http://kafemath.fr

PYTHAGORE & SON THEOREME

Hervé Stève

Ingénieur mathématicien, co-fondateur du Kafemath

herve.steve@hotmail.fr

Terrasses Éphémères 24/08/2021à 21h

Palais de la Porte Dorée

293 avenue Daumesnil, 75012 Paris

Bienvenue sur le site de Kafemath !

Le Kafemath est un essai de café mathématique.
Un café mathématique est aux mathématiques ce que le "café-philo" est à la philosophie !

Annéees précédentes

- 2020-2021
- 2019-2020
- 2018-2019
- 2017-2018
- 2016-2017
- 2015-2016
- 2014-2015
- 2013-2014
- 2012-2013
- 2011-2012
- 2010-2011
- 2009-2010
- 2008-2009
- 2007-2008
- 2006-2007
- 2005-2006
- 2004-2005

Les mathématiques sont un élément fondamental de la culture. Mais elles sont souvent trop isolées dans des lieux réservés aux spécialistes !

En veillant à rester ouvert à tous, au Kafemath, on parle de maths, on en découvre l'histoire, on en fait un peu, on en débat, on en apprend si on veut. On y rit et surtout, surtout, on y prend plaisir ! Ensemble.

Et il suffit d'être passionné pour devenir co-animateur !

Sites à visiter

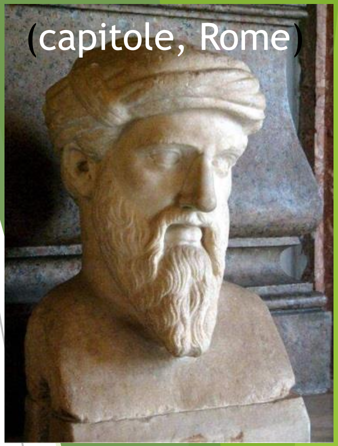
Catalogue
(mai 2019)



Introduction

- Pythagore de Samos
- Triangles rectangles
- Histoire du théorème
- Cas du carré
- Preuves du théorème de Pythagore

Pythagore de Samos



Pythagore est :
« celui qui a été annoncé par la Pythie »
né vers -580 A.J.C à Samos (Ile Grecque),
mort vers -495 A.J.C.

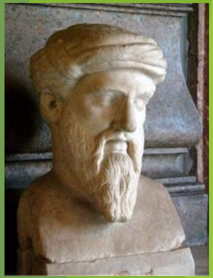
Vie énigmatique, pas d'écrits de son vivant

Philosophe, mathématicien

grand maître universel (d'après Hegel)

Fondateur de l'école pythagoricienne de Crotone (Italie du Sud)
$\Rightarrow$ rivalités moralistes (acousmaticiens) / scientifiques (mathématiciens)

Pythagore de Samos



- **Arithmologie** : « tout est nombre » , structuration du monde, harmonie
- **Musique** : le son est mathématique, gamme de Pythagore à 6 tons

  12 quintes proche de 7 octaves $(3/2)^{12} \sim 2^7$
- **Géométrie** : « toute longueur est commensurable à l'unité », preuves partielles du théorème de Pythagore
- **Le cosmos** : ordre du ciel, la Terre est ronde (en observant Vénus)
- **L'âme = vie** : transmigration de l'âme immortelle, le corps est la prison de l'âme
- **Végétarism**e : héritage hindoue (exclusion de la chair animale)
- **Médecine** : harmonie des contraires dans le corps pour être en bonne santé
- **Fondateur de la science politique** : pouvoir aux savants, action par la guerre
- **Principes** : « Il est interdit de prier pour soi-même »

  « entre amis, tout est commun »

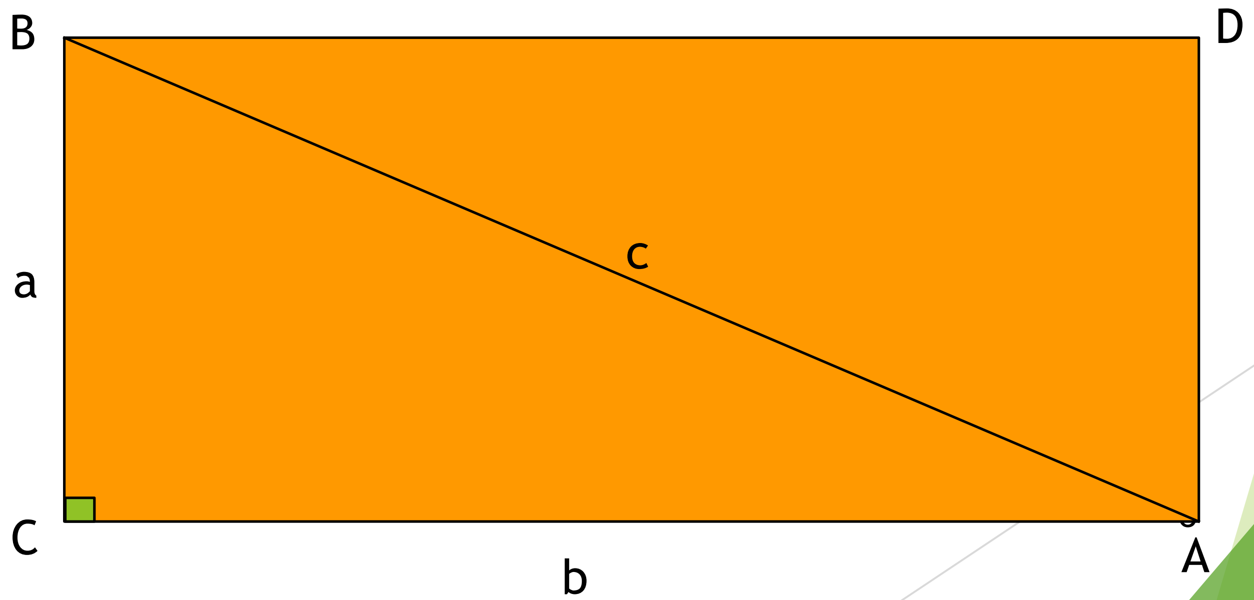
  « tout ne peut pas être dit à tout le monde »

