JEU, MOUVEMENT BROWNIEN ET THÉORIE DU POTENTIEL

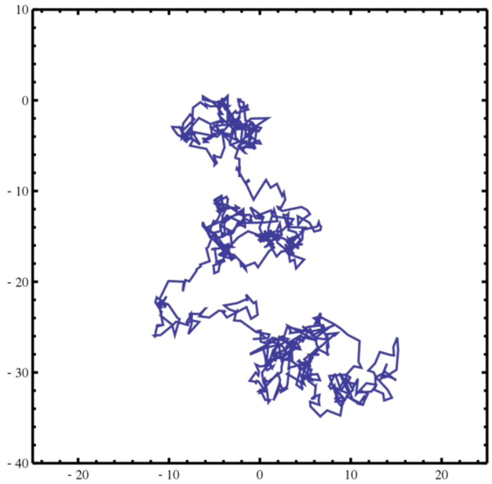
Les mathématiques utiles pour résoudre un problème donné sont applicables dans un domaine tout autre quand il est régi par les mêmes équations. On peut passer ainsi de la géométrie à l'algèbre et aux probabilités comme nous allons le voir dans l'analogie du mouvement brownien et de la théorie du potentiel qui sont régit par la même équation, l'équation de Laplace. L'équation de Laplace apparaît dans de nombreuses autres branches de la physique théorique : astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion mouvement brownien, mécanique quantique.

Les fonctions solutions de l'équation de Laplace sont appelées les fonctions harmoniques.

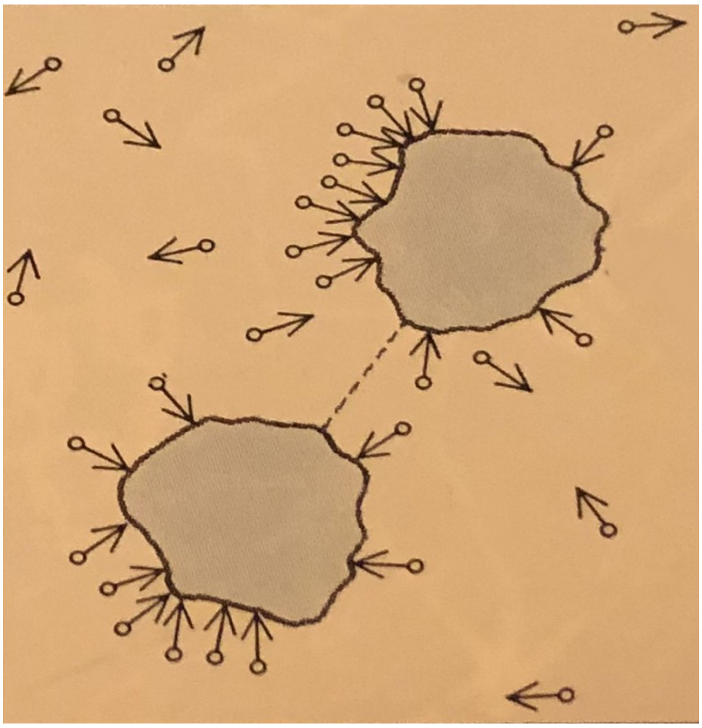
Restez avec moi nous allons définir simplement ces mots barbares.

LE MOUVEMENT BROWNIEN

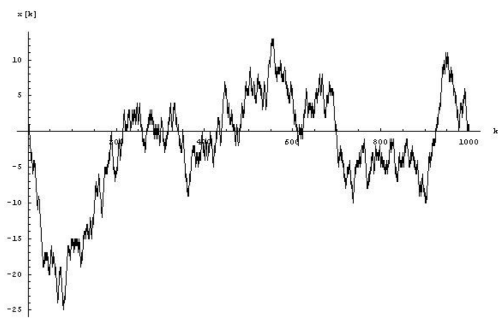
Tout d'abord le mouvement Brownien. Un botaniste, Robert Brown observa en 1867 que des grains de pollen étaient en solution animés de mouvements rapides et incessants dans toutes les directions.



Les physiciens déterminèrent que ce mouvement n'était pas de nature biologique et que le mouvement des particules était d'autant plus rapide que les particules étaient petites et la température importante.
Einstein, en 1905, et sans avoir eu connaissance des observations de Brown expliqua le phénomènes par les fluctuations de la pression sur la particule de pollen (ou autre) résultants des fluctuations des impacts de molécules de l'eau sur cette particule.

