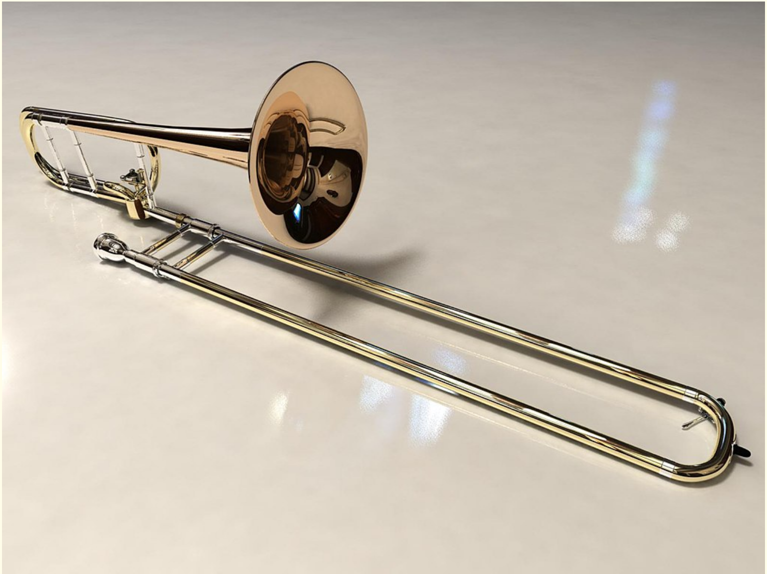
Délicate Demi-Dérivée !

François Dubois*

Kafemath en ligne
jeudi 10 juin 2021

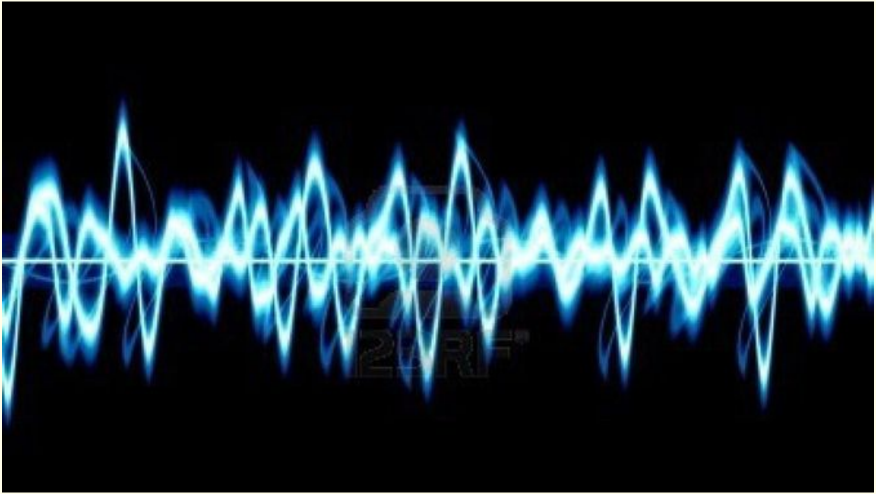
* créateur du Kafemath.

vive la musique !



wikipedia

onde acoustique

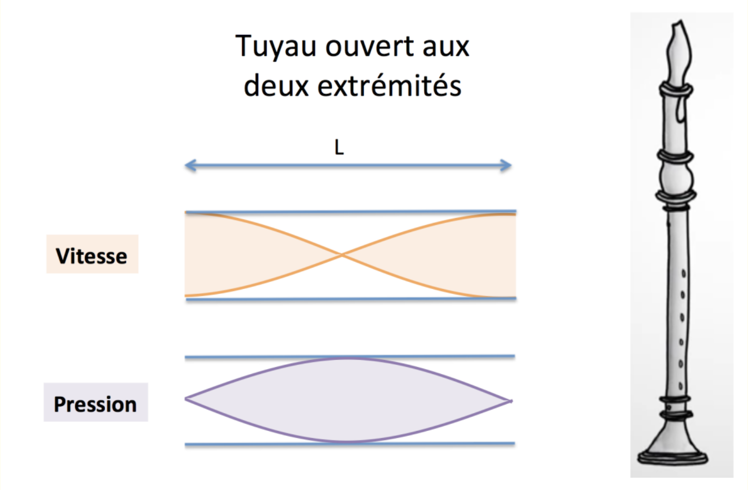


huzzaz.com

physique de l'onde acoustique

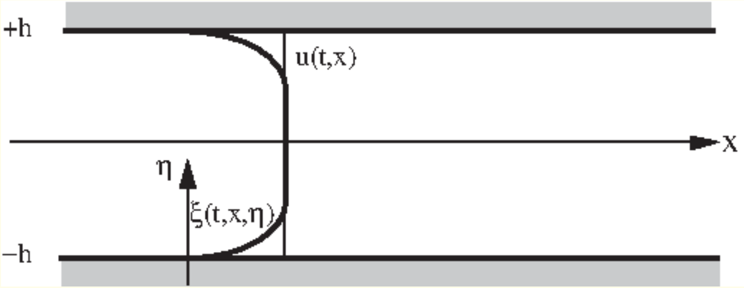
youtube

modélisation physique de l'onde acoustique



culturesciencesphysique.ens-lyon.fr

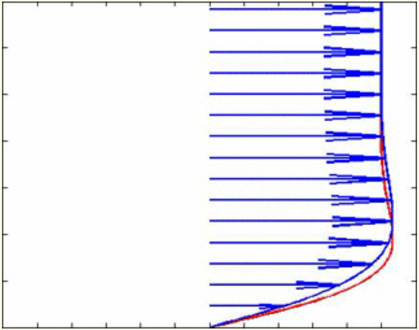
modélisation mathématique précise de l'onde acoustique



