問弦若干

答曰弦一十三寸

術曰置只云数自乗之而三之内減又云数二段平方開之商以減只云数三段余得弦合問

右　神谷直縄

$$\begin{aligned} &= \frac{(a+b+2c)}{(a+c)(b+c)}\left\{(a+c)(b+c)(b-c) + (b+c)(a+c)(a-c)\right\} \\ &= (a+b+2c)(a+b-2c) \\ &= (a+b)^2 - 4c^2 \end{aligned}$$

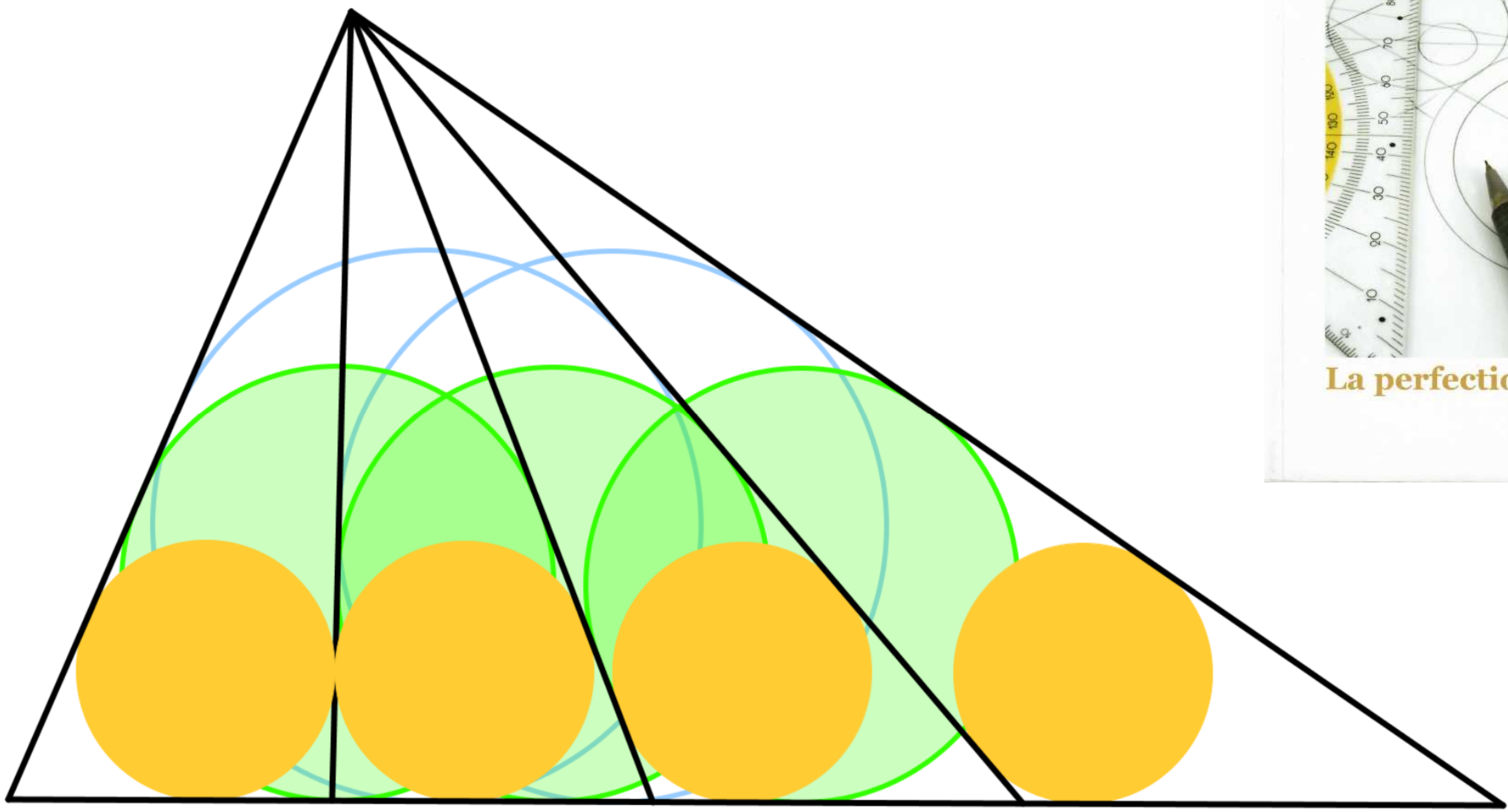
ゆえに、$BC = \sqrt{(a+b)^2 - 4c^2}$　　←術文に一致する。

