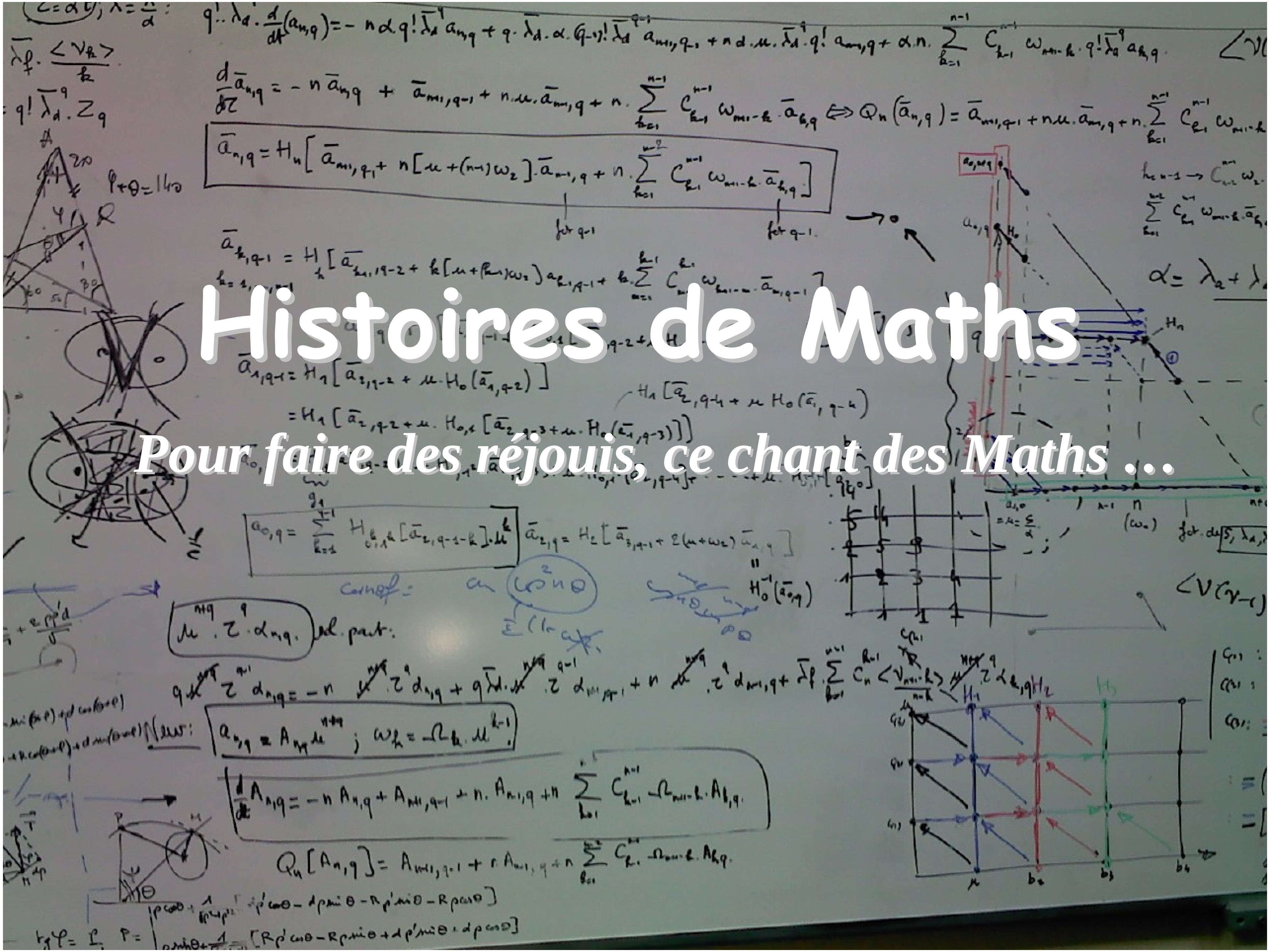
Histoires de Maths

Pour faire des réjouis, ce chant des Maths …



Histoires de Maths

- Maths universelles
- Maths grecques
- Construction des Mathématiques
- Mathématiciens
- Notions de :
  - ✓ Intuition
  - ✓ Déduction
  - ✓ Démonstration
  - ✓ Vérité
  - ✓ Beau

Histoires de Maths

Os Ishango (-20.000, -10.000)

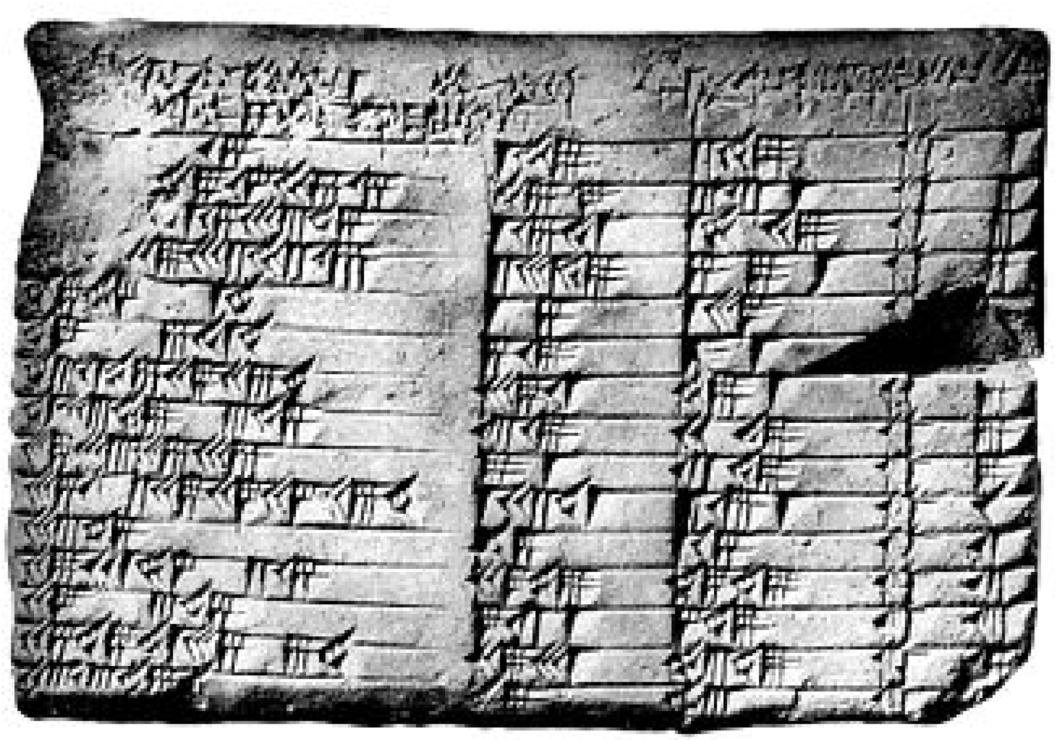
Papyrus de Rhind

vers - 2000

Babylone

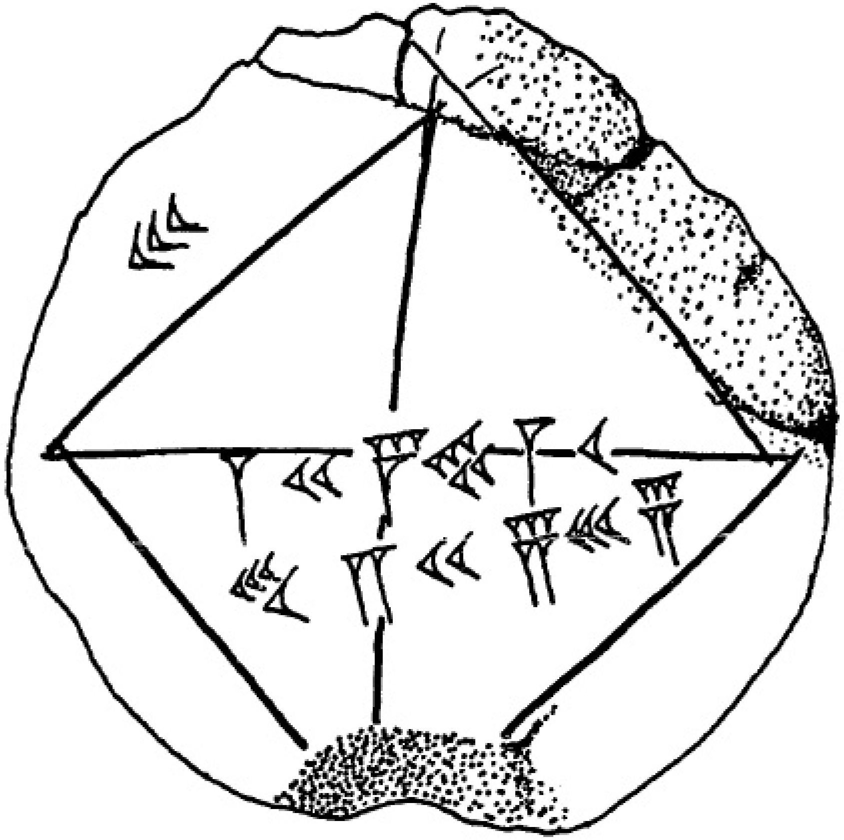
vers - 1700

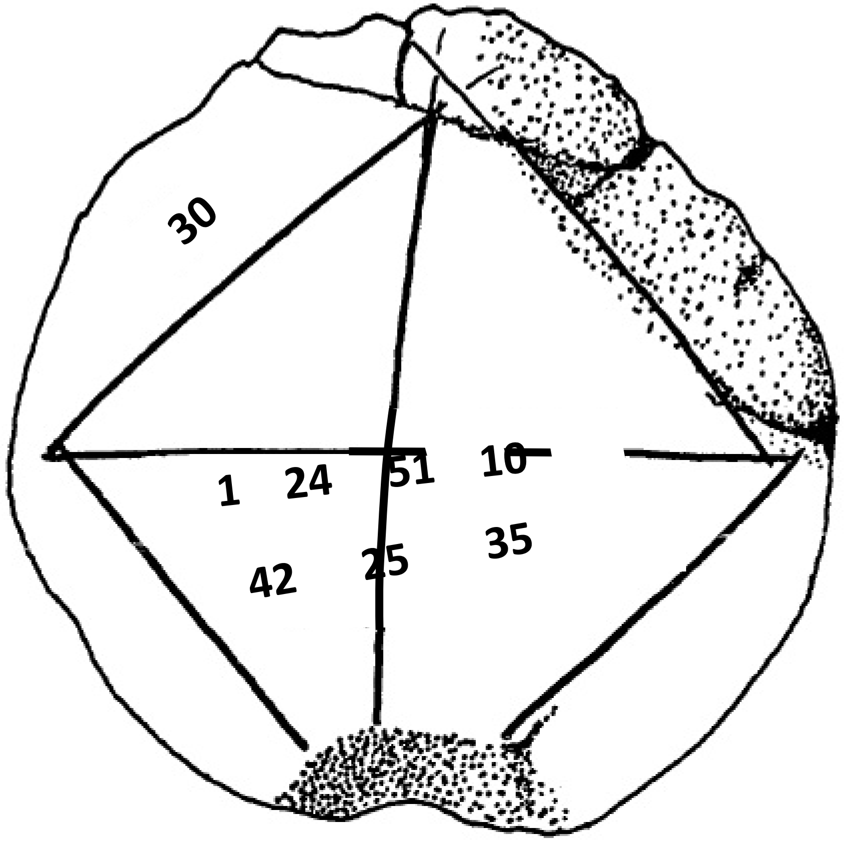
- SUMER (IIIème millénaire av. JC) :
  - Ecriture cunéiforme
  - Système sexagésimal
- BABYLONE (-2000, -1000) :
  - 4 opérations
  - Algorithmes racine carrée, racines cubiques
  - Equation du second degré
  - Tables d'inverses (division)
  - Triplets pythagoriciens (XVIIIème)