Régis Msallam et FD, Ircam, 2000

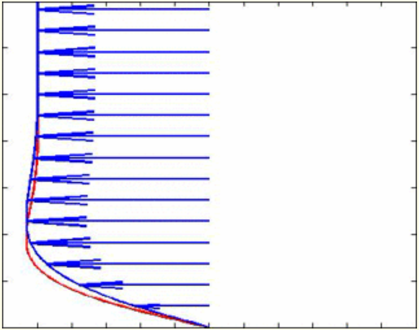
fluide dans le tuyau : pression et vitesse
fluide au bord du tuyau : effets de couche limite

couche limite acoustique



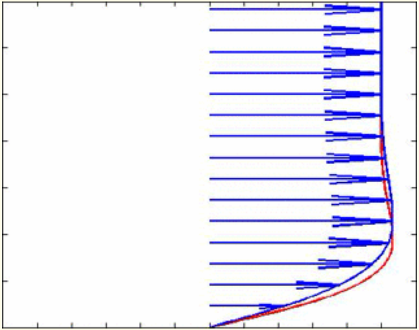
physics.stackexchange.com

couche limite acoustique



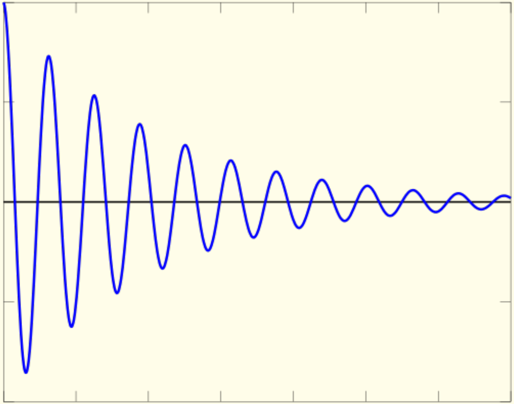
physics.stackexchange.com

couche limite acoustique



physics.stackexchange.com

effets dissipatifs dans la couche limite



wikipedia

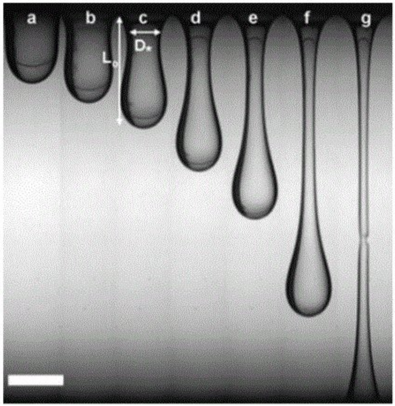
atténuation du son

l'énergie de l'onde décroît au cours de la propagation

un opérateur d'ordre un demi émerge du modèle précédent

matériaux visco-élastiques

Philippe Lauret, Flickr



Tabuteau *et al.*, 2011

matériau visqueux (miel !) : résiste à un cisaillement

matériau élastique : se déforme lorsqu'il est sont contraint, puis retourne à son état d'origine une fois la contrainte relevée

ballon, matelas, amortisseur, ...

modélisation des matériaux visco-élastiques

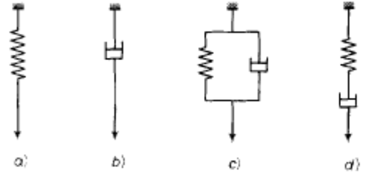


Fig. 1. – The elements of the mechanical models: *a*) HOOKE, *b*) NEWTON, *c*) VOIGT, *d*) MAXWELL.

LINEAR MODELS OF DISSIPATION IN ANELASTIC SOLIDS 173

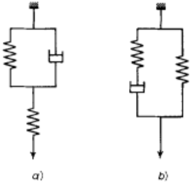


Fig. 4. – The « canonic » representations of the Zener model (S.L.S.).

Michele Caputo et Francesco Mainardi
Linear Models of Dissipation in Anelastic Solids, 1971

modélisation des matériaux visco-élastiques

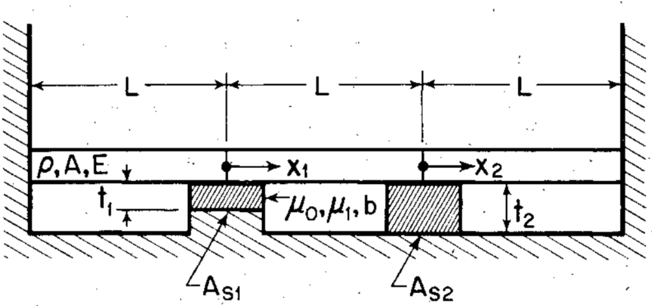


Fig. 2 Elastic rod supported by elastomeric pads.