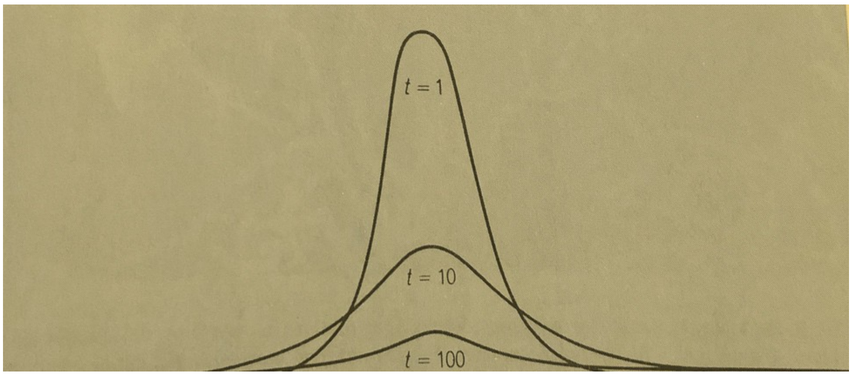


Une molécule n’était plus un concept mais une réalité, c’est le passage du nominalisme au réalisme selon les théories moyenâgeuses chère à Abélard et à Anselme mais ceci est une autre histoire… Perrin obtint le prix Nobel de physique pour la mesure du nombre d’Avogadro grâce à la mesure du déplacement d’une particule.
Sous l’influence de ces chocs on peut calculer l’éloignement visible au microscope d’une particule de pollen ou plutôt la probabilité qu’elle soit à une certaine distance de son point de départ.

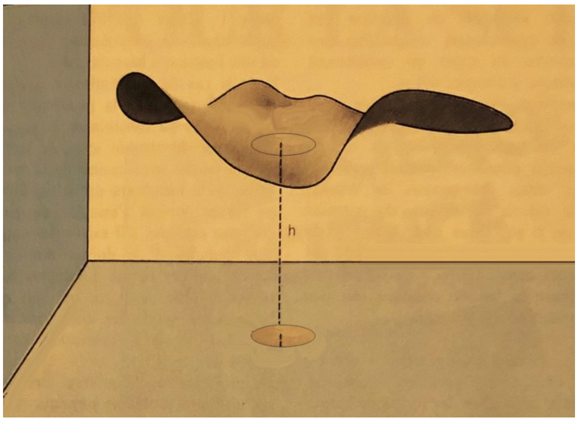


Le mathématicien Wiener fit une théorie mathématique du sujet et appliquons là à un modèle simple. Une particule se déplace sur une droite et saute d’un point à un autre d’une longueur unité, disons toutes les secondes, vers la gauche ou vers la droite.
On sait évaluer la probabilité de sa position après un temps donné. Plus le temps s’écoule, plus, « en moyenne », elle s’éloigne de la position de départ et

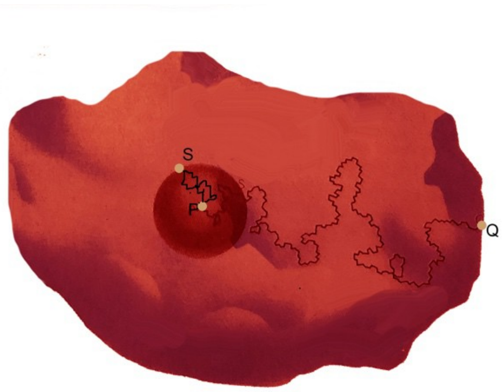
ces probabilités en fonction du temps sont des courbes en cloche de plus en plus aplaties à mesure que le temps s'écoule. Nous verrons plus tard l'analogie avec le gain d'un joueur à pile ou face…



LA THÉORIE DU POTENTIEL



Abordons la théorie du potentiel qui a pour objet l'étude des positions d'équilibre mécanique ou thermique. Prenons une membrane élastique tendue sur un fil de fer. La position d'un point P de la surface est définie par sa hauteur h par rapport à un plan de base de coordonnées x et y. La solution de la forme de la surface h en fonction de x et y dans ce type de problème est une fonction dite « harmonique ». Sa définition est que la moyenne des hauteurs h de cette fonction sur un petit cercle autour du point P est égale à la valeur de h en P. Cela semble presque évident, s'il y a des points plus haut que P il doit y avoir des points plus bas quand la membrane est en équilibre par les forces de tension.
Ces problèmes où les données sont en surface (au sens large, sur un pourtour ou une surface) d'un milieu homogène sont dénommés les problèmes de Dirichlet en hommage au mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).