Triplets pythagoriciens: (3, 4, 5), (119, 120, 169)

(tablette Pimpton 322)



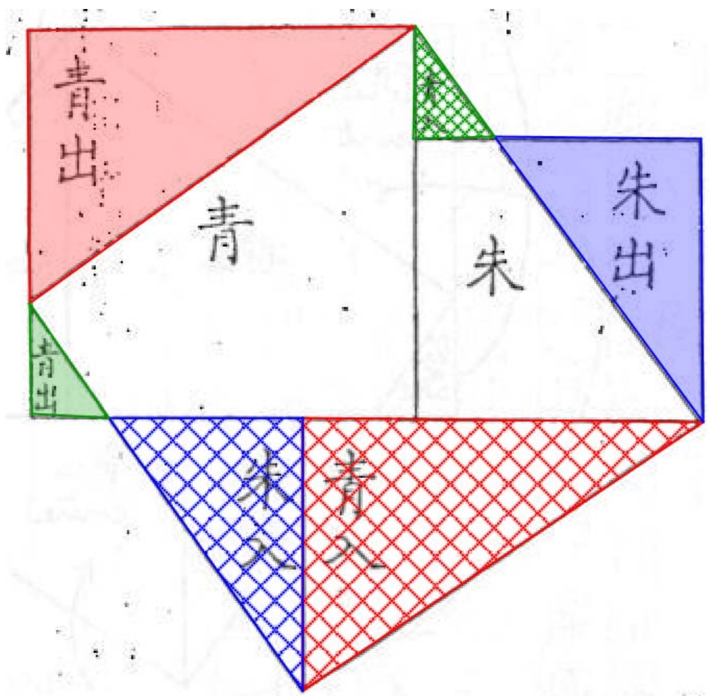


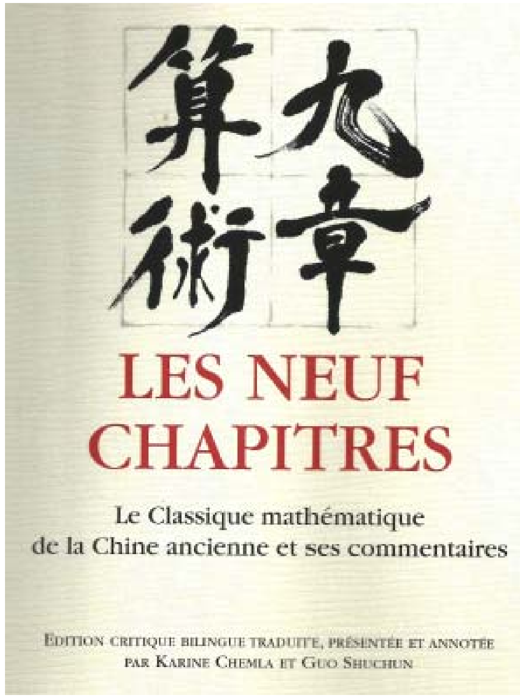
$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=\frac{30547}{21600}=1,41421\overline{296}$$

- Applications pratiques :
  - Commerce
  - Remembrement
- Connaissances :
  - Système décimal additif (romain)
  - 4 opérations
  - Fractions « égyptiennes » 1/n
  - racine carrée (?)
  - Règle de la « fausse position » (*regula falsi*)
  - Approximation de π

Une Chine de Maths

- A partir de -1000
- Peu de traces écrites dans l’antiquité
- Traité des neuf Chapitres
- Méthodes « algorithmiques » empiriques
- Système décimal positionnel (table, baguettes)
- Théorème des restes chinois (congruences)





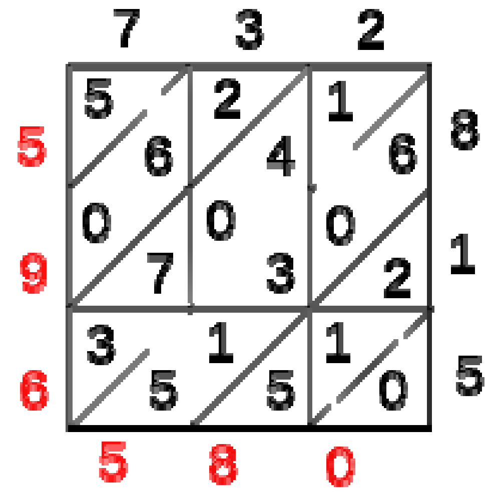
Civilisations Pré-colombiennes

- MAYAS (-2600, +1500) :
  - Système vigésimal
  - Deux zéros (ordinal, cardinal)
  - Ecriture permettant de grands nombres (Astronomie)
    - Année Maya : 365,2420 jours
    - Année grégorienne : 365,2425 jours
    - Année solaire : 365,2422 jours
- INCAS :
  - Système décimal positionnel
  - Pas d’écriture (*quipus*)

Histoires de Maths

- INDE (> - 1500, âge d'or: 400-1200) :
  - ➢ Applications pratiques
  - ➢ Système décimal de position, chiffres, 0
  - ➢ Règle des signes
  - ➢ Pythagore
  - ➢ Trigonométrie
  - ➢ Eléments de calcul différentiel

- Monde Islamique :
  - ➢ Lien Orient-Occident
  - ➢ Algèbre (>0)
  - ➢ Trigonométrie sphérique
  - ➢ Astronomie



732 x 815 = 596 580

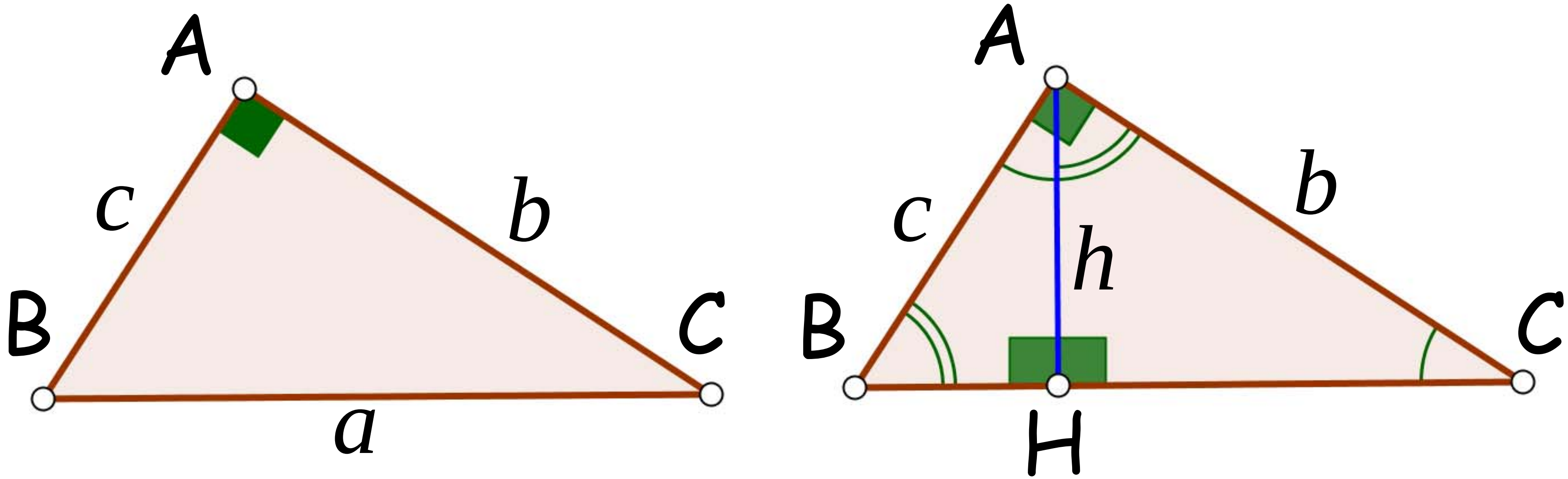
- de Thalès (v. -625, v. -547) à Eutocios (480, v.520)
- Sources importantes, traces écrites:
  - Copies
  - Traductions
  - Commentaires
  - Abstraction (Philosophie → Maths)
  - Principaux Mathématiciens « antiques »:
  - Thalès (à faire!)
  - Pythagore (v. -580, -495) *le 1^er^ philosophe*
  - Hippocrate de Chios (-470, -410)
  - Eudoxe de Cnide (-408, -355)
  - Euclide (vers -300?)
  - Archimède (-287, -212)

Pythagore (v. -580, 495)

Le premier Maître Universel (Hegel)

- Système décimal additif (romain)
- Raisonnement par l'absurde (apagogie)
- « Tout est nombre » : $\sqrt{2}$?
- Constructions à la règle et au compas
- => 3 problèmes:
    - ➢ Quadrature du cercle
    - ➢ Trisection de l'angle
    - ➢ Duplication du cube
- Ecole Pythagoricienne: postulant, néophyte (3 ans), acousmaticiens (5 ans), mathématiciens.

Règles strictes: végétarisme pur, rites religieux, abstinence sexuelle, sport, méditation.



- Triangle rectangle ABC
- On abaisse de A la dernière hauteur: AH
- Trois triangles rectangles semblables: ABC, HBA, HAC
- Surfaces proportionnelles au carré d'une de leurs dimensions, par exemple l'hypothénuse.

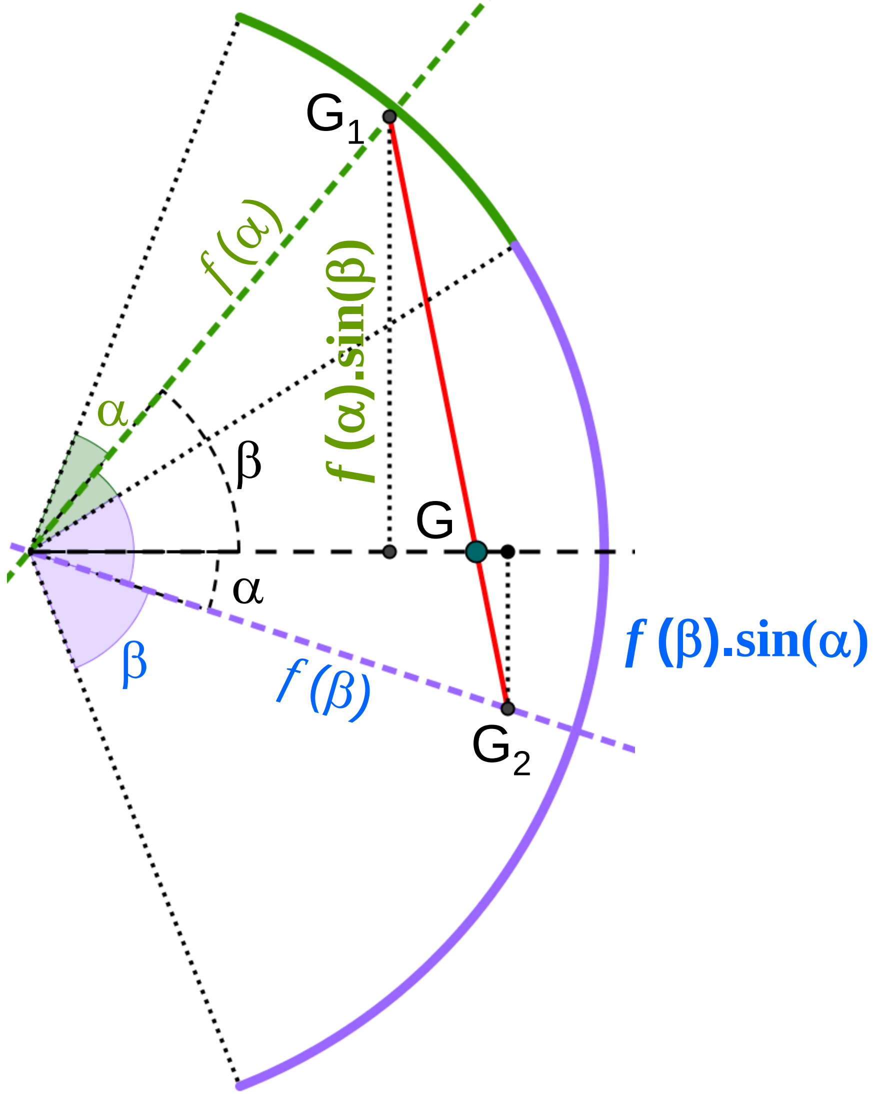
S(ABC) = S(HBA) + S(HAC)