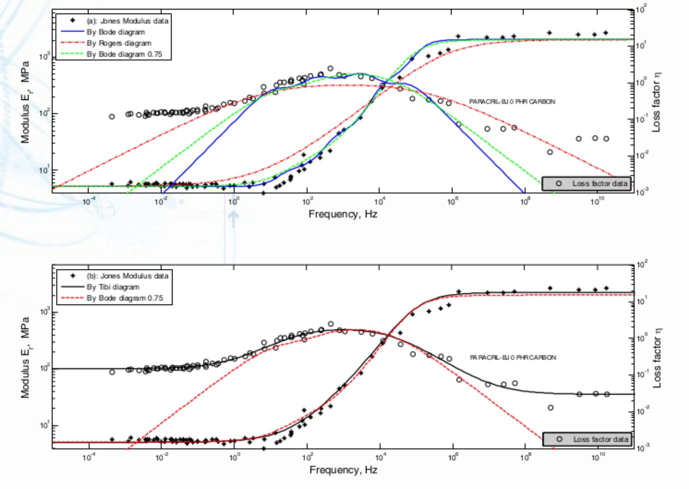
Ronald Bagley et Peter Torvik

Fractional calculus - A different approach

to the analysis of viscoelastically damped structures, 1983

modélisation des matériaux visco-élastiques

L'emploi de dérivées d'ordre fractionnaire permet de retrouver la valeur de donnés mécaniques mesurables avec des expériences



Yvon Chevalier et Tibi Beda, SupMeca, Saint-Ouen
CNAM Paris, novembre 2006

quel sens donner à la demi-dérivée ?

- Un demi

nombre x tel que $x+x=1$.

Un tiers ? nombre x tel que $x+x+x=1$ ...

- Racine de deux.

nombre $x>0$ tel que $x^2=2$ $\sqrt{2}>0$ satisfait à $(\sqrt{2})^2=2$

on a $1<x<2$ car $1^2<x^2=2<2^2=4$.

* première approximation $x_1=1$.
* seconde approximation $x_2=1+\varepsilon$.

$x_2^2=(1+\varepsilon)^2=1+2\varepsilon+\varepsilon^2=1+2\varepsilon(1+\varepsilon/2)$.

$\varepsilon>0$ est petit ; je le néglige devant 1 ; $x_2^2\simeq 1+2\varepsilon$

on écrit que $1+2\varepsilon=2$ d'où $\varepsilon=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{3}{2}$.

* troisième approximation $x_3=x_2+\varepsilon$ (une autre ε !)

$x_3^2\simeq x_2^2+2\varepsilon x_2=2$ et $\varepsilon=\frac{1}{2x_2}(2-x_2^2)=\frac{1}{3}\left(2-\frac{9}{4}\right)=-\frac{1}{12}$

$x_3=\frac{3}{2}-\frac{1}{12}=\frac{17}{12}\simeq 1{,}4166..$

* et ainsi de suite ! avec un grand Merci à Isaac Newton !

sur la route de la demi-dérivée...

2

- Racine de $(1+x)$, x petit.

  on cherche un "polynôme infini" $p(x)$, une série, tel que

  $p(x) \times p(x) = 1+x$. $\quad p(x) = 1 + ax + bx^2 + \cdots$

* On recommence le calcul de proche en proche

$$(1+ax+O(x^2))(1+ax+O(x^2)) = 1 + 2ax + O(x^2)$$

toujours égal à $1+x$. Donc $a = \frac{1}{2}$. Edmund Landau (1877-1938)

* $$\left(1+\frac{1}{2}x+bx^2+O(x^3)\right)\left(1+\frac{1}{2}x+bx^2+O(x^3)\right) = 1+x+\left(2b+\frac{1}{4}\right)x^2+O(x^3)$$

Donc $2b + \frac{1}{4} = 0$

* etc ! $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots$ avec x petit.

- Racine de $(1-x)$, x petit.

  facile ! on change x en $-x$: $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots$

- Racine de $(I-\delta)$, δ opérateur "petit"

  I : opérateur "identité"

  $\underbrace{(I+A)^2}_{(I+A)\circ(I+A)} = I - \delta$; le même calcul fonctionne !

  $$A = -\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{8}\delta^2 + \cdots$$

on tient quelque chose !

3

- Approximation de la dérivée par différences finies.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\big(f(x+h)-f(x)\big)\right] \qquad \left(\frac{\text{zéro}}{\text{zéro}}\right)$$

$f(x+h) = (\delta_h f)(x)$ décalage de f d'une valeur h.

$$\frac{d}{dx}f \simeq \left(\frac{1}{h}(\delta_h - I)f\right)(x) \ ; \quad \frac{d}{dx} \simeq \frac{1}{h}(\delta_h - I)$$

on y est presque! $\quad \dfrac{df}{dx} = \lim\limits_{h \to 0}\left[\dfrac{1}{h}\big(f(x)-f(x-h)\big)\right]$

$$f(x-h) = (\delta_{-h} f)(x) \ ; \quad \frac{d}{dx} \simeq \frac{1}{h}(I - \delta_{-h})$$

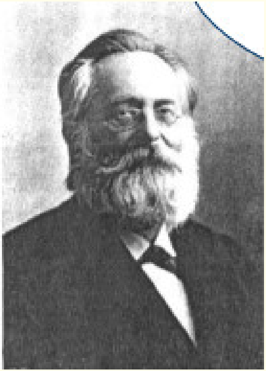
- Dérivée d'ordre un-demi "à h près". $\quad D^{1/2}\circ D^{1/2} = \dfrac{d}{dx}$.