Triangles rectangles

Définition : un triangle (A,B,C) rectangle en C est un triangle possédant un angle droit au sommet C. Le côté le plus long (A,B) est appelé l'*hypoténuse*.
(A,B) est aussi une diagonale du rectangle (C,A,D,B) (voir figure ci-dessous)

Théorème de Pythagore : pour ce triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse (A,B) est égale à la sommes des carrés 2 autres côtes (A,C) et (B,C), autrement dit la relation de Pythagore :

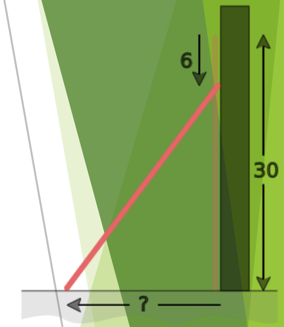
$AB^2 = BC^2 + AC^2$ ou bien $c^2 = a^2 + b^2$



Histoire

- **Mésopotamie** :

- Tablette Plimton 322 (vers -1800 AJC) donnent une liste de <u>triplets pythagoriciens</u> : entiers tels que $a^2 + b^2 = c^2$ comme 3-4-5



- Tablette d'argile BM 85196 (même époque) pose le problème de la perche de 30 unités qui glisse de 6 unités le long d'un mur vertical. ? vaut 18 unités : $18^2 = 30^2 - (30\text{-}6)^2$ (triplet 3-4-5)

- **Inde** :

- Śulba-Sūtras (annexe des Vedas) ou règles du cordeau pour construire des autels pour des sacrifices védiques (entre -800 et -400 AJC)

  «*La diagonale du carré produit le double de l'aire.*»

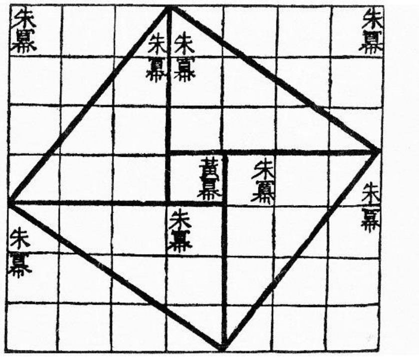
  (Baudhāyana - 1.9)

  «*Les aires produites respectivement par la longueur et la largeur d'un rectangle donnent ensemble l'aire produite par la diagonale.*» (Baudhāyana - 1.12)

Histoire

- **Chine** :

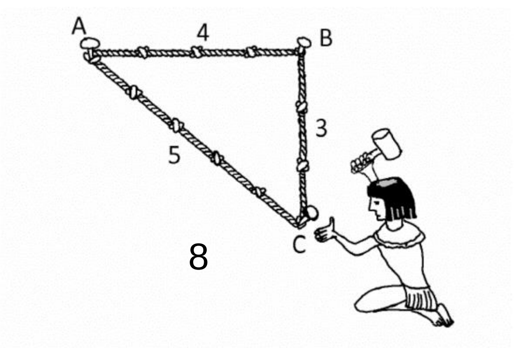
➢ Zhoubi suanjing ouvrage dynastie des Han (vers -210 AJC) relatant des calculs dynastie des Zhou (-1046 à -771 AJC)



Théorème Gouju (base –altitude) :
« *En réunissant l'aire (mi) de la base (gou) et l'aire de la hauteur (gu), on engendre l'aire de l'hypoténuse.* »
(voir plus loin pour la preuve)

- **Egypte ancienne** :