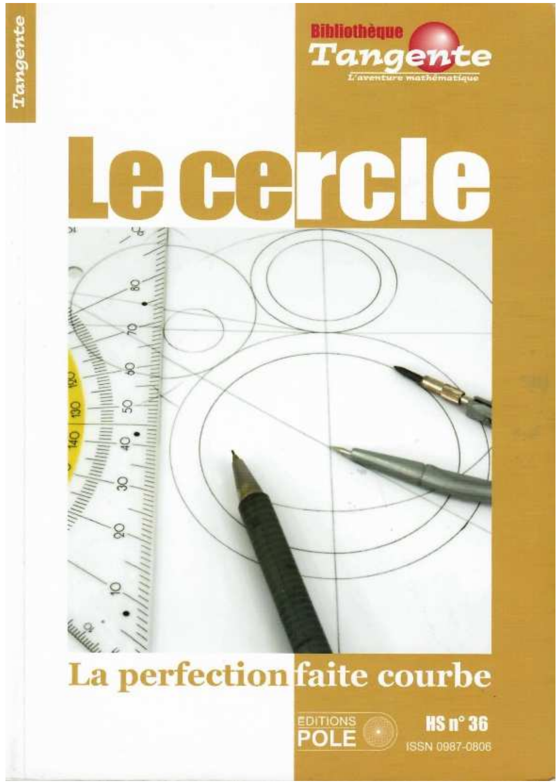
この式に、$a = 68$ 寸、$b = 257$ 寸、$c = 40$ 寸　を代入すると、