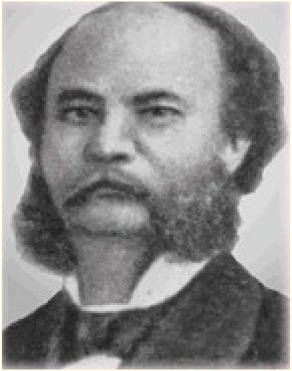
$$D_h^{1/2}\circ D_h^{1/2} = \frac{1}{h}(I - \delta_{-h}).$$

réponse à la page précédente : $D_h^{1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}\left(I - \dfrac{1}{2}\delta_{-h} - \dfrac{1}{8}\delta_{-h}^2 + \cdots\right)$

approximation de la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$ que je cherche à définir!

Grünwald (1867) et Letnikov (1868)





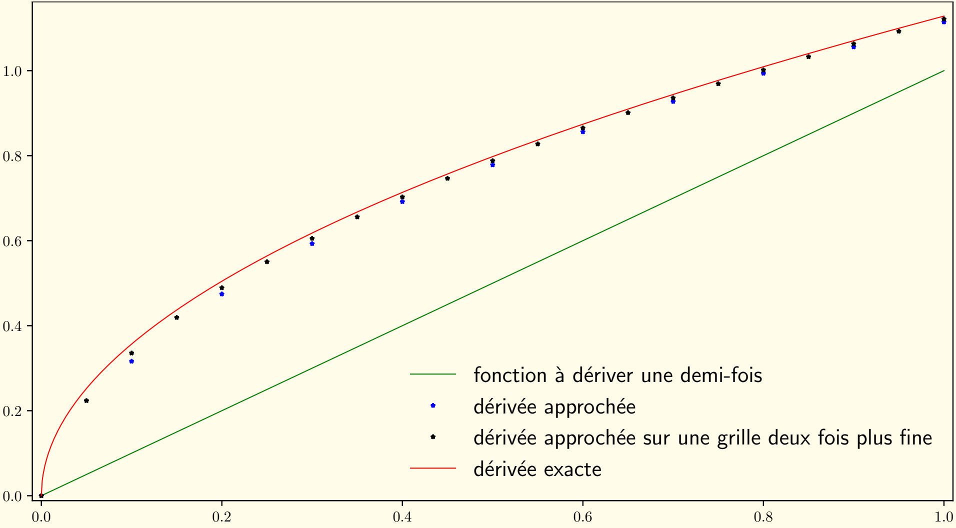
Anton Grünwald (1838-1920)

Aleksey Letnikov (1837-1888)

Podlubny (2002)

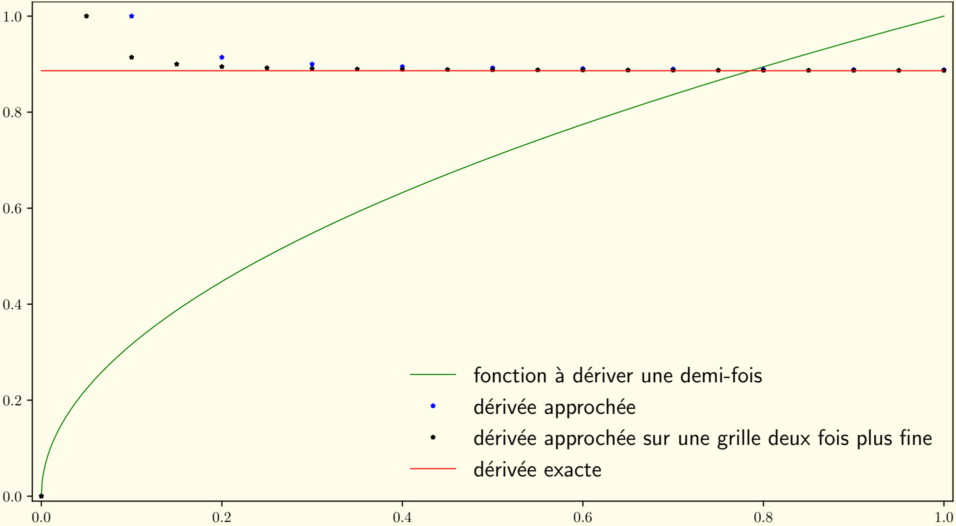
wikipedia

on teste ce schéma pour une fonction très simple



$$f(t) = t \qquad \left(\mathrm{D}^{1/2} f\right)(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$$

on teste ce schéma pour une autre fonction très simple



$$f(t) = \sqrt{t} \qquad \left(\mathrm{D}^{1/2} f\right)(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Riemann et Liouville

Bernhard Riemann (1826-1866)

Joseph Liouville (1809-1882)

wikipedia

Riemann (1847) et Liouville (1832)

XIX.

Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation.*)

In dem folgenden Aufsatze ist der Versuch gemacht, ein Verfahren aufzustellen, mittelst dessen man aus einer gegebenen Function einer Veränderlichen eine andere Function derselben Veränderlichen ableiten könne, deren Abhängigkeit von jener ursprünglichen sich durch eine Zahl ausdrücken lässt und die für den Fall, dass diese Zahl eine ganze positive, negative oder null ist, bezüglich mit den Differentialquotienten, Integralen und der ursprünglichen Function übereinstimmt. Die Resultate der Differential- und Integral-Rechnung werden zwar als Grundlage hier vorausgesetzt, aber nicht in der Weise, dass diejenigen derselben, die für alle Differentiale und Integrale, deren Ordnung durch eine ganze Zahl ausgedrückt wird, gelten, auch auf die gebrochenen Ordnungen ausgedehnt würden; sondern sie sollen nur einerseits zur Begründung des oben angedeuteten Verfahrens benutzt werden und andrerseits als Wegweiser dienen dasselbe zu finden.

Zu diesem letzteren Zwecke wollen wir einmal die Reihe der Differentialquotienten etwas näher betrachten. Es ist klar dass man hiebei nicht von der gewöhnlichen Definition derselben ausgehen kann, die sich auf ihr recurrentes Bildungsgesetz gründet, da man ja durch dasselbe unmöglich auf andere Glieder der Reihe, als auf solche, die ganzen Indices entsprechen, gelangen kann; man muss sich also nach einer independenten Bestimmung derselben umsehen. Ein Mittel dazu

*) Diese Abhandlung trägt im Manuscript das Datum 14. Jan. 1847. und stammt also aus Riemanns Studienzeit. Riemann dachte ohne Zweifel nicht an ihre Veröffentlichung, auch stützt sich die Betrachtung auf Grundlagen, deren Haltbarkeit er in späteren Jahren nicht mehr anerkannt haben würde. Immerhin ist die Arbeit für Riemanns Entwicklungsgang charakteristisch, und die Resultate sind bemerkenswerth genug, um die Aufnahme in diese Sammlung zu rechtfertigen.

MÉMOIRE

Sur le Calcul des Différentielles à Indices quelconques;

PAR. JOSEPH LIOUVILLE.

[1] La première idée du calcul des différentielles à indices quelconques appartient à Leibnitz. Euler ensuite a écrit sur ce sujet quelques pages que M. Lacroix rappelle dans son grand traité de calcul différentiel. On trouve également trois ou quatre lignes qui s'y rapportent dans l'ouvrage de Laplace sur les probabilités. Fourier enfin, dans sa théorie analytique de la chaleur, indique une formule générale qu'il regarde comme propre à transformer en intégrales définies doubles les différentielles à indices quelconques. Mais les géomètres que je viens de citer ne se sont occupés de cette matière qu'en passant, et n'en ont point approfondi la théorie. Le peu qu'ils en ont dit, très-précieux sans doute, est loin d'être exempt d'une certaine obscurité : on n'y trouve pas, ce me semble, une définition explicite et commode des différentielles à indices quelconques, et l'on y voit encore moins à quoi ces différentielles peuvent servir.

Lorsqu'on arrive au calcul différentiel par la méthode géométrique de Leibnitz, ou par la méthode mécanique des fluxions; lorsqu'on fait dériver ce calcul de celui des différences à la manière de Laplace, ou de la théorie des fonctions distributives, ainsi que le veut M. Servois; dans tous ces cas, dis-je, et même en suivant la route plus générale et plus étendue des fonctions dérivées de Lagrange, on n'a pas une idée distincte des différentielles et des dérivées à indices fractionnaires. Voilà

Œuvres complètes

Journal de l'École polytechnique

intégrer est toujours plus facile que dériver

1

- Dualiser...

$D^{1/2}$ tel que $D^{1/2} \circ D^{1/2} = \frac{d}{dx}$? $\qquad D \equiv \frac{d}{dx}$

chercher d'abord $I^{1/2}$ tel que $I^{1/2} \circ I^{1/2} \equiv I^{1}$

$$(I^1 f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

* théorème fondamental de l'analyse $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$

$$D\, I^1 f = f$$

$$D \circ I^1 = I \qquad \begin{cases} I : \text{identité} \\ I^1 : \text{intégration} \end{cases}$$

* attention : D et I^1 ne commutent pas tout à fait !

$$\int_0^x \frac{df}{dt}\,dt = f(x) - f(0).$$

$$(I^1 D f)(x) = \underbrace{f(x)}_{(If)(x)} - \underbrace{f(0)}_{\langle \delta, f\rangle}.$$

$$I^1 D f = I f - \langle \delta, f \rangle \qquad \text{(Dirac).}$$

$$I^1 D = I - \delta$$

rechercher une intégrale d'ordre un-demi

- Intégrale d'ordre un-demi 2

outil pas tout à fait élémentaire : transformation de Fourier

$$(\mathcal{F} f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt \equiv \hat{f}(x).$$

théorème de réciprocité de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi.$$