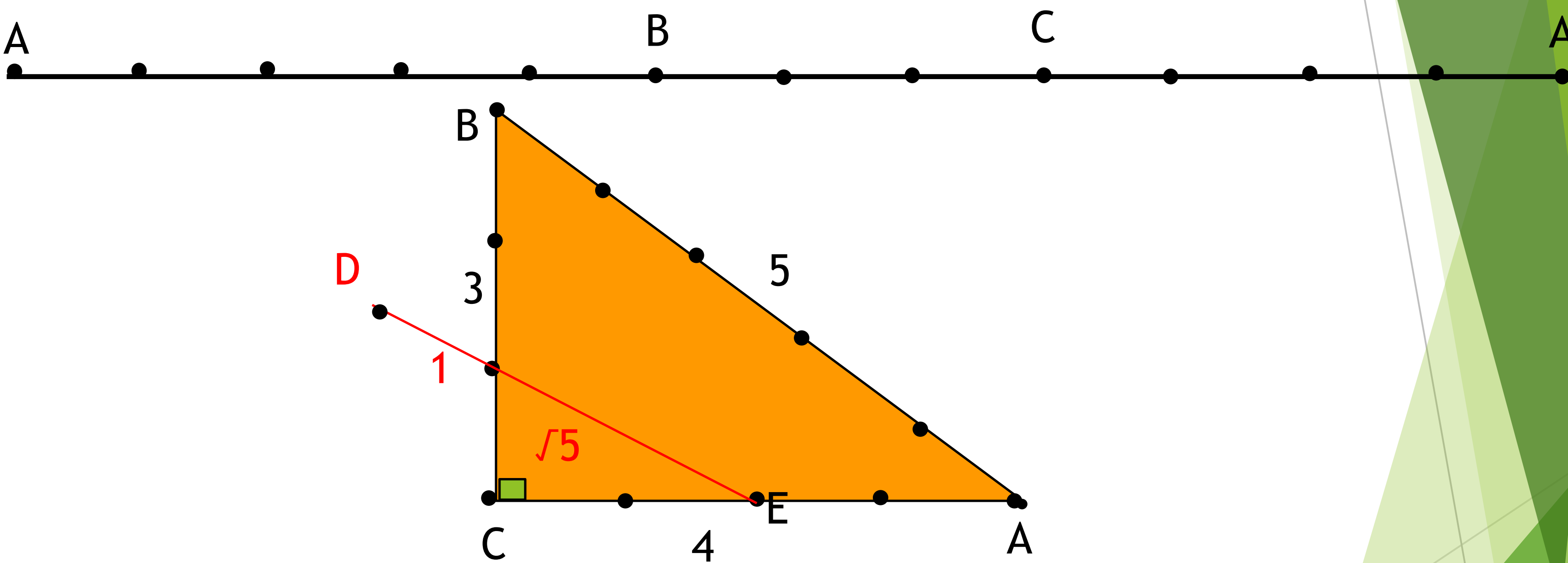
➢ Pas de trace de texte par rapport au théorème de Pythagore
➢ Pas de trace sur les triplets pythagoriciens sur le papyrus de Rhind (vers -1800 AJC)
➢ Mais la corde à 13 nœuds connue vers -2000 AJC



La corde à 13 nœuds

Château de Guédelon

- Utile pour **constructions des bâtiments** (moyen-âge) : tailles des pierres 80cm x 60cm x 1m que l'on ramène à un triangle semblable rectangle 4 x 3 x 5, de longueur = 12 = 5 + 4 + 3 = périmètre du triangle rectangle (A,B,C)
- On a aussi la **relation de Pythagore** $5^2 = 4^2 + 3^2$



- (3,4,5) est le **plus petit triplet pythagoricien primitif** (nombres premiers 2 à 2)

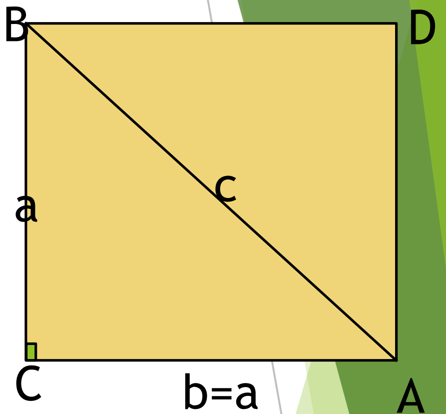
Connu avant Pythagore par les babyloniens (voir tablettes) avec d'autres triplets (en nombre infini)

- Construction du **nombre d'Or** : $\Phi = \frac{1}{2}\ (1+\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$ DE

Le carré

- **Cas particulier du rectangle** : dans un carré les 4 côtés sont égaux :
  CA = AD = DB = BC = a

- **Connaissant le côté a, que vaut alors la diagonale c = (A,B)** ?



Pythagore dit que $c^2 = a^2 + a^2 = 2\ a^2$.
Pour a=1, on a $c^2 = 2$
Remarquons que $1 < c^2 \leq 2$ d'où $1 < c < 2$

> Puis que $1{,}96 < c^2 < 2{,}25$ d'où $1{,}4 < c < 1{,}5$
> Puis que $1{,}9881 < c^2 < 2{,}0164$ d'où $1{,}41 < c < 1{,}42$
> Puis que $1{,}999396 < c^2 < 2{,}002225$ d'où $1{,}414 < c < 1{,}415$
> Etc …

On dit que c est la racine carré de 2, elle est notée $c=\sqrt{2}$ et n'est pas un entier

- **c est-il un rationnel** ? est-il le rapport de 2 entiers p,q ? c=p/q ?

NON, preuve par l'absurde : supposons c=p/q irréductible

$c^2=p^2/q^2=2 \Rightarrow p^2=2q^2 \Rightarrow$ p pair = 2r $\Rightarrow 4r^2=2q^2 \Rightarrow 2r^2=q^2 \Rightarrow$ p et q pairs impossible

Pour Pythagore, c ne pouvait pas être un nombre car il est *incommensurable* c'est-à-dire qu'il ne se mesure pas avec son côté a.
Aujourd'hui, c est un **nombre irrationnel**