$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$\alpha f(\alpha)\sin(\beta)=\beta f(\beta)\sin(\alpha)$$

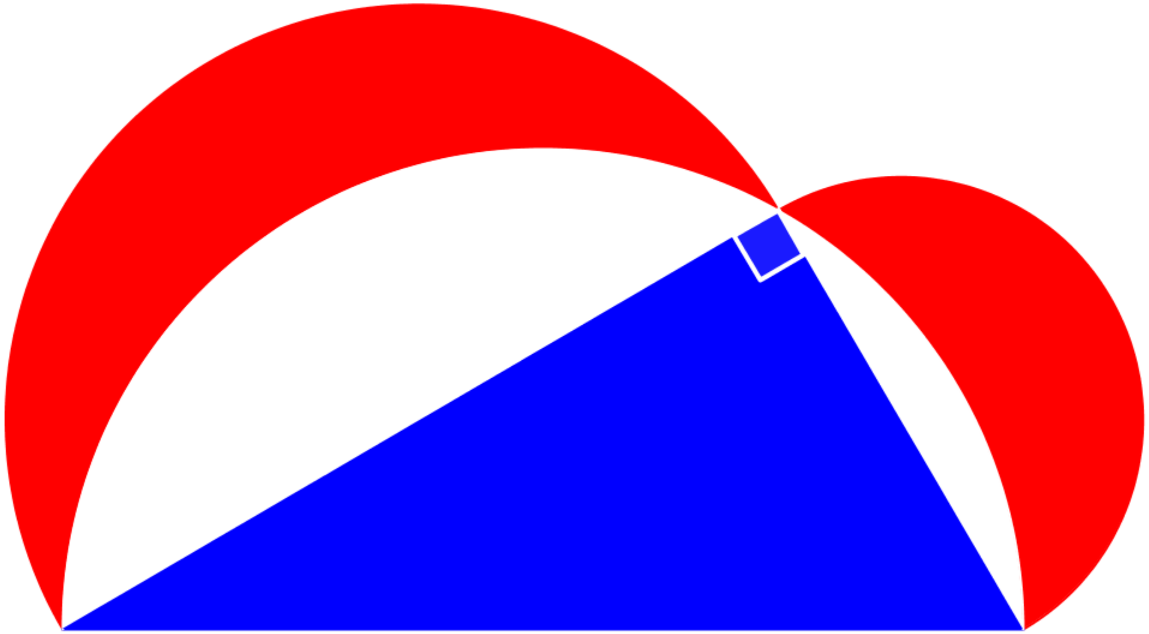
$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha f(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\beta f(\beta)}{\sin(\beta)} = R$$

$$\boxed{f(\alpha) = \mathrm{R}\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}}$$



Hippocrate de Chios (-470,-410)

- Travaille sur 2 des « 3 problèmes » :
  - Quadrature du cercle
  - Duplication du cube
- «Eléments de Géométrie » (1 siècle avant Euclide)
- Quadrature des lunules



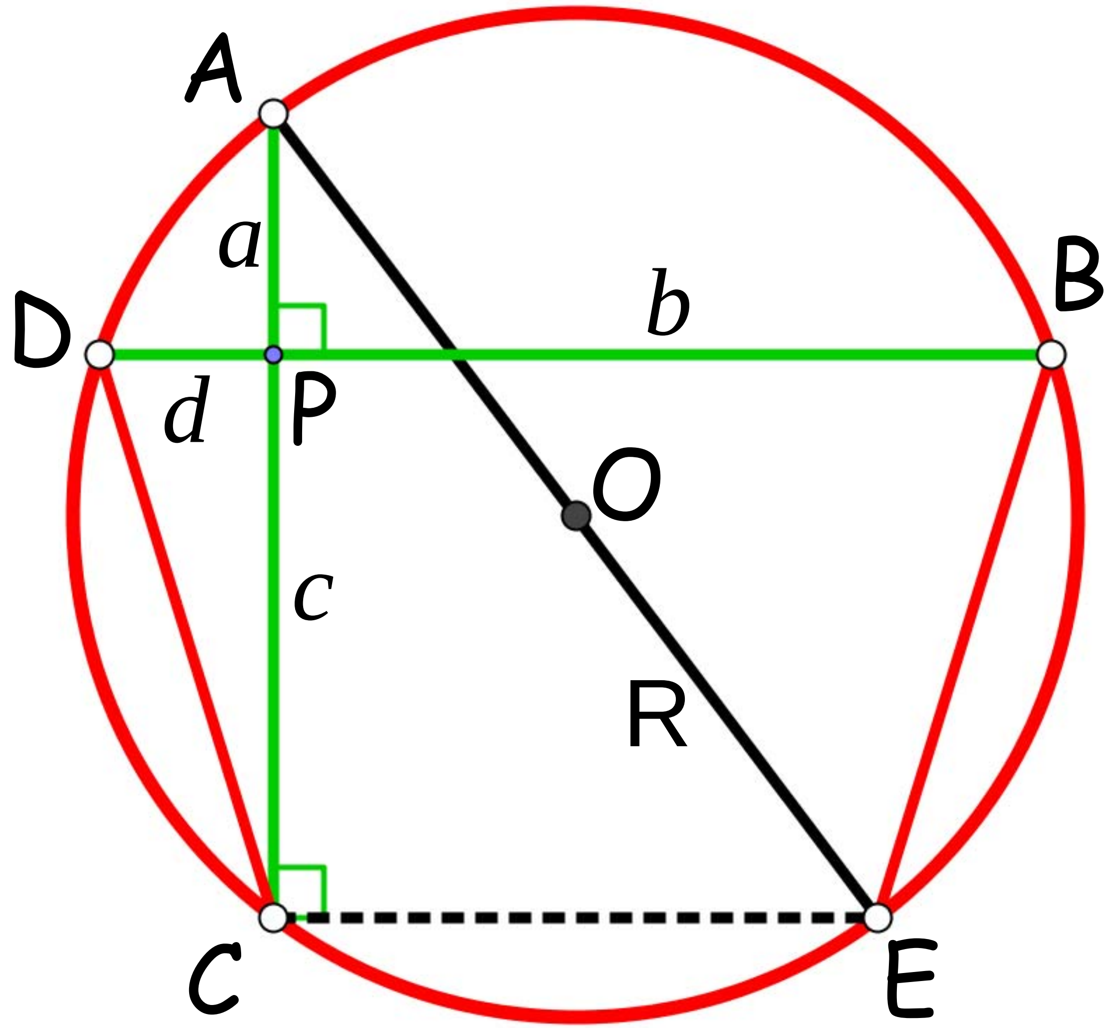
Enquête sur la Lunule

Généralisation

CE // DB

[CD] = [EB]

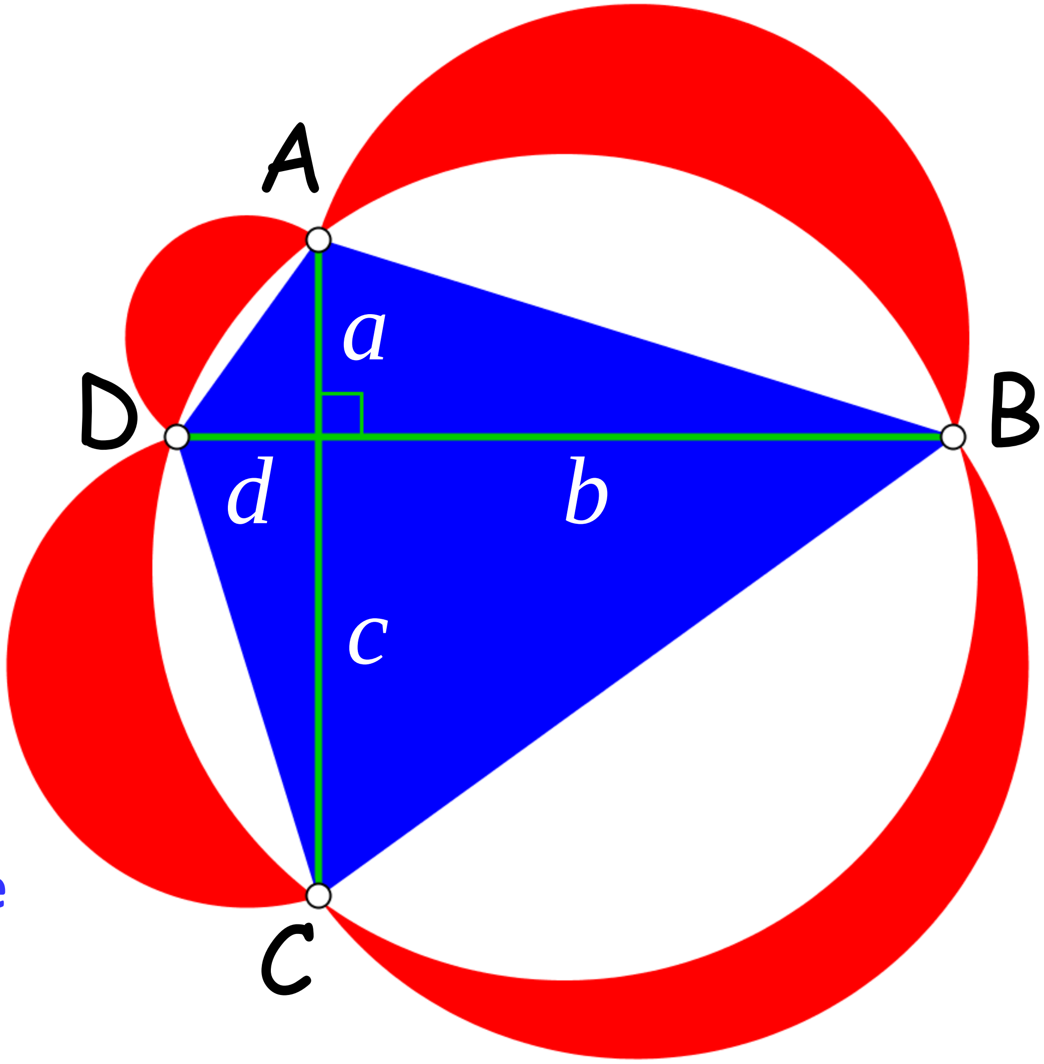
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$
$$= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{DC}^2$$
$$= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BE}^2$$
$$= 4 \cdot \mathrm{R}^2$$



ARCHIMEDE

Enquête sur la Lunule

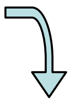
$$\mathrm{AD}^2 = a^2 + d^2$$
$$\mathrm{DC}^2 = d^2 + c^2$$
$$\mathrm{CB}^2 = c^2 + b^2$$
$$\mathrm{BA}^2 = b^2 + a^2$$