$$BC = \sqrt{(68+257)^2 - 4\times 40^2} = 315\,(寸)\ \cdots\cdots\ (答)$$

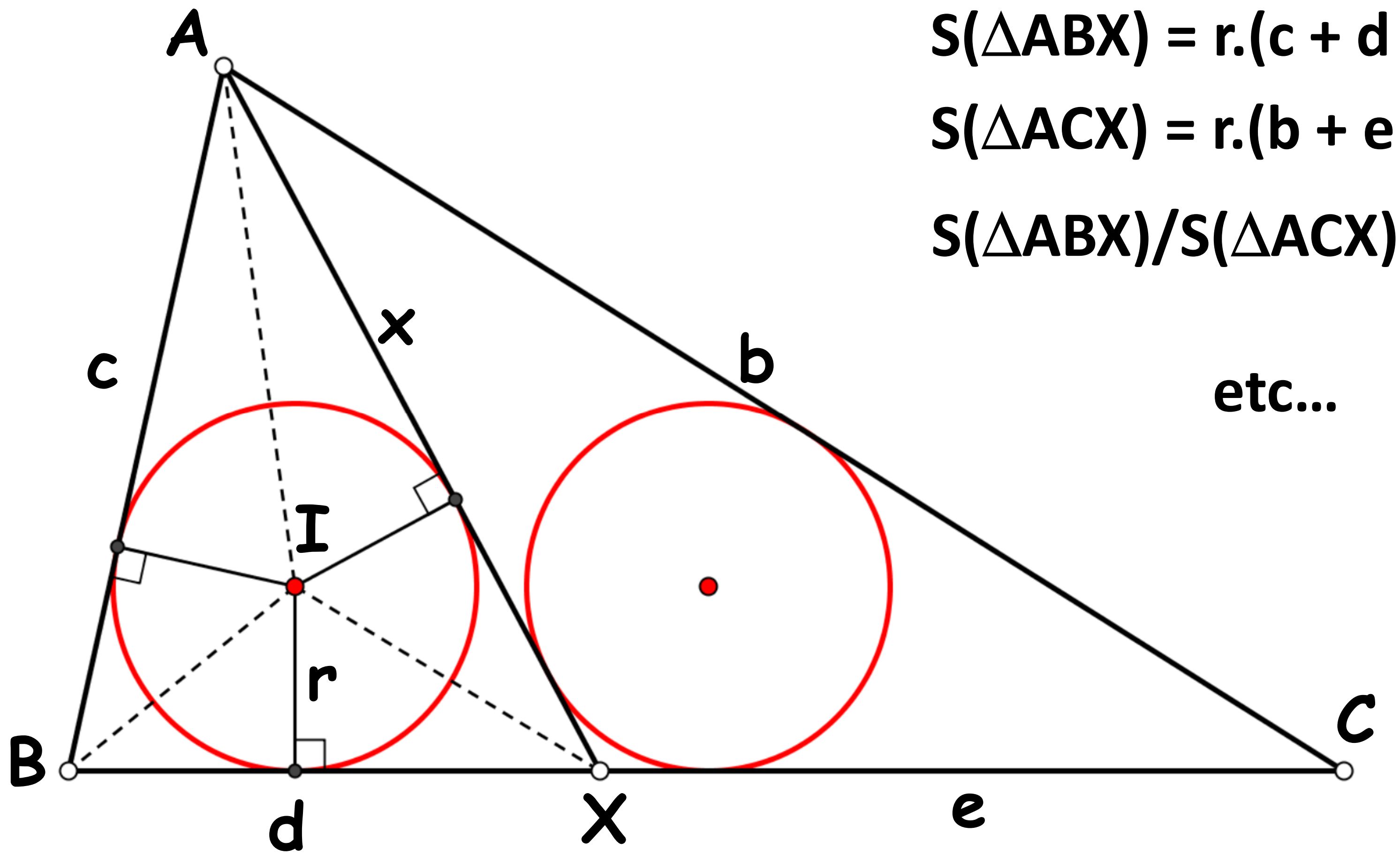
を得る。これは答に一致している。

Cercles inscrits égaux





Cercles inscrits égaux



$a = d + e$

$S(\Delta ABX) = r.(c + d + x)/2$