Trigonométrie

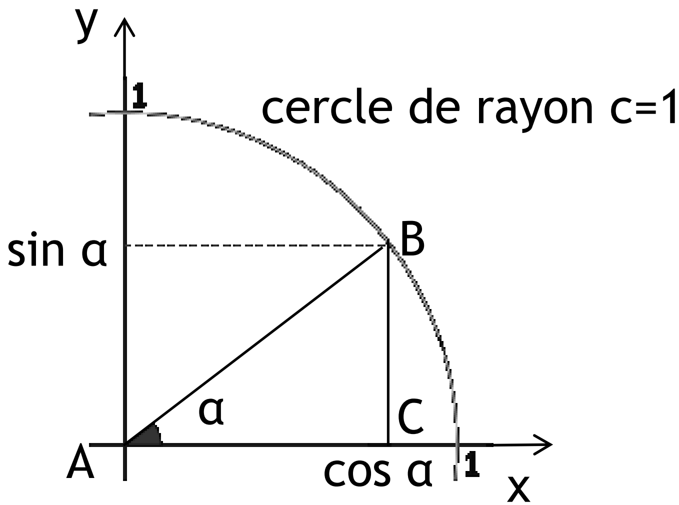
- **Triangle rectangle** (A,B,C) avec l'hypoténuse AB=c=1 :
  AC=b/c=cos α abscisse (cos est le cosinus de l'angle α en radian)

et BC=a/c=sin α ordonnée (sin est sinus de α)

d'après la **relation de Pythagore** : $a^2 + b^2 = c^2 = 1$

Donne la relation : $\boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1}$

Et $\tan \alpha = \sin \alpha \;/ \cos \alpha \; = a \,/\, b = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ (tan est la tangente de α)