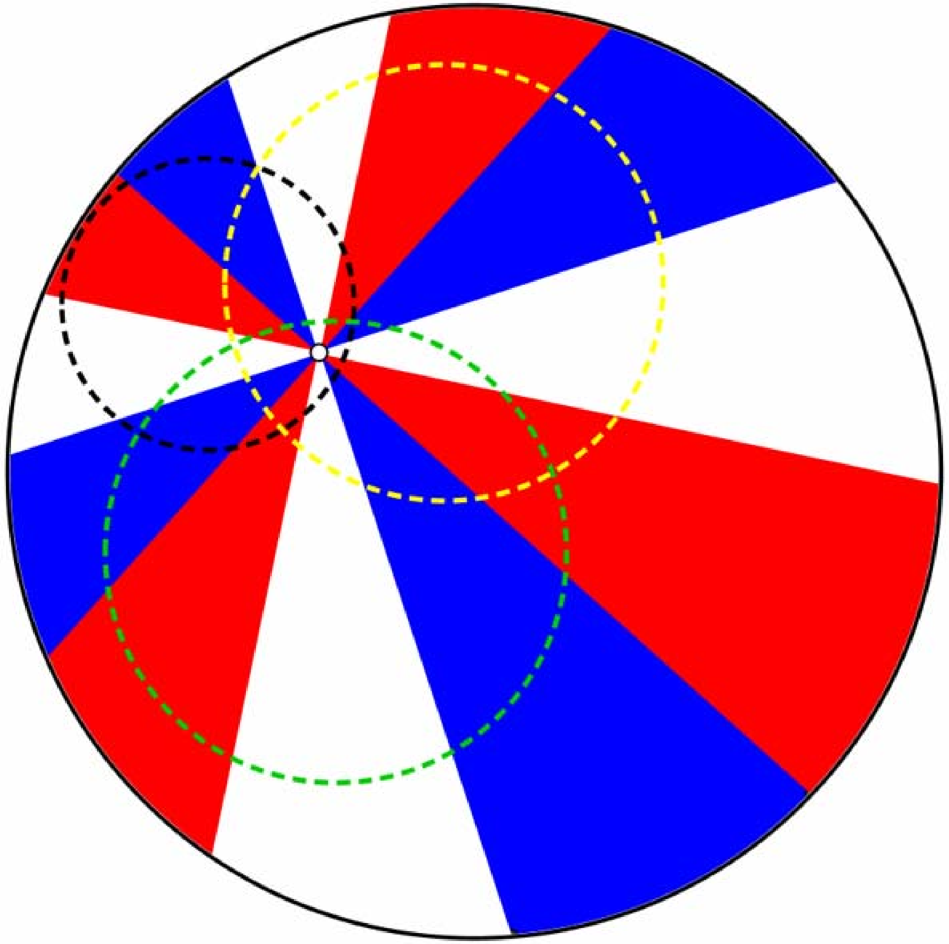
$$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{DC}^2 + \mathrm{CB}^2 + \mathrm{BA}^2 = 2.(2\mathrm{R})^2$$

surface bleue = **surface rouge**

Application?



F. SAMMARCELLI



Chaque couleur recouvre la même proportion (1/3)
de la surface et de la circonférence de chaque cercle.

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre

Monde visible *Perception des sens*		**Monde intelligible** *Perception intellectuelle*	
		Pensée	Esprit
illusion	concret	abstrait	spirituel
ombres	nature	géométrie	idées
Opinion		**Vérité**	

⟵ **GEOMETRIE** ⟶

« En outre, ils font usage de figures visibles, et sur ces figures, ils construisent des raisonnements sans avoir à l'esprit ces figures elles-mêmes, mais les figures parfaites dont celles-ci sont des images ».

(*La République*)

Processus de construction de la géométrie d'Euclide

Expérience	**-**	**Acquisition**
Intuition	**-**	**Induction**
Théorie	**-**	**Déduction**

Première tentative d'axiomatisation des mathématiques.
(système déductif)

Les démonstrations reposent sur trois éléments essentiels:

- **évidence des axiomes**
- **déduction logique**
- **contemplation des figures**

Démos grecques

Structure d'une démonstration :

- Enoncé (*protasis*)
- Exposition (*ekthesis*)
- Détermination (*diorismos*)
- Construction (*kaskateu*)
- Démonstration (*apodeixis*)
- Conclusion (*sumperasma*)

Mais ce que nous appelons ici savoir,
c'est connaître par le moyen de la démonstration.
Aristote

Depuis les grecs, qui dit mathématique dit démonstration.
Bourbaki, Théorie des ensemble, Eléments de Mathématiques

Moyen-âge-Renaissance Histoires de Maths

Gerbert d'Aurillac (v. 945, 1003)

« Savant Gerbert », pape Sylvestre II

- Notation positionnelle (Boèce, *Apices*)
- Solutions négatives

Chute de Constantinople 1453

Accès aux textes grecs originaux

Renaissance

Ecole Italienne: Cardan, Tartaglia, Bombelli, …

Résolution équation des 3$^{\text{ème}}$ et 4$^{\text{ème}}$ degrés

Première confrontation aux nombres complexes

Galilée (1564-1642)

1623: *Ecriture mathématique du livre de l'Univers.*

René Descartes (1596-1650)

1637: *Discours de la méthode* (« mort d'Aristote »)

Isaac Newton (1643-1727)

Calcul Infinitésimal

Gottfried W. Leibniz (1646-1716)

Leonhard Euler (1707-1783)

« C'est notre maître à tous. »
Laplace

- Théorie des nombres
- Notations (trigo, $f(x)$, e, Σ, i,…)
- Théorie des graphes (*ponts de Könisberg*)
- Calcul infinitésimal, variationnel

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

- Théorie des nombres (groupes)
- Calcul variationnel

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

- Théorème fondamental de l'Algèbre
- Encyclopédie

Gaspard Monge (1746-1718)

- Géométrie différentielle
- Géométrie descriptive

EXPLOSION

- Rigueur : Cauchy (limites, convergences,…)
- Les Mathématiques se professionnalisent
- Revues spécialisées (Gergonne, Liouville, Crelle, …)
- Demandes fortes avec l'industrialisation
- Réussites spectaculaires (Le Verrier – Uranus)
- Crise des fondements → XX^{ème} siècle

Développement de la Logique Mathématique

- **Georg Cantor** (1814-1918)
- **George Boole** (1815-1864)
- **Gottlob Frege** (1848-1925)

XIXème siècle Révolution géométrique

János Bólyai (1802-1860), meilleur sabreur de l'armée austro-hongroise, violoniste virtuose, prend le contre-pied de son père Farkas en cherchant les conséquences de la fausseté de l'axiome XI (*Postulatum = axiome des parallèles*).

Le 3 novembre 1823, il écrit à son père :

« *J'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui. [...] En attendant je ne puis ici dire autre chose que ceci :*

de rien,

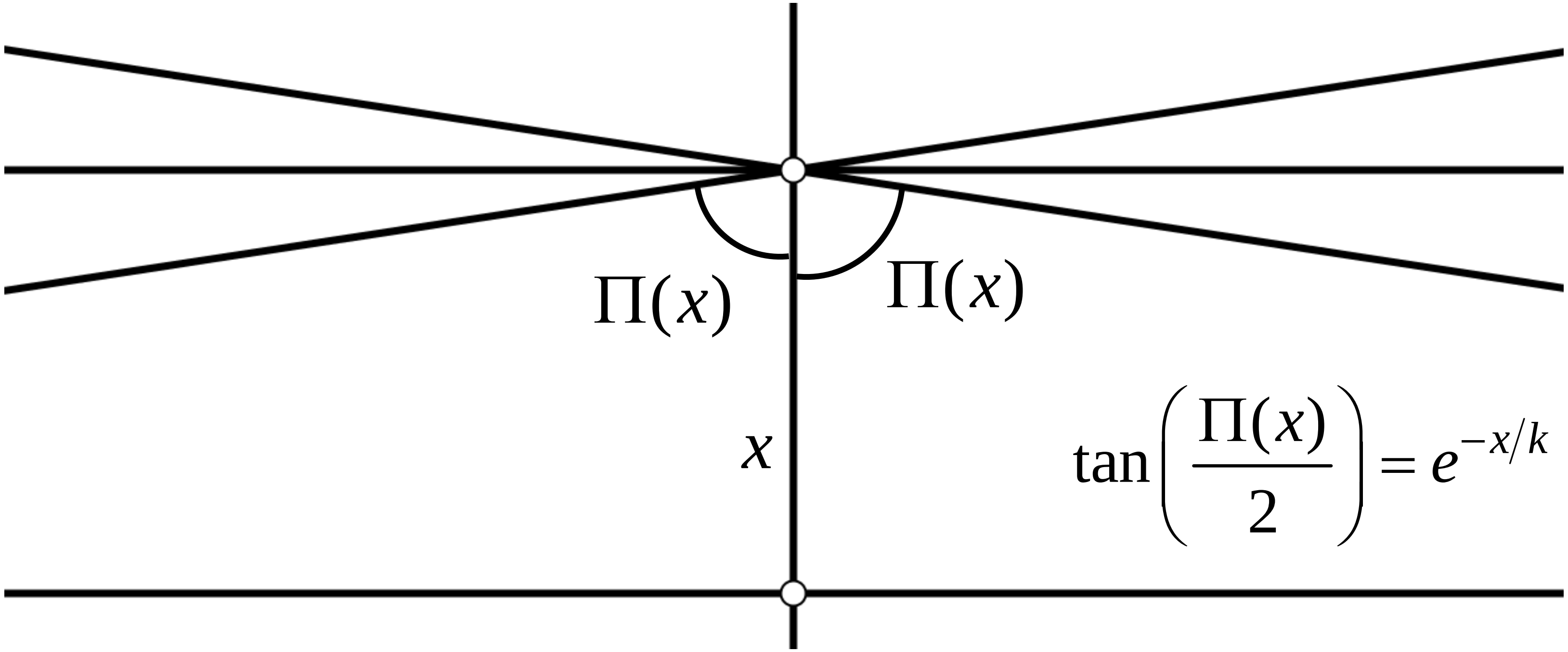
j'ai créé un nouveau monde.»

Semmiböl egy ujj más világot teremtettem

Création de la Géométrie Non Euclidienne (GNE)

Paternité partagée avec Nikolaï Lobatchevski (1792-1856) (1829)

XIX$^{\text{ème}}$ siècle — Révolution géométrique



$$\tan\left(\frac{\Pi(x)}{2}\right) = e^{-x/k}$$

Hypothèse de l'angle aigu $(k > 0)$ = Postulat 6 = **Bolyai-Lobatchevski**

Hypothèse de l'angle droit $(k = \infty)$ = Postulat 5 + Postulat 6 = **Euclide**

Hypothèse de l'angle obtus $(k < 0)$ = Postulat 5 = **Riemann**

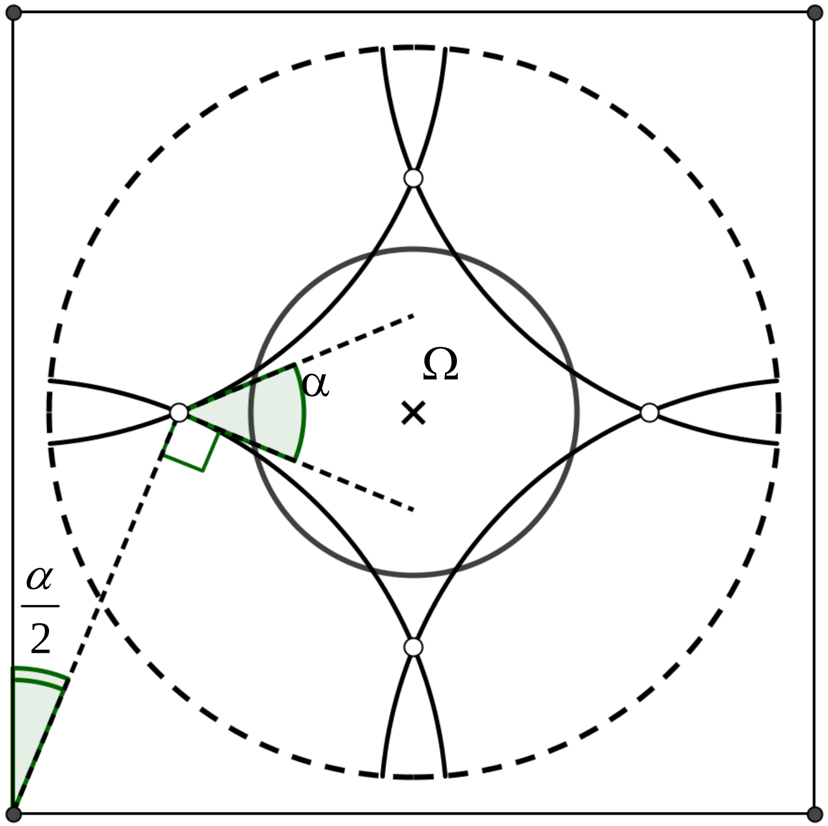
Surface d'un triangle: $\alpha + \beta + \gamma = \pi + K \cdot S$