* on dérive sous le signe d'intégration :

$$(Df)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi\, \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi$$

c'est à dire $(\mathcal{F}\, Df)(\xi) = (i\xi)\, \mathcal{F} f(\xi)$

* multiplier les transformées de Fourier revient à faire une convolution

$$(K * f)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\, f(y)\, dy.$$

$$\mathcal{F}(K * f) = (\mathcal{F} K)(\mathcal{F} f).$$

intégrale d'ordre un-demi de l'intégrale d'ordre un-demi

o <u>Intégrale d'ordre un-demi (suite)</u> 3

$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi$; $(\mathcal{F} Df)(\xi) = (i\xi)(\mathcal{F}f)(\xi)$

chercher $\tilde{K}$ tel que $\mathcal{F}\tilde{K} = \sqrt{i\xi}$?

ie $D^{1/2}f$ tel que $(\mathcal{F} D^{1/2} f)(\xi) = \sqrt{i\xi}\,(\mathcal{F} f)(\xi)$ bof !

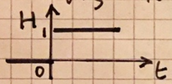
* $(\mathcal{F} I^1 f)(\xi) = \frac{1}{i\xi}(\mathcal{F} f)(\xi)$.

$(\mathcal{F} I^{1/2} f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{i\xi}}(\mathcal{F} f)(\xi)$?

chercher K tel que $(\mathcal{F} K)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{i\xi}}$ K: noyau de convolution

alors $I^{1/2} f = K * f$

* Fonction de Heaviside



$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} H(t)\right)(\xi) = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{i\xi}}$; $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{1/2-1}\, dt = \sqrt{\pi}$

* Intégrateur d'ordre un-demi $(I^{1/2} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\, d\xi$

* on vérifie qu'on a bien $I^{1/2} \circ I^{1/2} = I^1$.

ce n'est pas l'idéal, mais on peut faire des calculs...

- Enfin la dérivée d'ordre un-demi !

4

* choix de Riemann et Liouville : $D^{1/2} = D \circ I^{1/2}$

$$(D^{1/2}_{RL} f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \, d\xi .$$

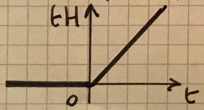
* choix de Caputo : $D^{1/2} = I^{1/2} \circ D$.

$$(D^{1/2}_{C} f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} \frac{df}{dx}(\xi) \, d\xi .$$

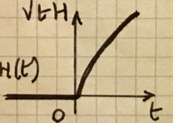
* ces deux définitions ne sont égales que si $f(0) = 0$...

$$(D^{1/2}_{RL} f)(x) = (D^{1/2}_{C} f)(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi x}} f(0) .$$

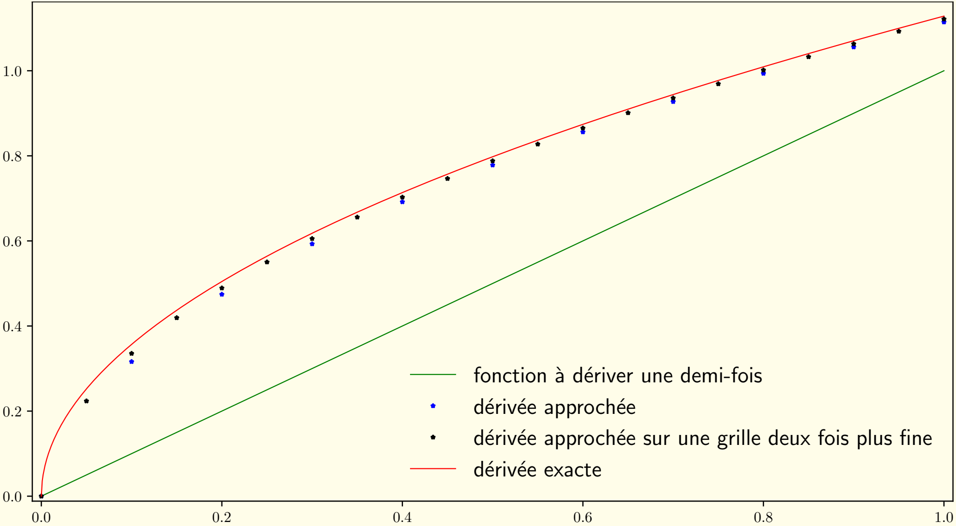
* on peut faire des calculs !