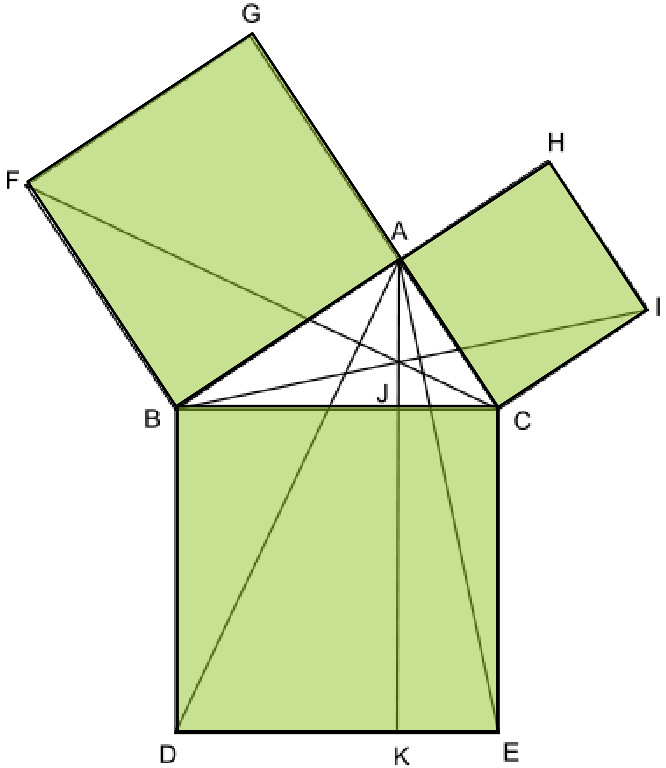


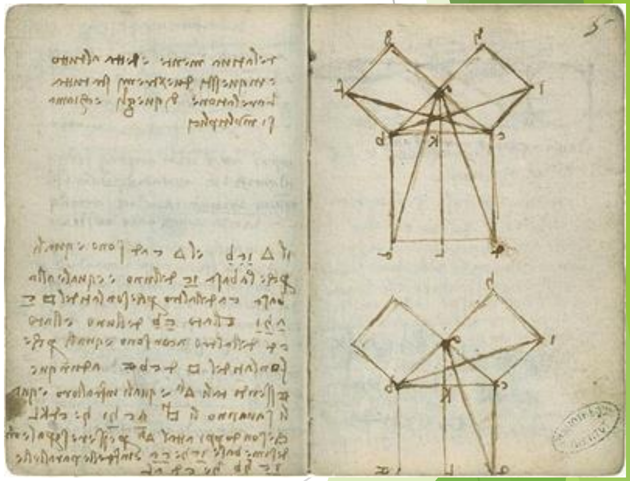
Équation du cercle
$x^2 + y^2 = 1$

Preuve d'Euclide

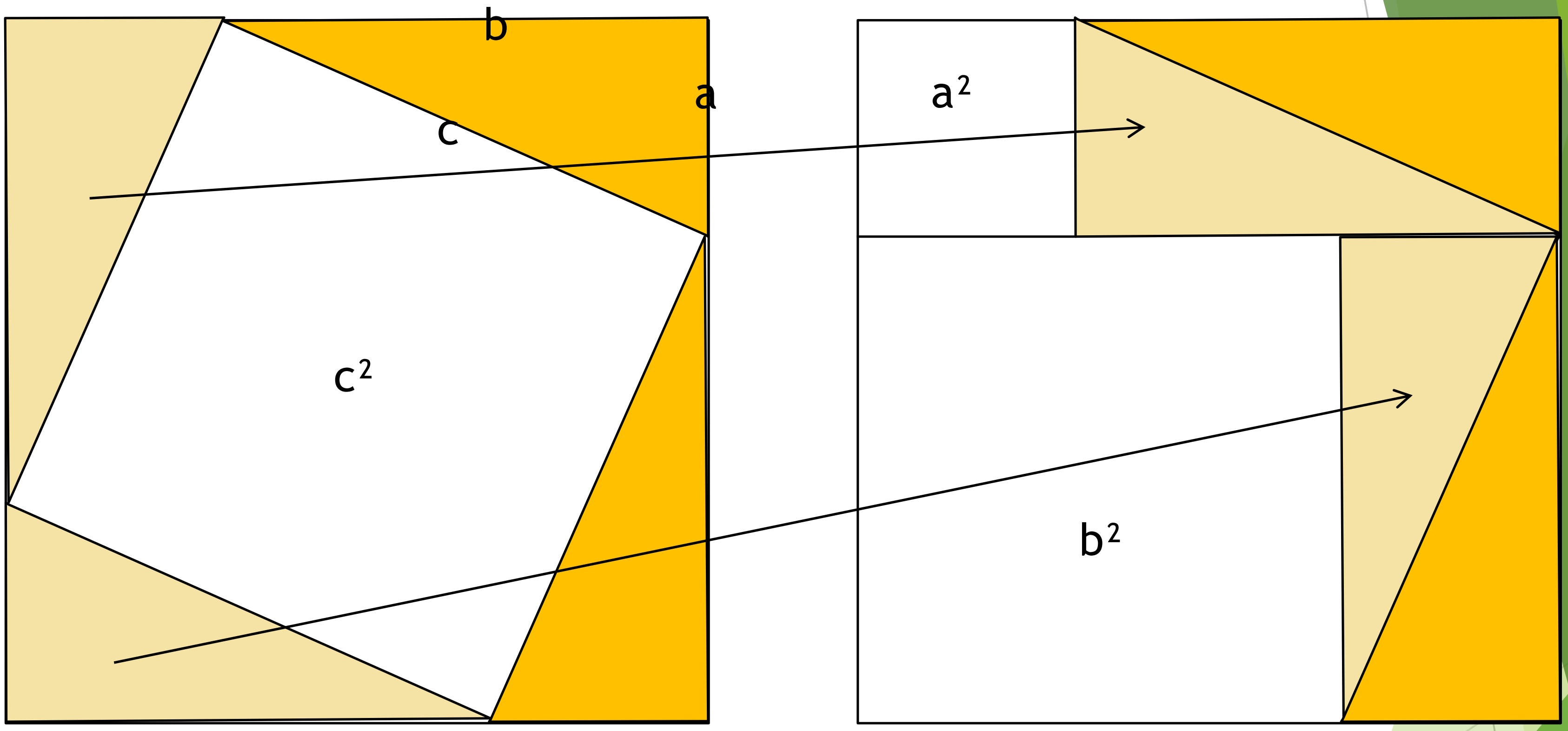
- La plus ancienne preuve (assez complexe) connue écrite :
  Euclide dans les Éléments livre I (vers 300 A.J.C.)

- **proposition 47** : « *Aux triangles rectangles, le carré du côté qui soutient l'angle droit, est égal aux carrés des deux autres côtés*. »
- **Proposition 48 réciproque de 47** : « *Si le carré de l'un des côtés d'un triangle est égal aux carrés des deux autres côtés, l'angle soutenu par ces côtés est droit.* »





Par soustraction d'aire



On a $(a+b)^2=c^2+4(ab)/2$

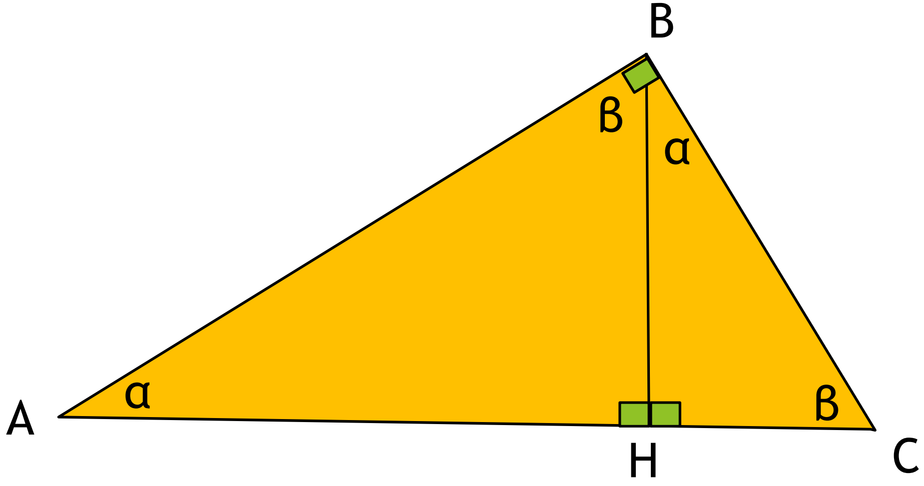
on a $(a+b)^2=a^2+b^2+4(ab)/2$

Donc $c^2 + \cancel{4(ab)/2} = a^2 + b^2 + \cancel{4(ab)/2}$

CQFD

Par triangles semblables

(A,B,C) rectangle en B semblable (A,B,H) et (B,C,H) rectangles en H
Car partage des mêmes angles α, β, 90° avec α + β + 90° = 180°