Quadrature du cercle

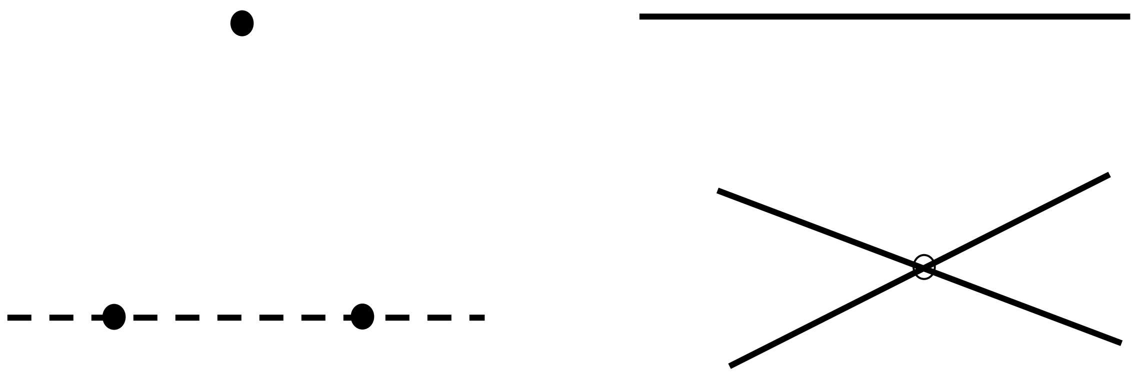
Résultat ignoré :

Si on construit une géométrie sans cet axiome (Postulatum)**,**

alors la quadrature du cercle est possible.



Poncelet, l'après Pappus XIXème siècle

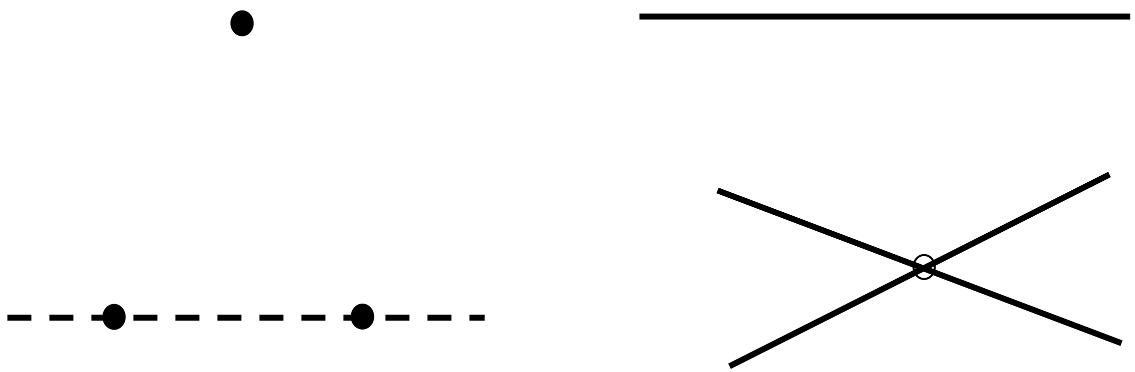


Dualité
Point - Droite

Jean-Victor Poncelet
(1788-1867)

Poncelet, l'après Pappus XIXème siècle

Dualité
Point - Droite



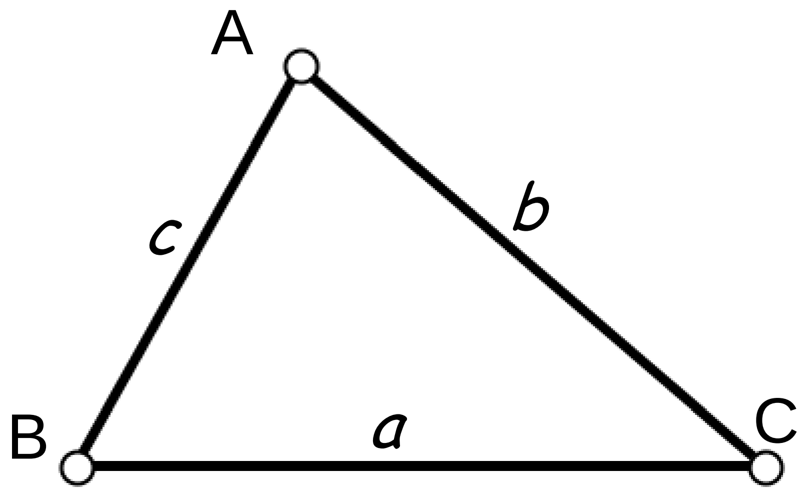
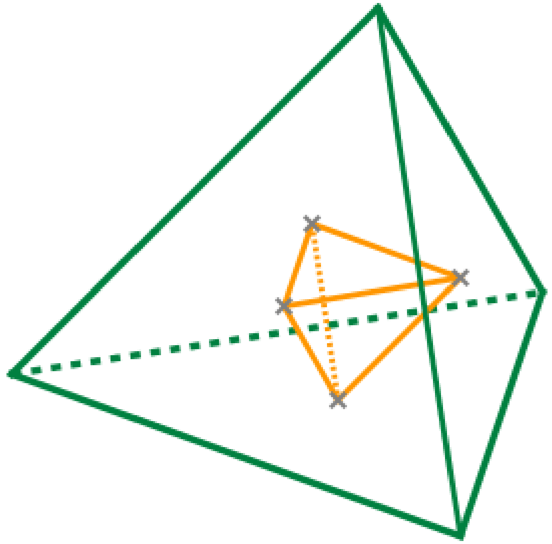


Figure auto-duale

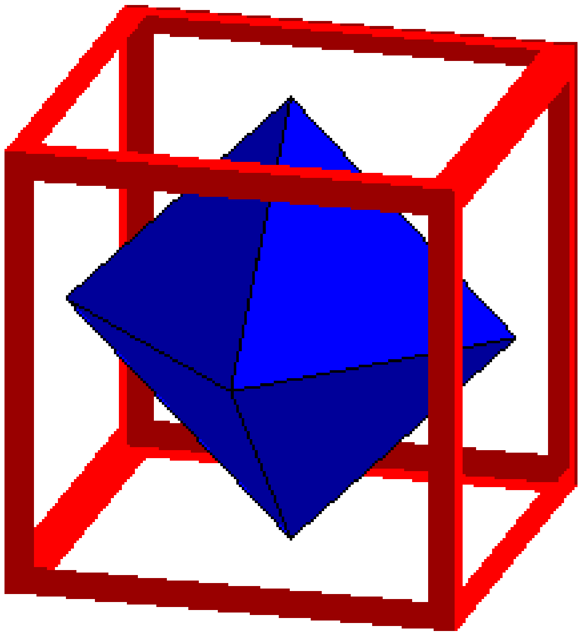
Formule d'Euler : **(F + S) – A = 2**

Auto-Dualité



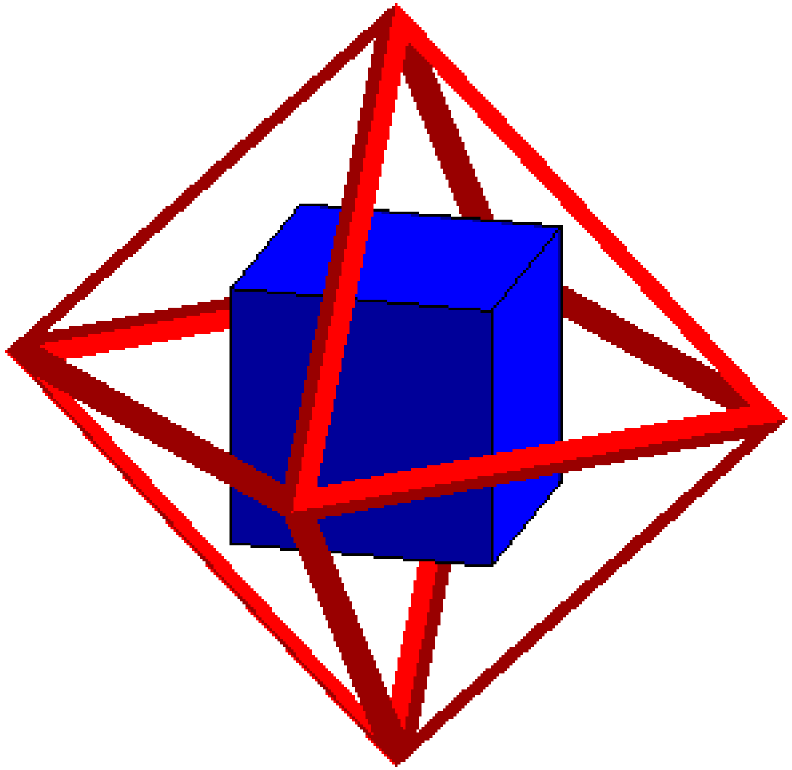
(3,3) *notation de Schläfli*

Cube



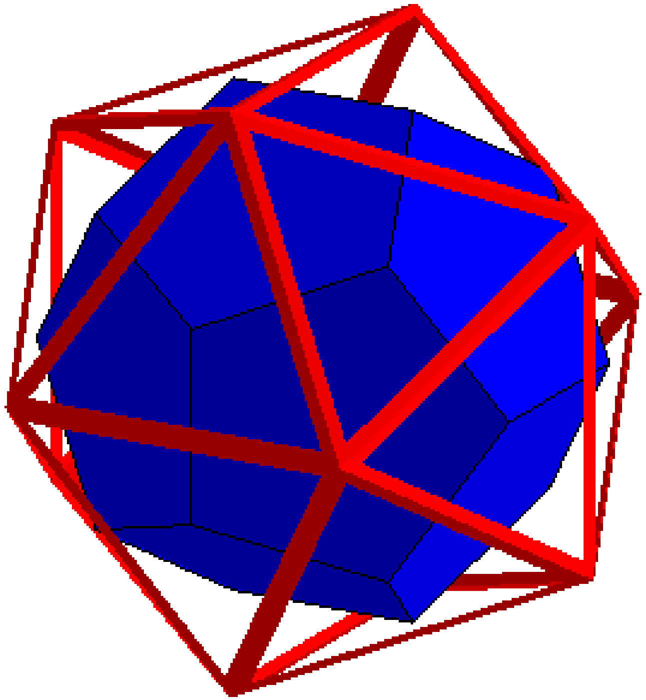
(4,3)