$D^{1/2}(tH(t)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\,H(t)$; $D^{1/2}(\sqrt{t}\,H(t)) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H(t)$

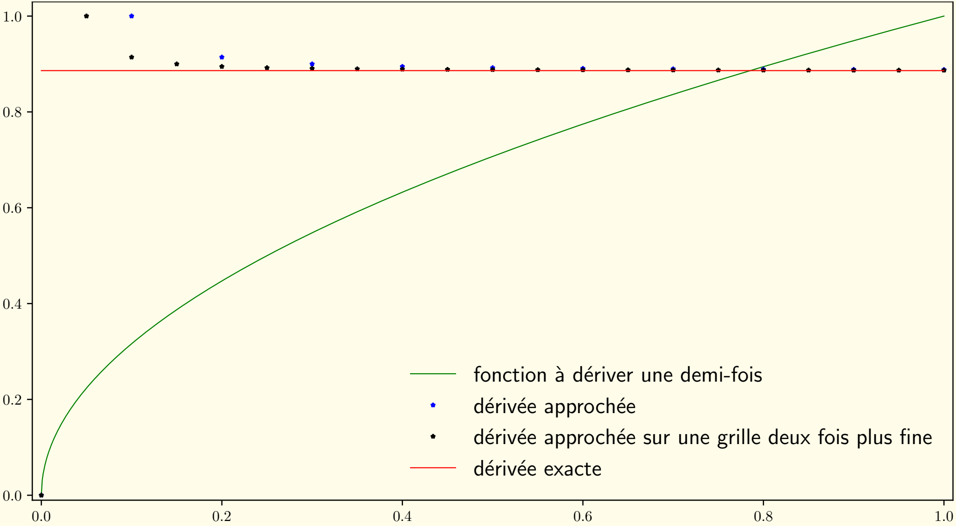


dérivée d'ordre un demi de la fonction "$x\,H(x)$"



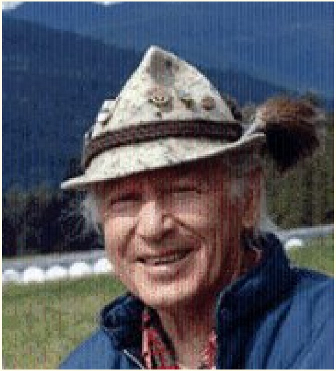
$$f(t) = t\,H(t) \qquad \big(\mathrm{D}^{1/2} f\big)(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sqrt{t}\,H(t)$$

dérivée d'ordre un demi de la fonction "$\sqrt{x}\, H(x)$"



$$f(t) = \sqrt{t}\, H(t) \qquad \left(\mathrm{D}^{1/2} f\right)(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, H(t)$$

Michele Caputo (né en 1927)



Geophys. J. R. astr. Soc. (1967) **13**, 529–539.

Linear Models of Dissipation whose *Q* is almost Frequency Independent—II

Michele Caputo*

(Received 1967 May 1)

Summary

Laboratory experiments and field observations indicate that the Q of many non-ferromagnetic inorganic solids is almost frequency independent in the range 10^{-2}–10^{7} c/s, although no single substance has been investigated over the entire frequency spectrum. One of the purposes of this investigation is to find the analytic expression for a linear dissipative mechanism whose Q is almost frequency independent over large frequency ranges. This will be obtained by introducing fractional derivatives in the stress–strain relation.

Since the aim of this research is also to contribute to elucidating the dissipating mechanism in the Earth free modes, we shall treat the dissipation in the free, purely torsional, modes of a shell. The dissipation in a plane wave will also be treated.

The theory is checked with the new values determined for the Q of spheroidal free modes of the Earth in the range between 10 and 5 min integrated with the Q of Rayleigh waves in the range between 5 and 0·6 min.

Another check of the theory is made with the experimental values of the Q of the longitudinal waves in an aluminium rod in the range between 10^{-5} and 10^{-3} s.

In both checks the theory represents the observed phenomena very satisfactorily. The time derivative which enters the stress–strain relation in both cases is of order 0·15.

The present paper is a generalized version of another (Caputo 1966b) in which an elementary definition of some differential operators was used. In this paper we give also a rigorous proof of the formulae to be used in obtaining the analytic expression of Q; moreover, we present two checks of the theory with experimental data.

Academia Europeana
ae-info.org

dérivée d'ordre un demi de Caputo (1967)

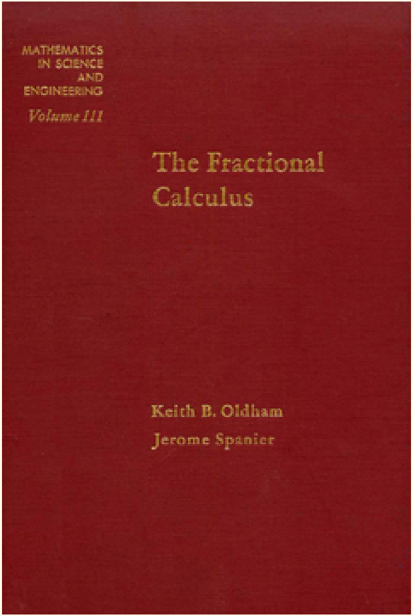
Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society
volume 13, numéro 5, pages 529-539, novembre 1967

We shall assume the definition of the derivative of $f(t)$ of order $m+z$ as follows:

$$\frac{d^{m+z}}{dt^{m+z}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-z)} \int_0^t (t-\xi)^{-z} f^{(m+1)}(\xi)\, d\xi. \qquad (5)$$

$$\left(\mathrm{D}^{1/2} f\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\xi}} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

Oldham-Spanier (1974)