En α on a AB / AC = AH / AB => $AB^2 = AC \times AH$

En β on a BC / AC = HC / BC => $BC^2 = AC \times HC$

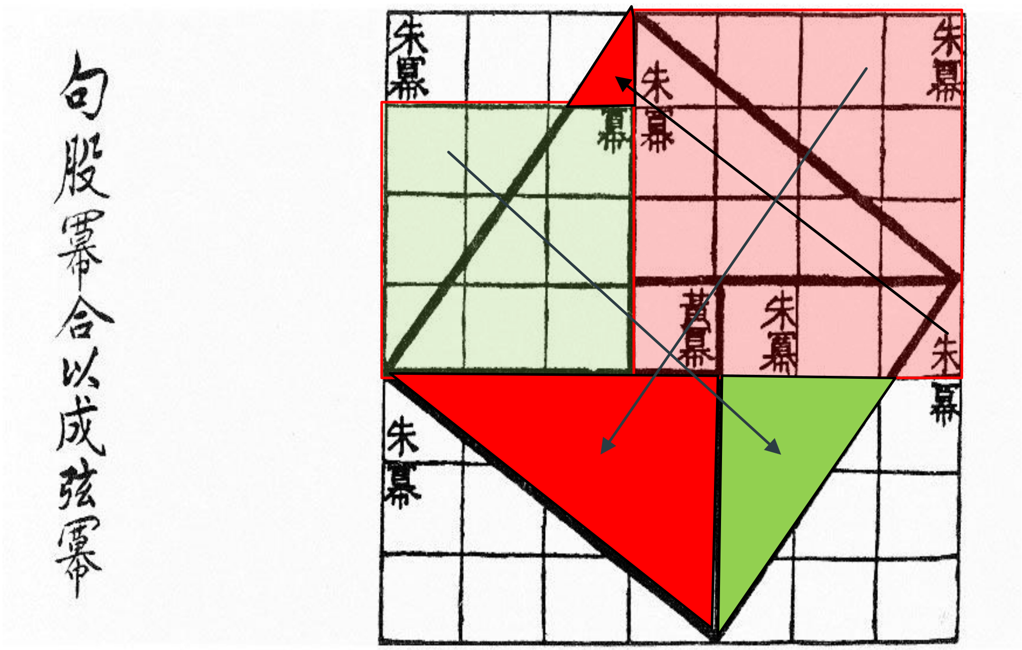
Par sommation, on obtient :
$AB^2 + BC^2 = AC \times AH + AC \times HC = AC \times (AH + HC) = AC \times AC = AC^2$

CQFD

Puzzle du gouzou

- **gougu**=base hauteur par Lui Hui en +300 (Chine)

Preuve visuelle (en couleur)



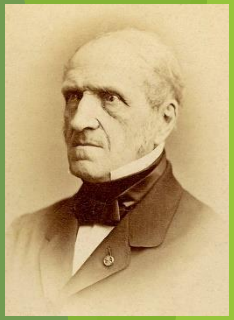
$5^2=4^2+3^2$

a=3, b=4, c=5

$c^2=4(ab)/2+(b-a)^2=a^2+b^2$

CQFD

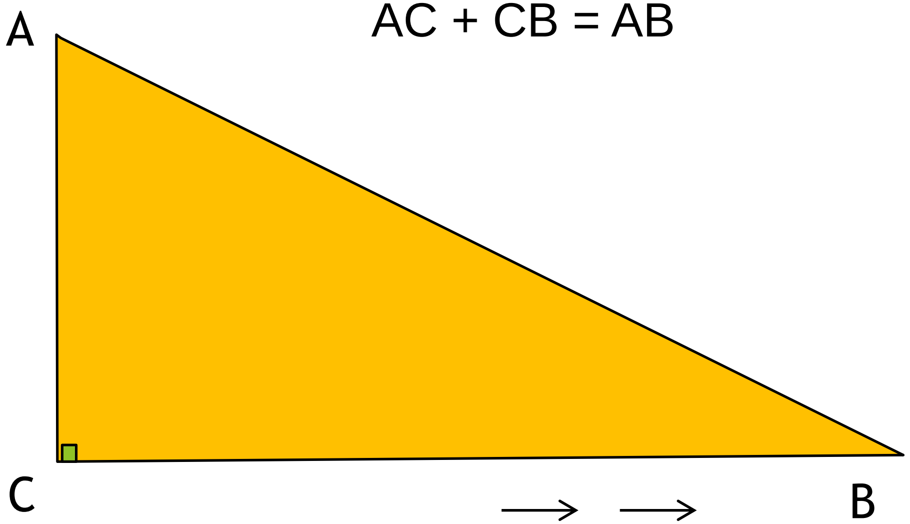
Par la relation de Chasles



Michel Chasles
1793-1880

- Dans un espace euclidien, pour un triangle (A,B,C) rectangle en C, on a la **relation de Chasles** :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$



Comme AC perpendiculaire à BC alors $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ ($\cdot$ désigne le produit scalaire)

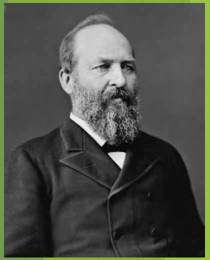
On applique Chasles : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \cancel{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ d'où $AC^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

De même $\cancel{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$ d'où $BC^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$