Octaèdre



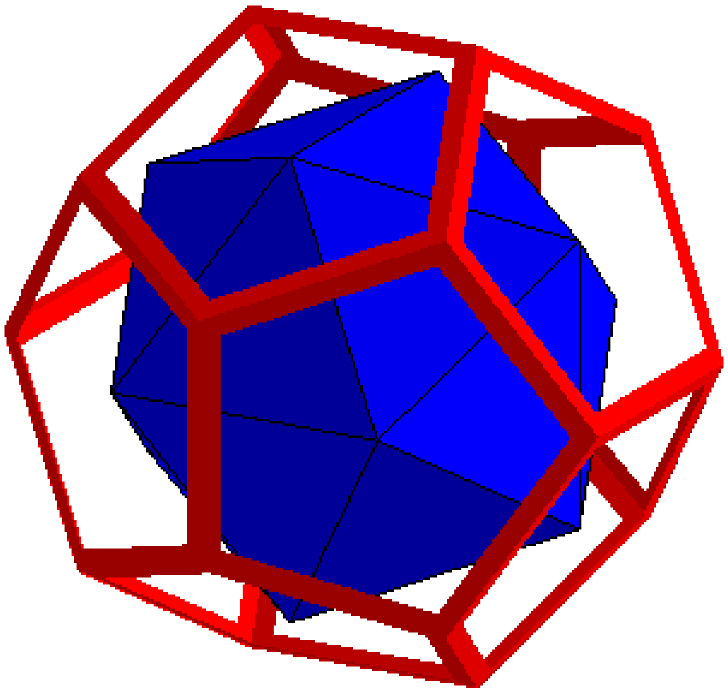
(3,4)

Icosaèdre

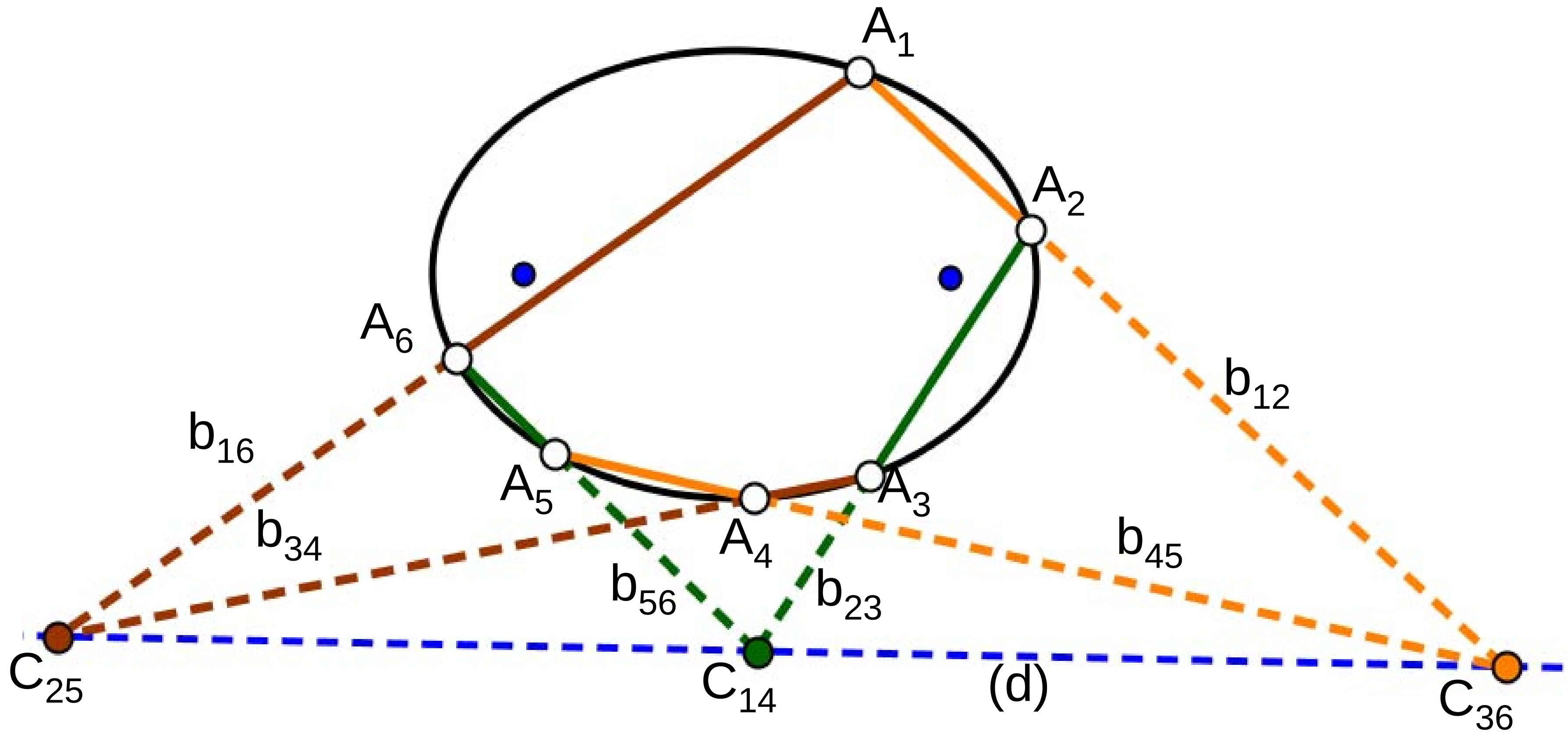


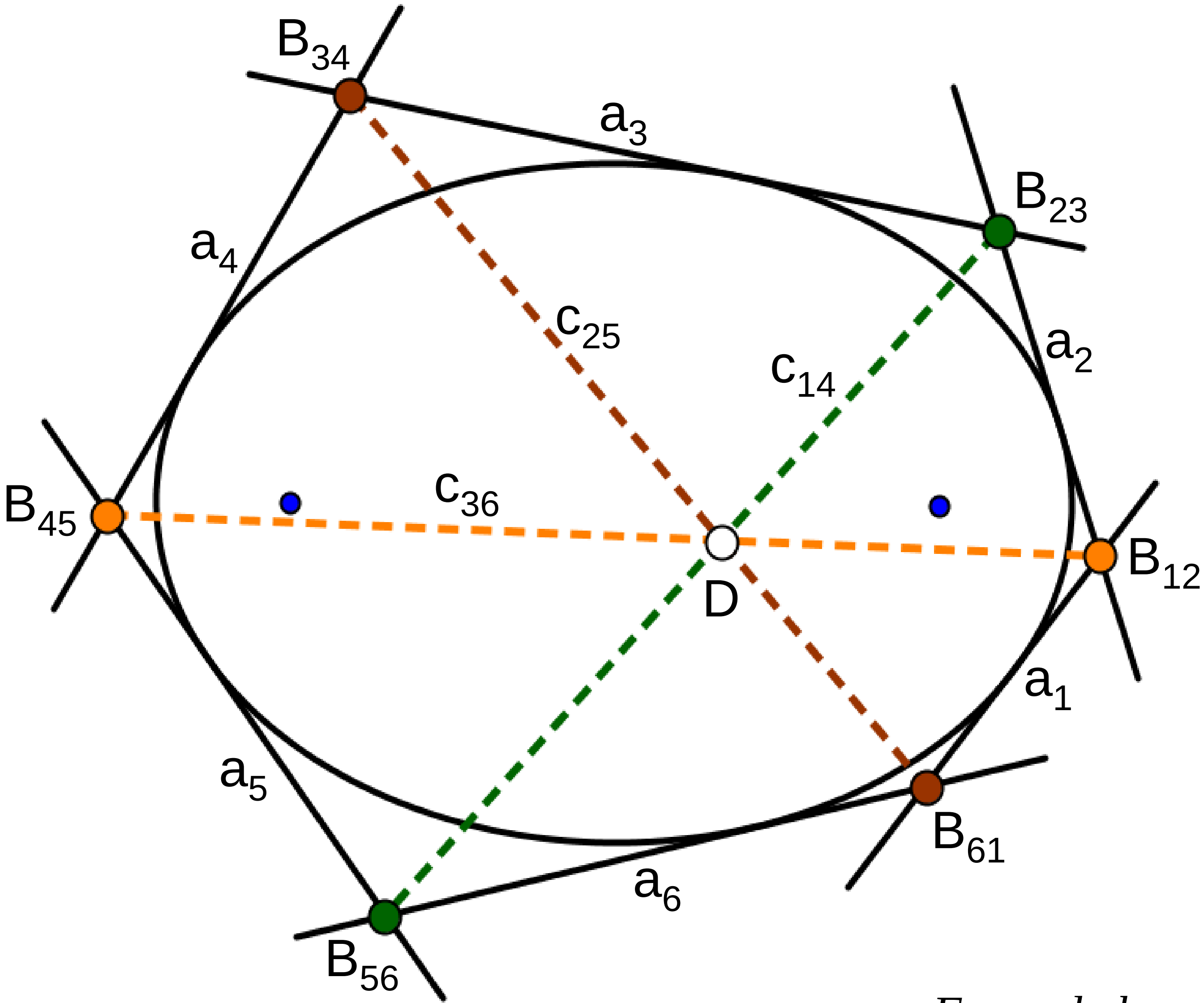
(5,3)

Dodécaèdre



(3,5)


A1
A2
A6
b12
b16
A5
A3
A4
b34
b45
b56
b23
C25
C14
(d)
C36



Force de la notation!

Félix Klein (1849-1925) : Programme d'Erlangen

Fin XIXème, succès total de la **théorie des invariants**. Elle permet, *en principe*, d'établir tous les invariants algébriques et leurs relations de façon automatique.

Invariant = correspondance algébrique d'un théorème de géométrie.

Inventaire exhaustif des invariants => fin de la théorie des invariants

=> fin de l'étude de la géométrie élémentaire!

« *Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants (...); victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie "élémentaire", qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire. (…) Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...* ».

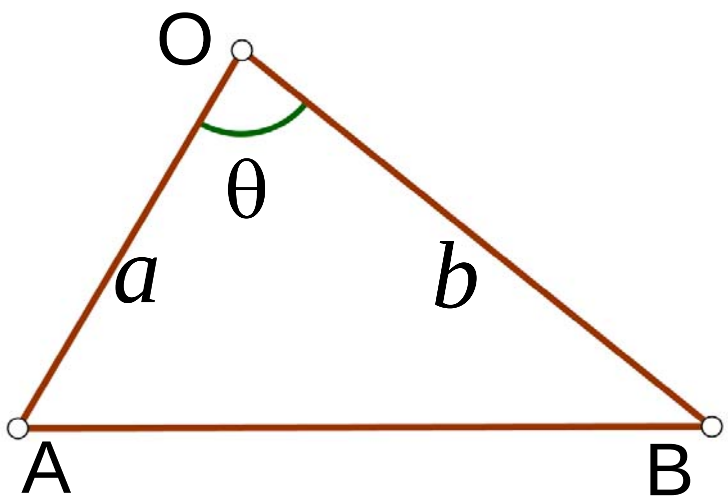
La géométrie élémentaire est une science morte,
à bannir des programmes!

La réforme des maths modernes s'en chargera.