$S(\Delta ACX) = r.(b + e + x)/2$

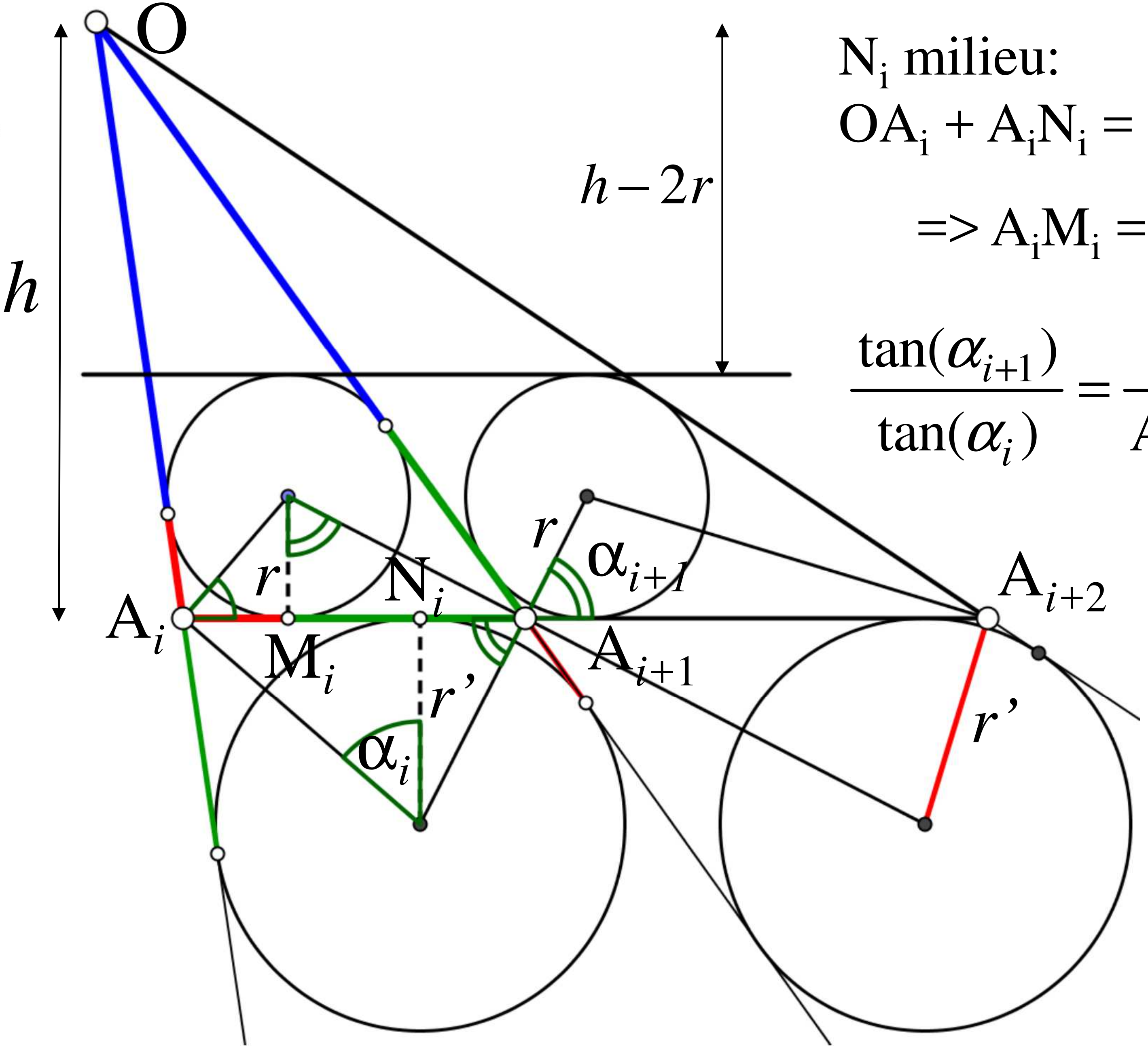
$S(\Delta ABX)/S(\Delta ACX) = d/e$

etc…

On suit le calcul = LOURD!

Jean Moreau de Saint-Martin

Salon CIJM 2017



N_i milieu:

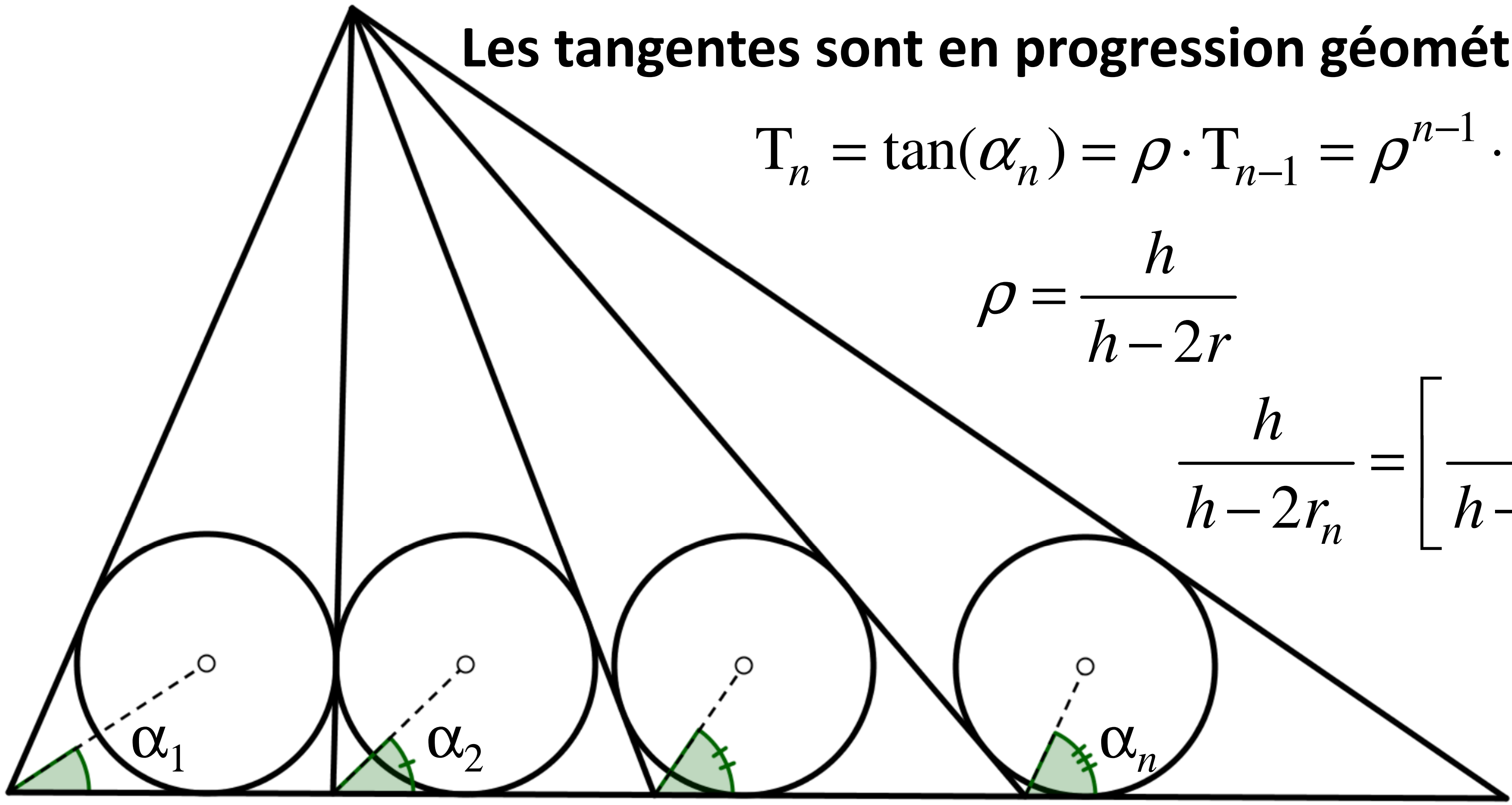
$OA_i + A_iN_i = OA_{i+1} + A_{i+1}M_i$

$\Rightarrow A_iM_i = A_{i+1}N_i$

$$\frac{\tan(\alpha_{i+1})}{\tan(\alpha_i)} = \frac{r'}{A_{i+1}N_i} \cdot \frac{A_iM_i}{r} = \rho$$

$$\rho = \frac{h}{h-2r} = \frac{r'}{r}$$

Cercles inscrits égaux



Les tangentes sont en progression géométrique:

$$\mathrm{T}_n = \tan(\alpha_n) = \rho \cdot \mathrm{T}_{n-1} = \rho^{n-1} \cdot \mathrm{T}_1$$