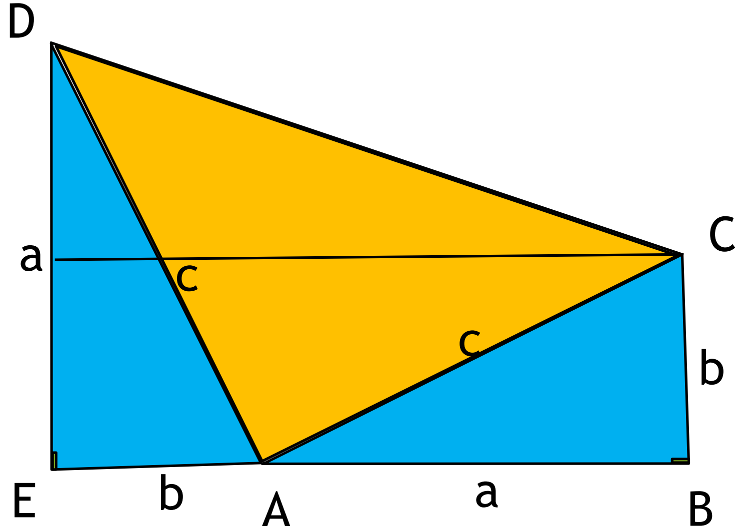
D'où par sommation : $AC^2 + BC^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$

CQFD

Théorème du président



- Attribué au 20ème président des Etats-Unis **James A. Garfield** (1831-1881)
- En réalité du à l'italien **Lorenzacio Mascheroni** (1750-1800)
- Mais **Napoléon Bonaparte** (1769-1821) le présenta à l'Académie des Sciences …



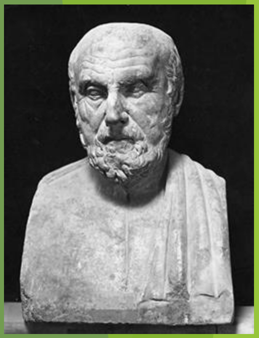
L'aire du trapèze EBDC = $(a+b) \times b + \frac{1}{2} \times (a+b) \times (a-b) = \frac{1}{2}(a+b)^2$

La sommes des aires des 3 triangles est = $2 \times \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} \times c^2 = ab + \frac{1}{2} \times c^2$

Par égalité de 2 termes : $\cancel{\frac{1}{2}} \times (a^2 + b^2) + \cancel{ab} = \cancel{ab} + \cancel{\frac{1}{2}} \times c^2$ d'où $a^2 + b^2 = c^2$

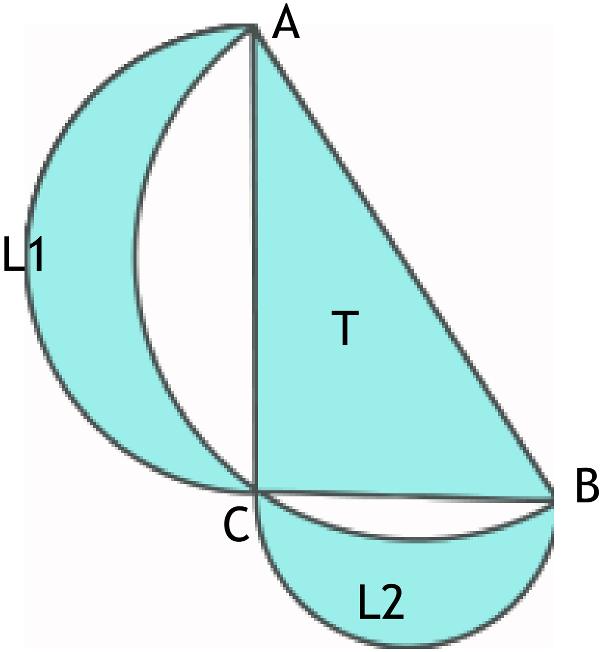
CQFD

Théorème des 2 lunules



- D'après **Hypocrate de Chios** (-470, -410) , découle du théorème de Pythagore :

  aire (T triangle rectangle en C) = aire (lunule L1) + aire (lunule L2)



Soit D le demi disque de diamètre AB, D1 de demi disque de diamètre AC et D2 le demi disque de diamètre CB

Alors aire(D) = $\pi/2\ AB^2$ = aire (D1 – L1) + aire (D2 – L2) + aire (T)

D'où $\cancel{\pi/2\ AB^2} = \cancel{\pi/2\ AC^2}$ - aire(L1) + $\cancel{\pi/2\ BC^2}$ - aire(L2) + aire (T)

Par Pythagore on obtient : aire (T) = aire(L1) + aire(L2)

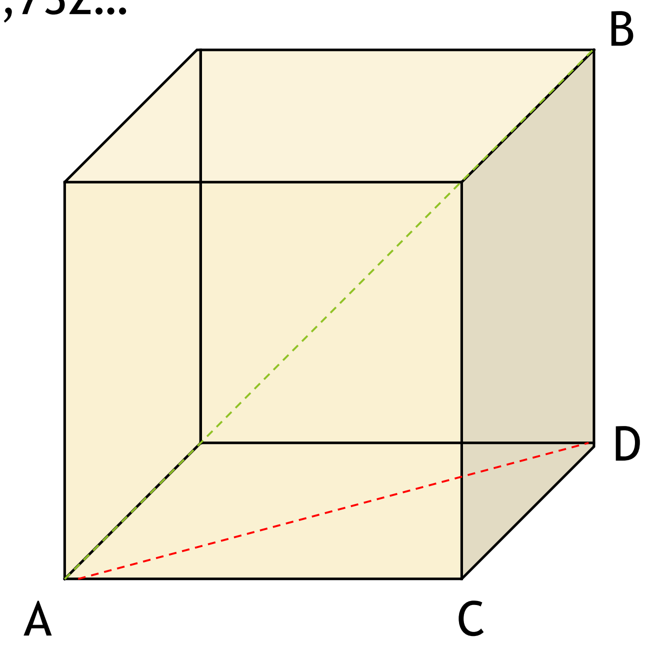
CQFD

En dimension 3

Dans un **pavé**, la grande diagonale AB se déduit du théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 = AC^2 + CD^2 + DB^2$$