Exemples d'utilisation et d'utilité des invariants :

$$(a\,|\,b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad a \wedge b = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$(a\,|\,b) = 0 \Rightarrow a \perp b \qquad a \wedge b = 0 \Rightarrow a \,//\, b$$



Invariants:
combinaisons polynomiales
des produits scalaires

$$(a\,|\,a) = \mathrm{a}^2 \qquad (b\,|\,b) = \mathrm{b}^2 \qquad (a\,|\,b) = \mathrm{ab}\cos(\theta)$$

Théorème de Pythagore

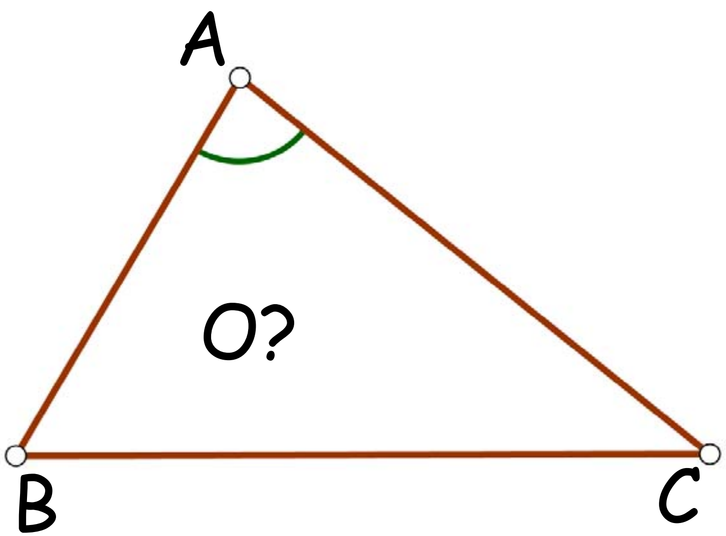
$$(a\,|\,b)^2 + (a \wedge b)^2 = (a\,|\,a)(b\,|\,b)$$

Tautologie : 0 = 0

$$(a\,|\,b-c)+(b\,|\,c-a)+(c\,|\,a-b)=0$$

$a=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $\quad b-c=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$(a\,|\,b-c)=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,|\,\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)=0 \quad \Leftrightarrow$ O appartient à la hauteur issue de A



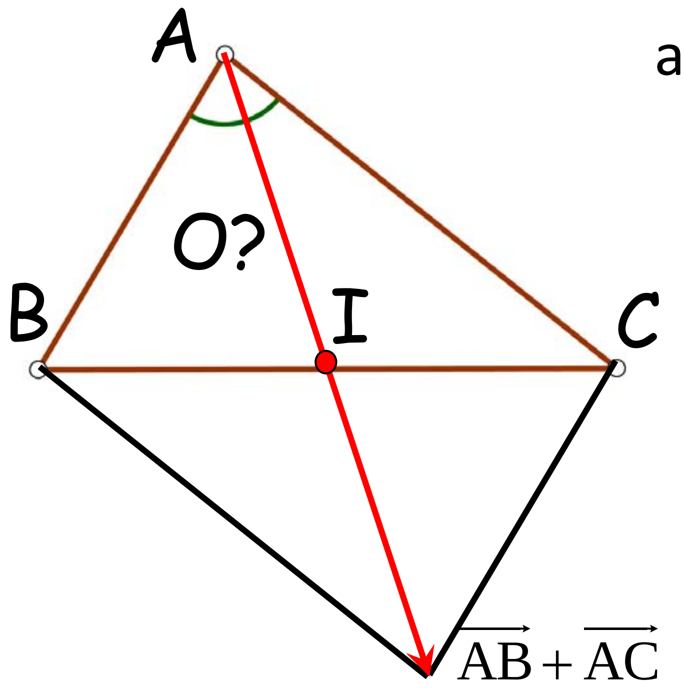
O
point d'intersection de deux hauteurs,
annule deux termes,
donc le troisième :

les hauteurs sont concourantes.

Tautologie : $\left(a \wedge b + b \wedge a = 0\right) \Longrightarrow a \wedge \left(b+c\right) + b \wedge \left(c+a\right) + c \wedge \left(a+b\right) = 0$

Une origine O telle que : $a \wedge \left(b+c\right) = a \wedge \left(b+c-2a\right) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0$

appartient à la médiane issue de A.

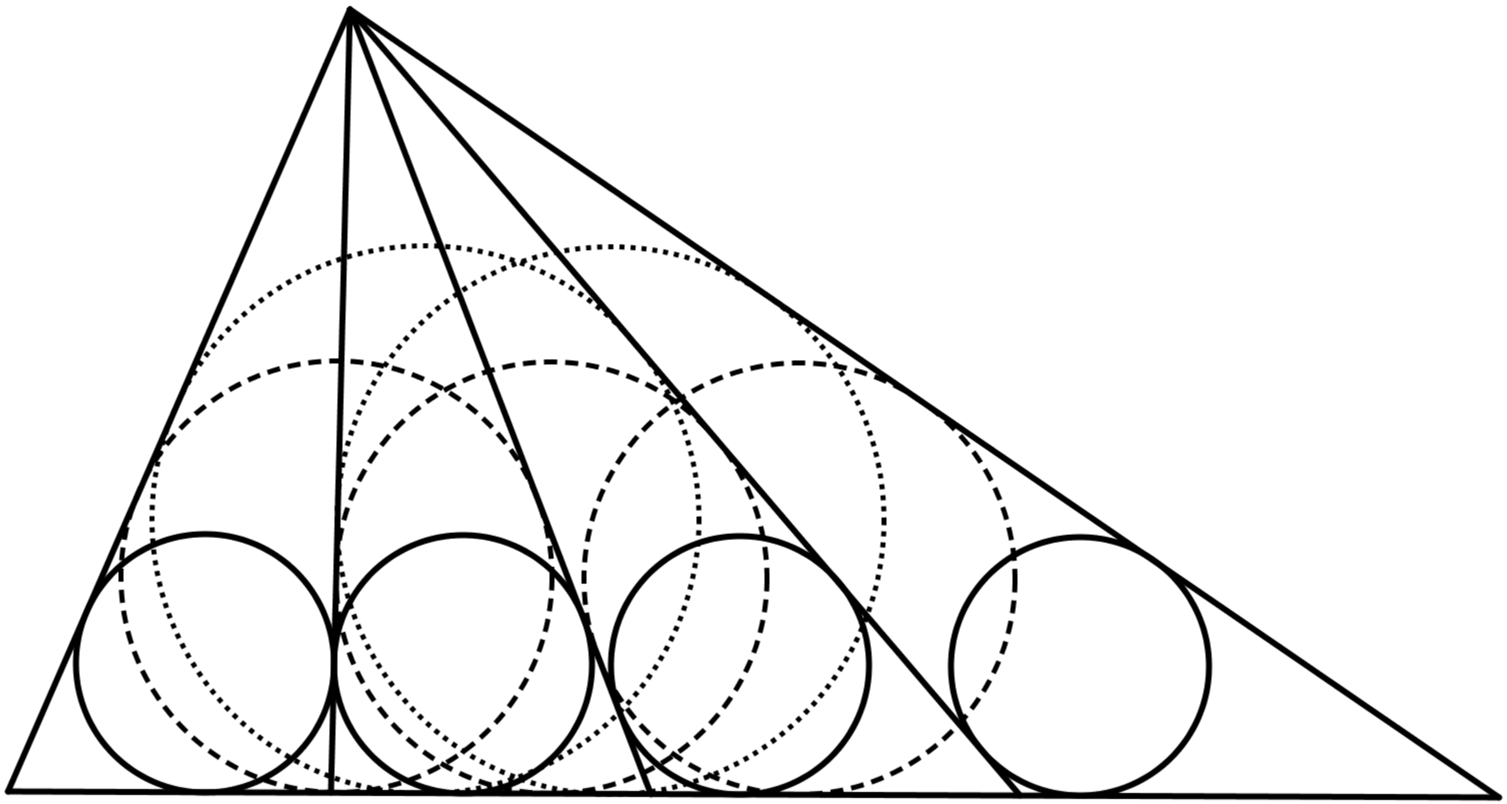


Si O est point d'intersection de deux médianes,
il annule deux termes,
donc le troisième :

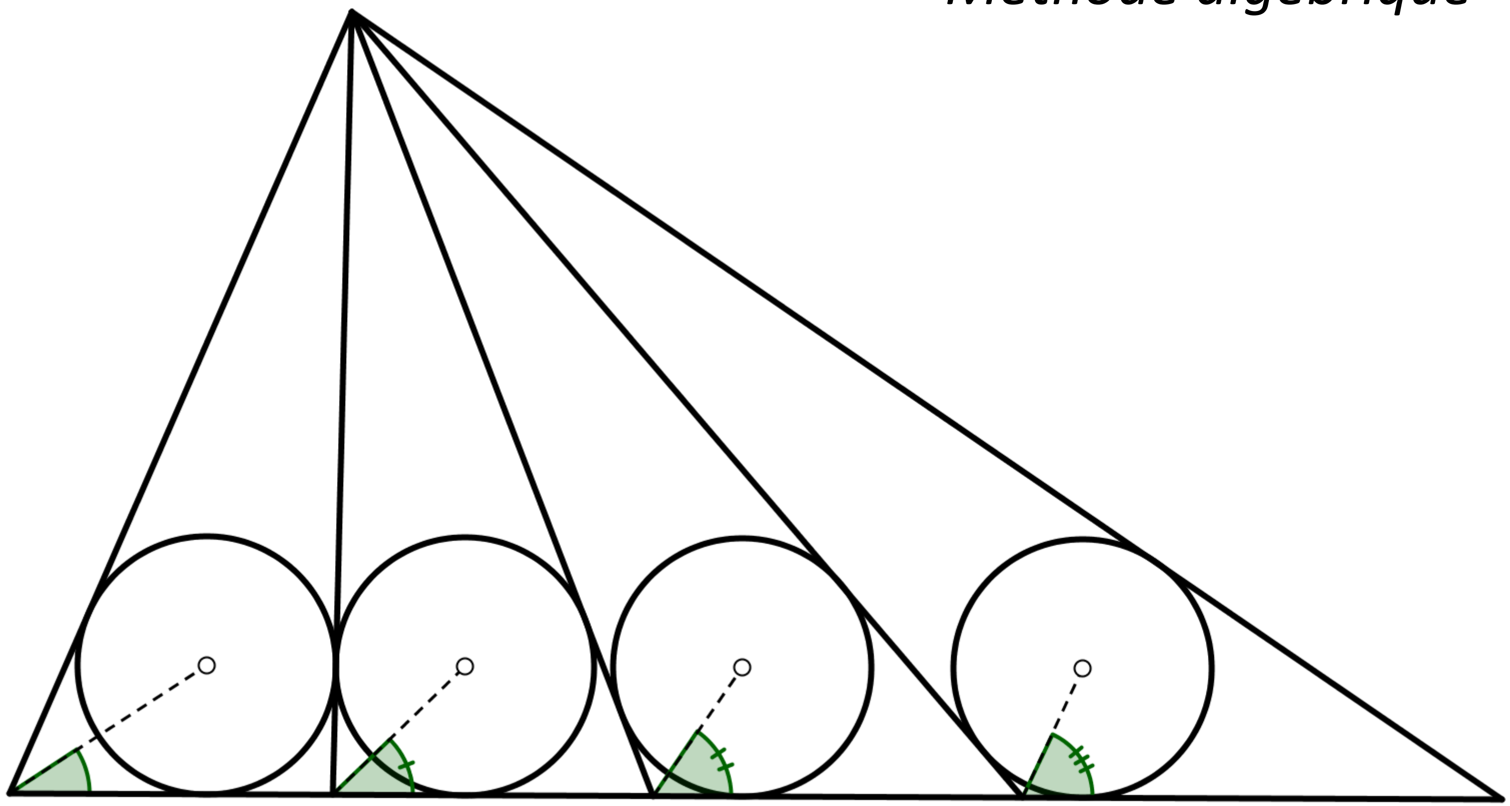
les médianes sont concourantes.