$$\rho = \frac{h}{h-2r}$$

$$\frac{h}{h-2r_n} = \left[\frac{h}{h-2r_1}\right]^n$$

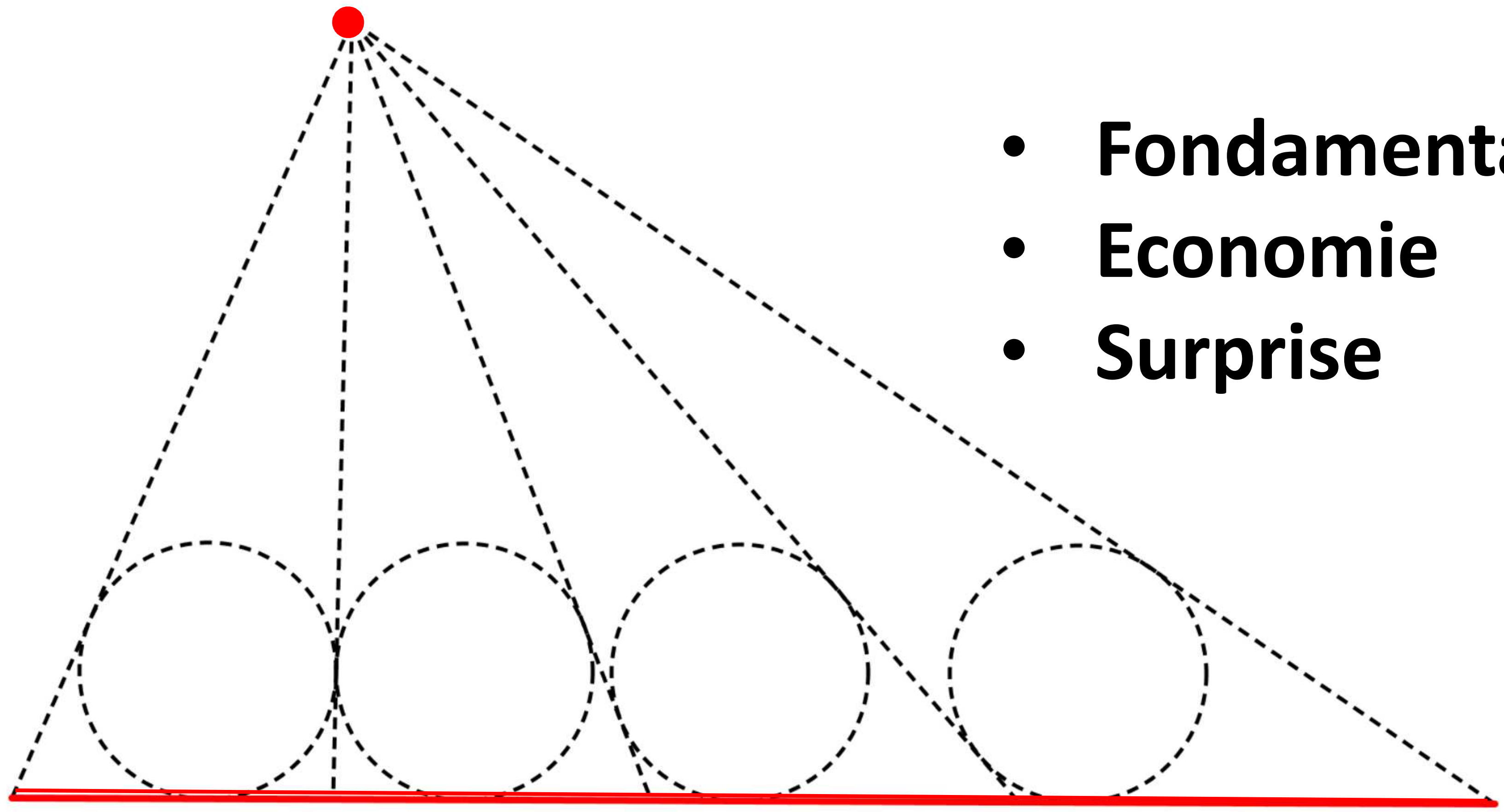
En prenant un terme sur k d'une suite géométrique de rapport ρ, on obtient une suite géométrique de rapport ρ^k :

$$\mathrm{T}_{kn+1} = \rho^k \cdot \mathrm{T}_{k(n-1)+1} = \rho^{kn} \cdot \mathrm{T}_1$$

La parabole des triangles

« La beauté est le premier critère : il n'y a pas de place permanente dans le monde pour de laides mathématiques. »