Prenons maintenant le problème de l'équilibre thermique d'un corps (trois dimensions) dont la surface est chauffée selon une répartition de température donnée. Lorsque le corps est en équilibre thermique la température ne varie pas en fonction du temps et la fonction donnant la température d'un point du corps est là aussi une fonction harmonique. C'est-à-dire caractérisée par la propriété de la moyenne : la température en un point est la moyenne des températures sur une petite sphère centrée autour de ce point. La conduction de la chaleur fait que la température de P augmente si la moyenne des températures est supérieure à celle de P et diminue si cette moyenne est inférieure.
Il est maintenant nécessaire de faire le pont entre nos exemples de l'équilibre thermique et du mouvement brownien.
Et pour cela, nous allons jouer. Pour connaitre la température au point P nous plaçons une particule en P et nous la regardons évoluer sous l'effet du mouvement brownien. Elle arrivera fatalement en un point Q de la surface où la température connue est T(Q). Nous identifierons le gain du joueur à la température T(Q). Puis nous recommençons l'expérience et relancerons la particule du point P. Son mouvement brownien aléatoire fait qu'elle arrivera sur la surface au point Q' et le gain du joueur sera T(Q'). Etc.. Notons que le gain maximal sera la température du point le plus chaud de la surface et le gain minimal la température du point le plus froid. Si le point P est près d'un point chaud Q il est probable que sa température sera proche de celle de Q donc élevée. Le gain moyen du joueur qui jouera N parties sera la somme de toutes les températures atteintes divisée par N. C'est ce que l'on désigne par « espérance mathématique » E(P). Si le jeu est honnête la mise initiale du joueur sera égale à cette espérance mathématique E(P). Mais cette espérance mathématique, nous allons le démontrer, est égale à la température du point P. Souvenons-nous que pour cela il faut démontrer que la fonction déterminant la température de P soit une fonction harmonique.
Esquissons la démonstration. Imaginons une petite sphère K centrée en P. Nous lançons la particule du point P et notons S la première fois où elle rencontre la

sphère K. Puis nous lançons la particule à de multiples reprises à partir de S qui arrive en divers points Q de la surface du corps et nous déterminons la température de S par la moyenne de ces observations. et observons toutes les fois où sa trajectoire finit en un point donné S. Pour tous ces essais le gain ou la température de P sera celle de S et nous faisons cela pour tous les points de la sphère. Comme le mouvement brownien n'aura pas de direction préférentielle, il atterrira avec la même probabilité en tous les points S de la sphère et la température de P sera la moyenne des températures sur la sphère. CQFD.
Donc nous pouvons calculer les températures dans notre corps en utilisant le mouvement brownien, et connaître des résultats concernant le mouvement brownien en calculant la température à l'intérieur d'un corps.
Pour montrer comment le mouvement brownien peut nous aider à calculer la ruine du joueur dont nous avions parlé lors de notre dernière rencontre.

LA RUINE DU JOUEUR

Pierre dont la fortune est M euros joue à pile ou face avec François dont la fortune est de N euros. L'enjeu de chaque partie est un euro et la partie s'arrête quand Pierre ou François sont ruinés. Nous voulons savoir quelles sont les probabilités que Pierre ou François gagnent. Nous assimilerons d'abord le jeu à un mouvement brownien puis résoudrons le problème grâce à la théorie du potentiel.
Donc imaginons que chaque partie soit assimilable au déplacement d'une unité d'un point sur une droite. Si le tirage est pile Pierre gagne et le point représentant sa fortune se déplace vers la droite. Si le tirage est face François gagne et le point représentant son avoir se déplace vers la gauche. C'est un cas de mouvement aléatoire brownien.
Le jeu se termine quand François a gagné M euros (Pierre est ruiné) ou qu'il a perdu N euros et il est ruiné. Ceci correspond à un problème de Dirichlet Pour associer à ce problème la théorie du potentiel imaginons un joueur « OBSERVATEUR » qui gagne 1 euro si François est ruiné. Il est loisible d'associer à ce problème celui de l'équilibre d'un fil élastique tendu entre le point d'abscisse – N et le point d'abscisse + M comme indiqué sur la figure et le théorème de Thalès indique que sa probabilité de gagner pour M est M/(M + N).

[Philippe Boulanger, 21 octobre 2020]