« La beauté est le premier test : il n’y a pas de place dans le monde pour des mathématiques laides. » G. Hardy

Débats-paroles sur les paraboles dans le bar à Paul

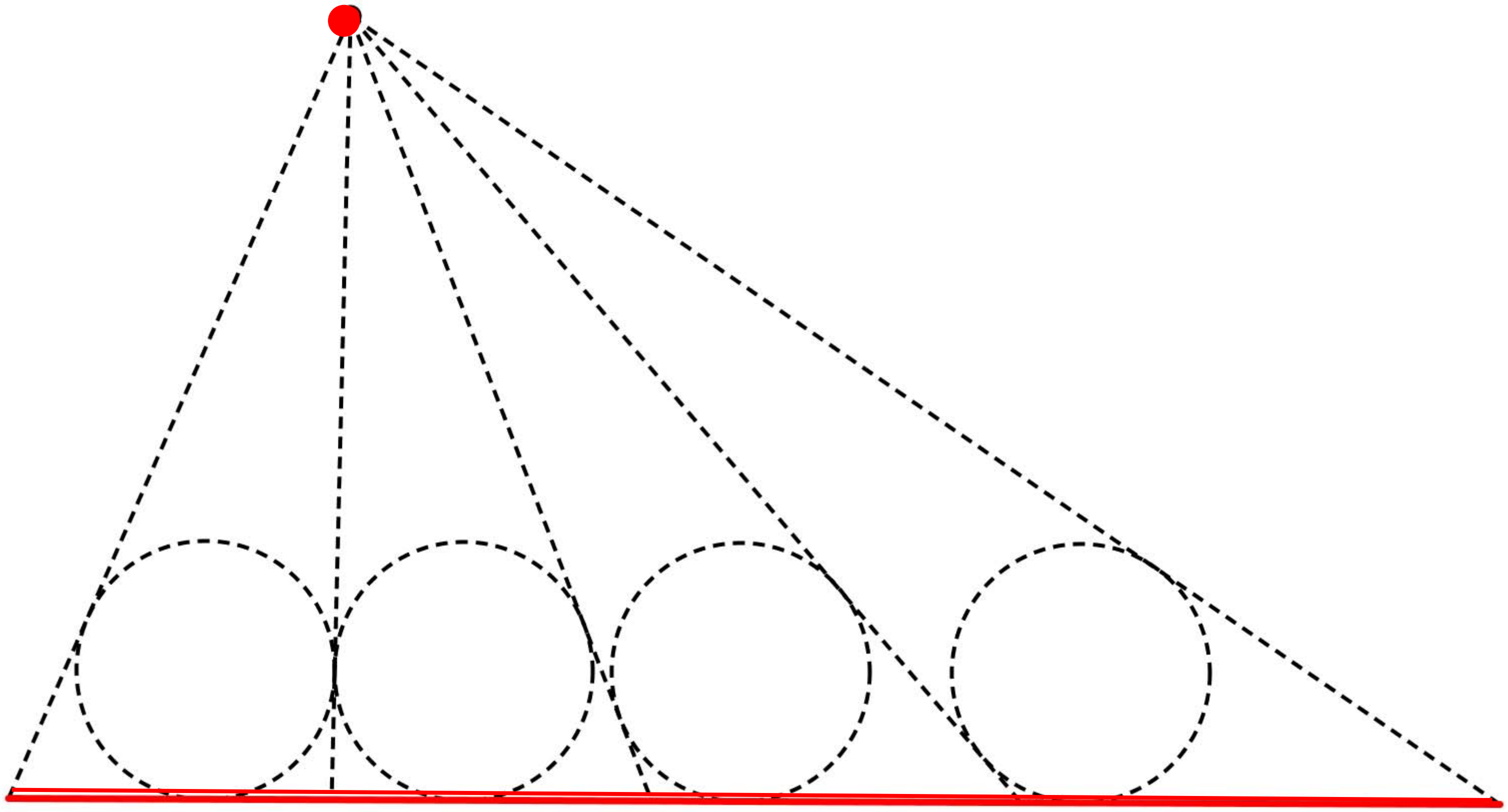


Méthode algébrique



Les tangentes sont en progression géométrique

$$T_n = q \cdot T_{n-1} = q^{n-1} \cdot T_1 \qquad T_{2n+1} = q^2 \cdot T_{2n-1} = q^{2n} \cdot T_1$$

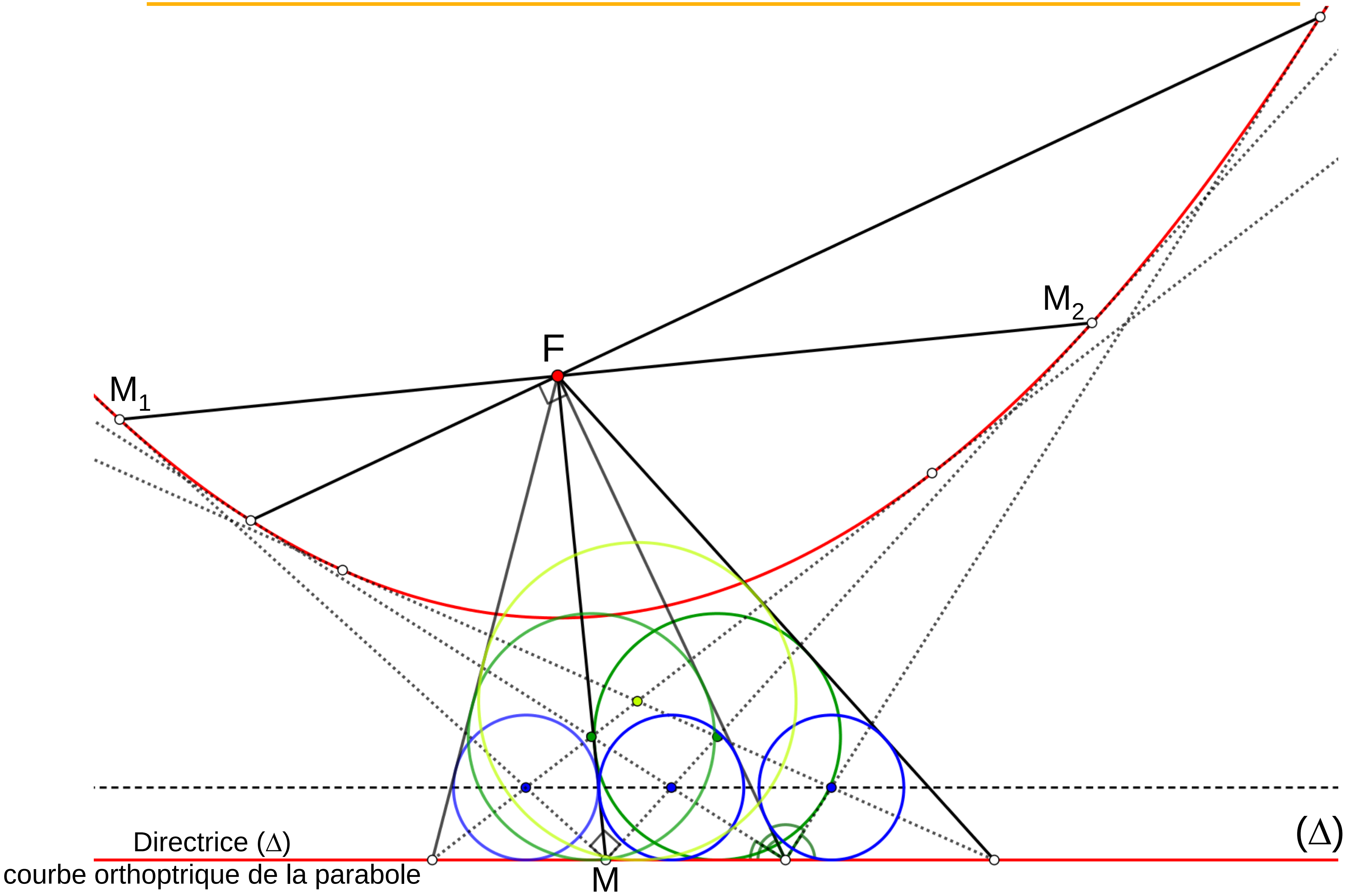


Aller à l'essentiel

foyer

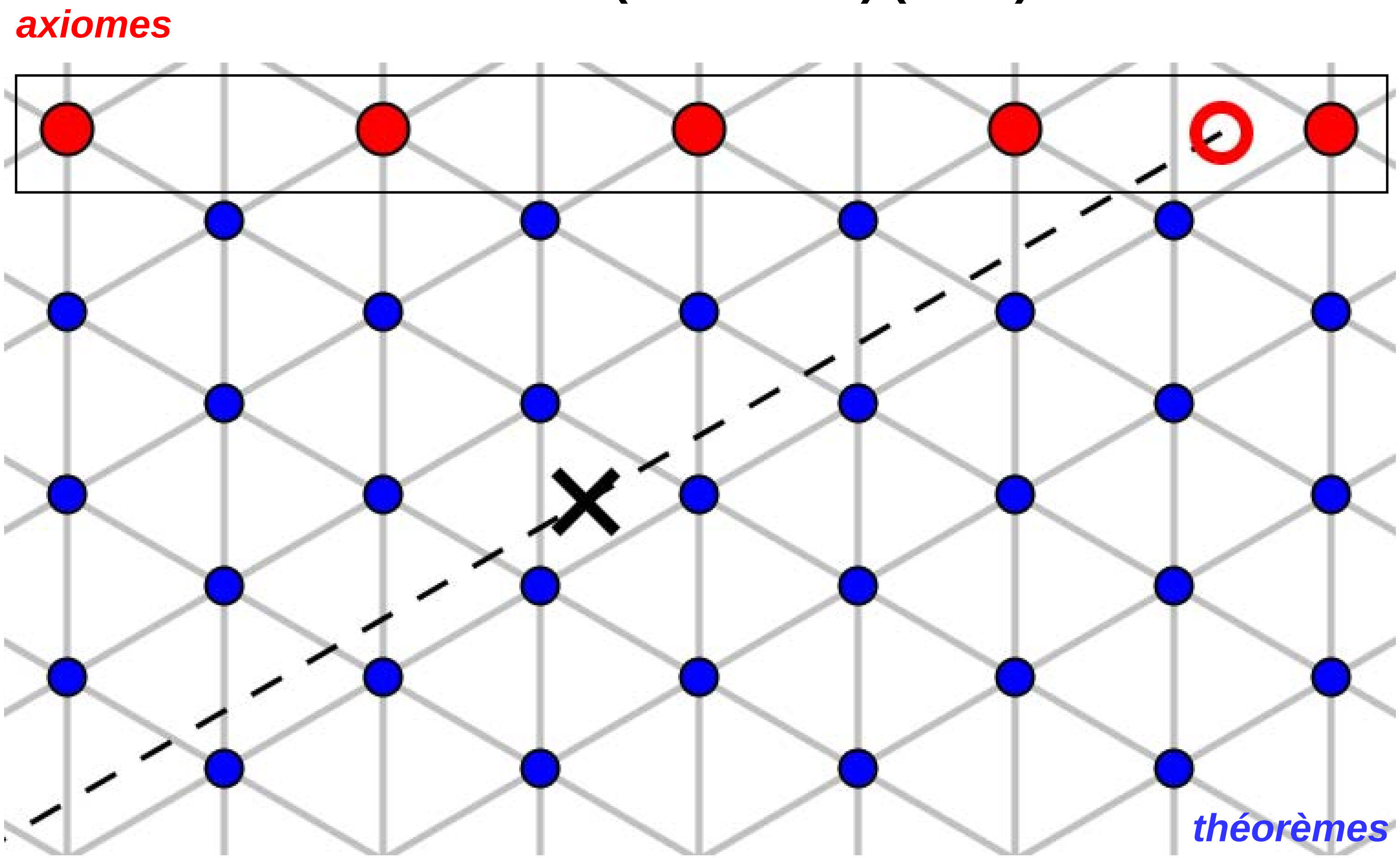
1 point + 1 droite = 1 parabole

directrice


M
M$_1$
M$_2$
F
(Δ)
Directrice (Δ)
courbe orthoptrique de la parabole

Concept de vérité relève de l'histoire de la philosophie et non de celle des mathématiques.

Kurt Gödel (1906-1978) (1931)



Véritable ≠ Démontrable

« Les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. »

Carl Friedrich Gauss.