G. Hardy



- **Fondamental**
- **Economie**
- **Surprise**

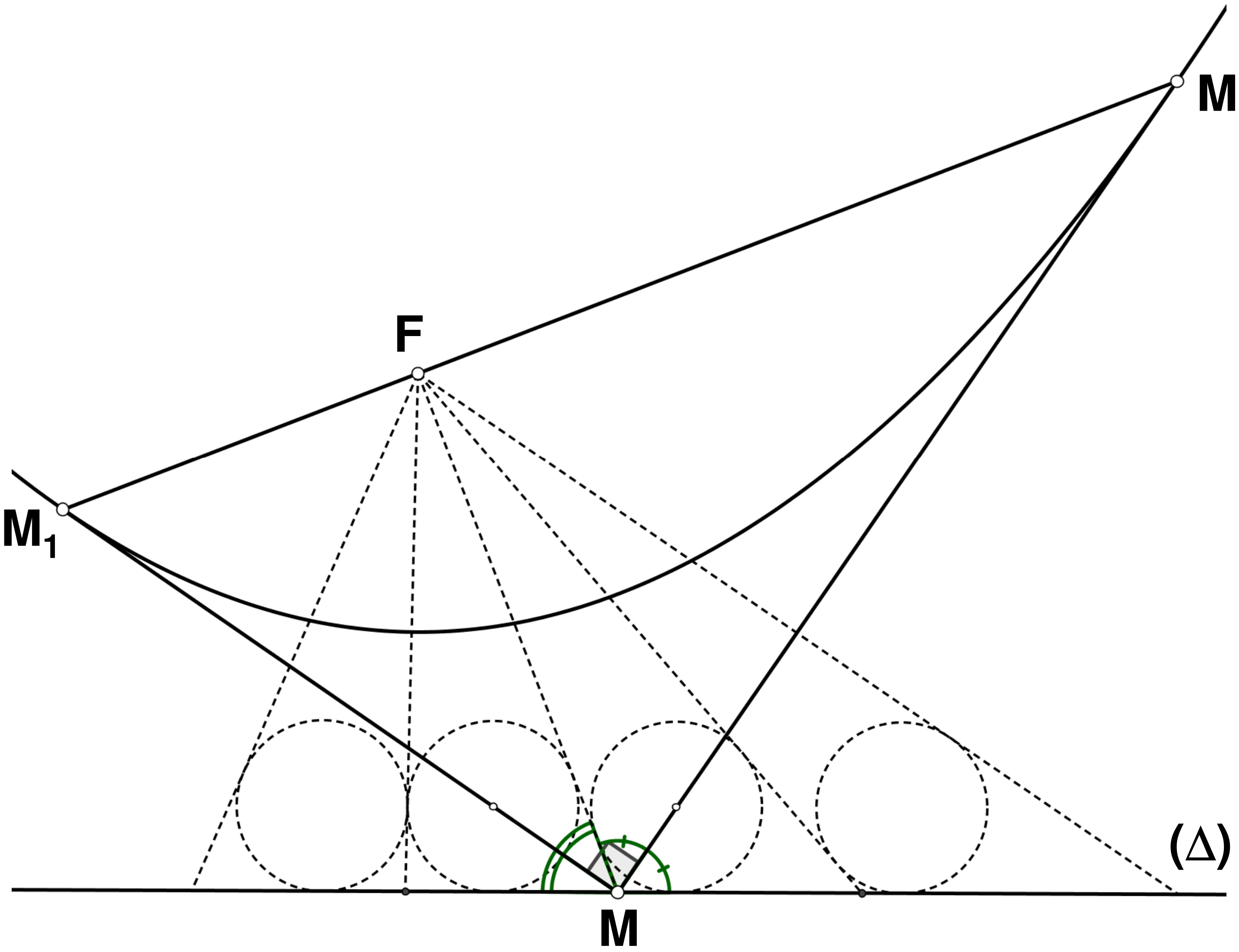
Aller à l'essentiel

foyer

1 point + 1 droite = 1 parabole

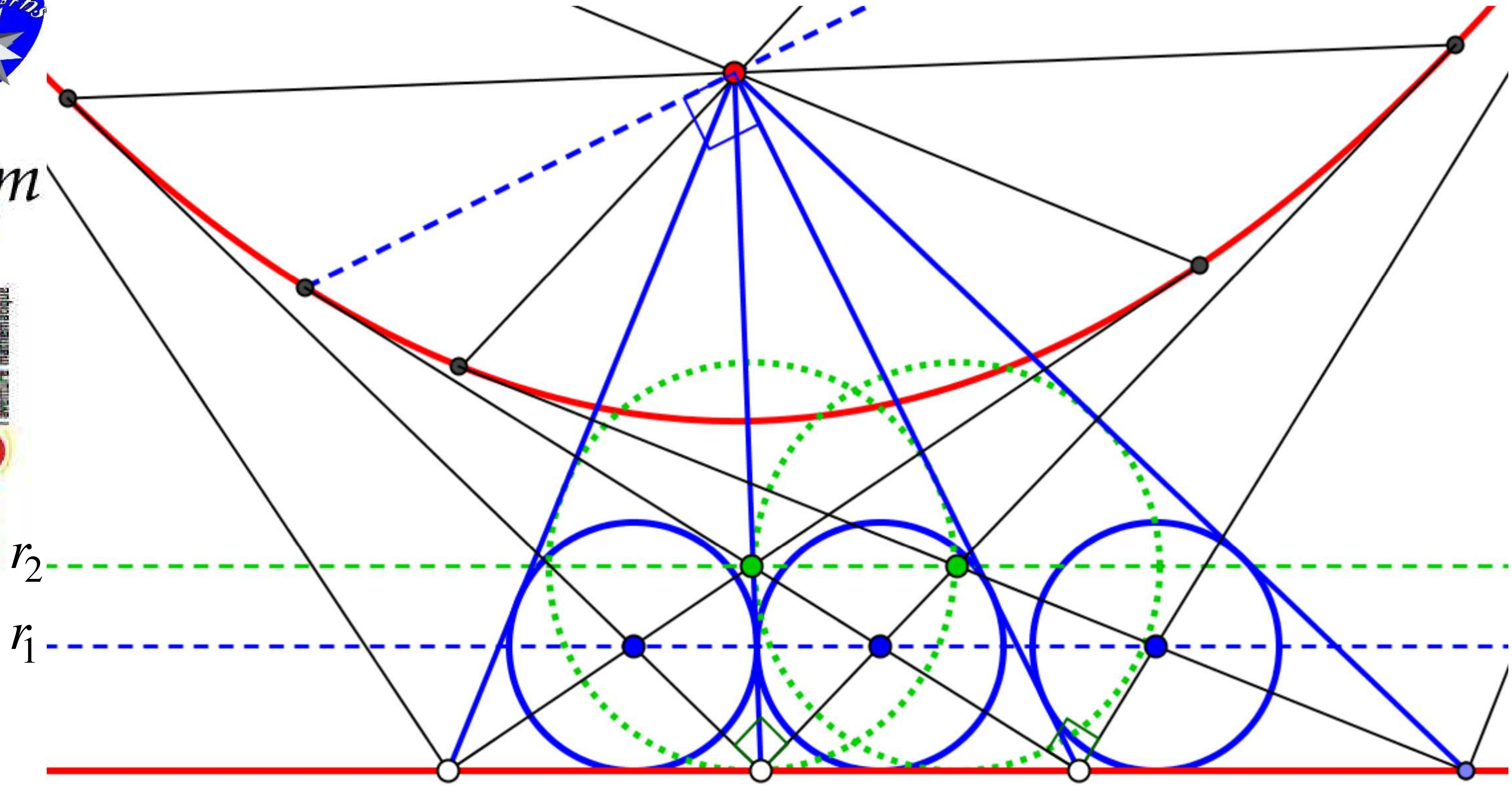
directrice

La parabole des triangles



Directrice (Δ) = courbe orthoptrique de la parabole

La parabole des triangles



Jérusalem, à thème attique

Je rusa les Mathématiques