Pour cube de côté 1, on a : $AB^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$
d'où $AB = \sqrt{3} \sim 1{,}732\ldots$



Se généralise avec un **hypercube** : distance euclidienne

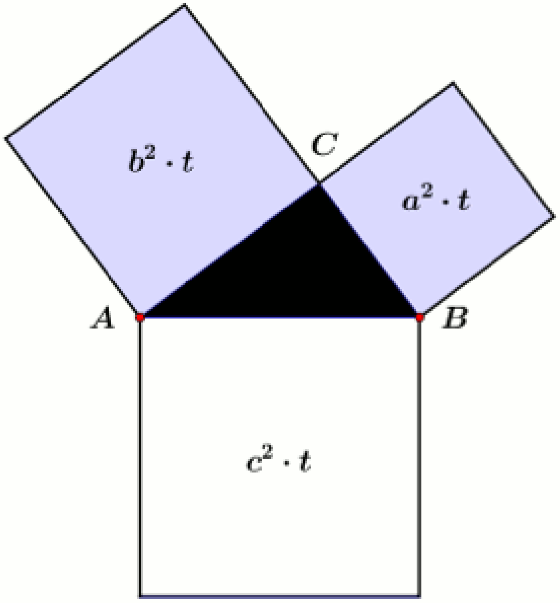
« Preuves visuelles »

- **Avec une balance** : 3 carrés en bois homogène et une bonne découpe

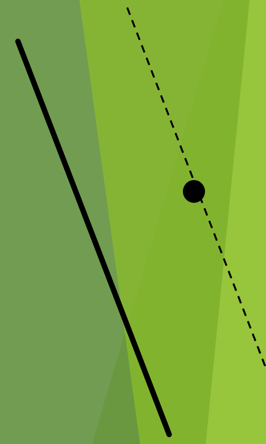
En pesant le grand carré (de l'hypoténuse) et en le comparant avec la somme des 2 petits carrés (des 2 autres côtes), on obtient une précision de l'ordre du gramme pour une balance suffisamment précise

- **Par les volumes** :

les 2 petits carrés remplis d'un liquide se versent dans le grand carré et le remplis totalement



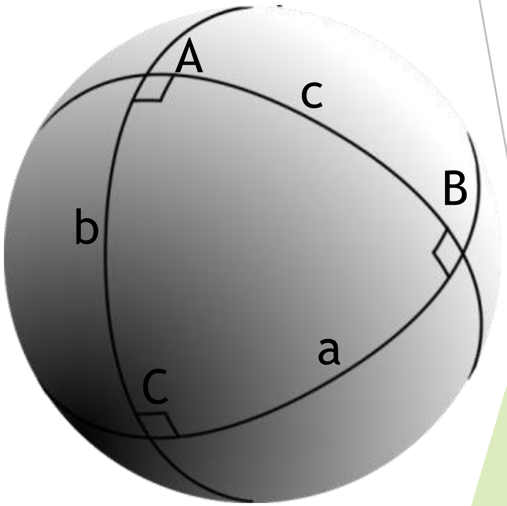
Limitation du théorème Pythagore



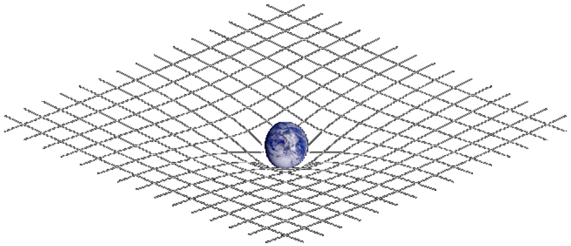
- Le théorème de Pythagore est valide en **géométrie euclidienne**, on peut montrer qu'il est équivalent à l'axiome des parallèles :

Par un point, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée

- En **géométrie sphérique**, le trirectangle A,B,C ne vérifie pas le théorème de Pythagore !
  => dépendance de la **courbure** :
  - Si positive : $c^2 < a^2 + b^2$
  - Si négative : $c^2 > a^2 + b^2$
  - Si nulle (espace plat) : $c^2 = a^2 + b^2$



- **L'Univers est un espace non euclidien**
  => relativité générale



La présence de matière modifie la géométrie de l'espace-temps

Poésie, pensées …

Le carré de l'hypoténuse parlementaire est égal à la somme de l'imbécilité construite sur ses deux côtés extrêmes.

Quand ça ne tourne pas rond dans le carré de l'hypoténuse, c'est signe qu'il est grand temps de prendre les virages en ligne droite
Pensées de Pierre Dac (1893-1975)

Plus j'y pense, plus je me dis qu'il n'y a aucune raison pour que le carré de l'hypoténuse soit égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
San Antonio de Frédéric Dard (1921-2000)

Le carré de l'hypoténuse
Est égal, si je ne m'abuse
À la somme des carrés
Construits sur les autres côtés
Quatrain de Franc-Nohain (1872-1934)