The Fractional Calculus

Theory and Applications of Differentiation
and Integration to Arbitrary Order

KEITH B. OLDHAM
Department of Chemistry
Trent University
Peterborough, Ontario

JEROME SPANIER
Beckman Laser Institute & Medical Clinic
University of California
Irvine, California

quelques professionnels de la dérivation fractionnaire

Igor Podlubný	Alain Oustaloup	Francesco Mainardi
Slovaquie	France	Italie
tuke.sk	sudouest.fr	fracalmo.org

Serguei Sobolev et Laurent Schwartz

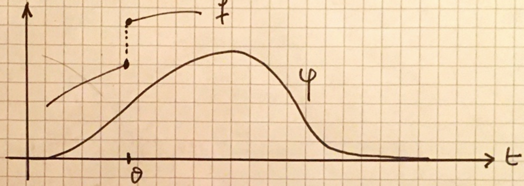
1908-1989

1915-2002

mathématiques du 20e siècle

Dérivée généralisée (distributions).

1



f régulière sauf en $t = \theta$ où elle a une discontinuité

φ très régulière, nulle à l'infini.

$$0 = [f\varphi]_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}(f\varphi)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt}\varphi(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{d\varphi}{dt}\,dt$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{d\varphi}{dt}\,dt$ a un sens même si f n'est pas dérivable

$\frac{df}{dt}$ au sens des distributions se définit par son action sur une fonction test φ

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f\,\frac{d\varphi}{dt}\,dt$$

mathématiques du 20e siècle

Espaces de Sobolev

2

philosophie : se ramener aux fonctions ordinaires !

f de carré intégrable sur un intervalle I : $\int_I |f(t)|^2 dt < \infty$. $f \in L^2(I)$

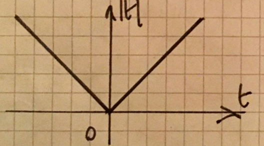
on dispose de $\frac{df}{dt}$ au sens des distributions

hyp (1) $\frac{df}{dt}$ peut être représentée par une fonction :

$\exists g$, telle que $\forall \varphi$ régulière, $-\int_{-\infty}^{\infty} f \frac{d\varphi}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)\, dt$

exemple: valeur absolue !

$$g(t) = \begin{cases} -1, & t<0 \\ +1, & t>0 \end{cases}$$



non défini en 0 ... pas grave car $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)$ a un sens !

La valeur absolue est une fonction dérivable, mais sa dérivée en $t=0$ ne peut pas être définie.

mathématiques du 20e siècle

3

hyp (2) $g \equiv \frac{df}{dt}$ est aussi de carré intégrable

$$\int_I |g(t)|^2 \, dt < \infty .$$

Espace de Sobolev $H^1(I)$

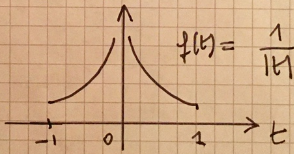
$f \in L^2(I)$ qui satisfait aux deux hypothèses :

* $\frac{df}{dt}$ peut être représenté par une fonction
* La fonction $\frac{df}{dt}$ est de carré intégrable

Norme $\|f\|_1 = \left(\int_I \left(|f|^2 + \left|\frac{df}{dt}\right|^2 \right) dt \right)^{1/2}$

Exemple de fonction L^2

$$f(t) = \frac{1}{|t|^{1/4}}, \quad |t| \leq 1$$

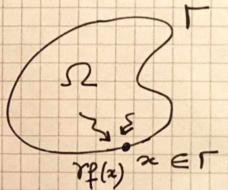


$$\int_{-1}^{1} |f|^2 dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 4\left[\sqrt{t}\right]_0^1 = 4$$

Mais $f(0)$ ne peut pas être défini !

mathématiques du 20e siècle

Théorème de trace (Jacques-Louis Lions, 1959)



Ω ouvert borné de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, ...
bord Γ de Ω : courbe ou surface régulière.
Si $f \in H^1(\Omega)$, on peut définir pour tout point $x \in \Gamma$ du bord de Ω la "trace" $(\gamma f)(x)$ ou valeur limite au bord.

D'où $\gamma f : \Gamma \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto (\gamma f)(x)$.

L'application trace : $f \mapsto \gamma f$ est a priori définie $H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$

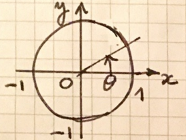
L'ensemble des γf, $f \in H^1(\Omega)$ est un sous-espace de L^2, l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$

La trace est "une-demi fois dérivable" le long du bord.

Demi-dérivée : une <u>classe</u> de fonctions !

mathématiques du 20e siècle

Exemple Ω = disque de centre O, rayon 1. 5



Série de Fourier $f(r,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n(r)\,e^{in\theta}$

$f\in L^2(\Omega)$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1 r|\alpha_n(r)|^2\,dr<\infty$.

$f\in H^1(\Omega)$: les dérivées partielles sont dans $L^2(\Omega)$

$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\,;\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$ $\quad\frac{\partial f}{\partial r}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n'(r)\,e^{in\theta}$; $\int_0^1\sum_{n\in\mathbb{Z}} r|\alpha_n'(r)|^2\,dr<\infty$

$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} i\frac{n}{r}\alpha_n(r)\,e^{in\theta}$; $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1\frac{n^2}{r}|\alpha_n|^2\,dr<\infty$.

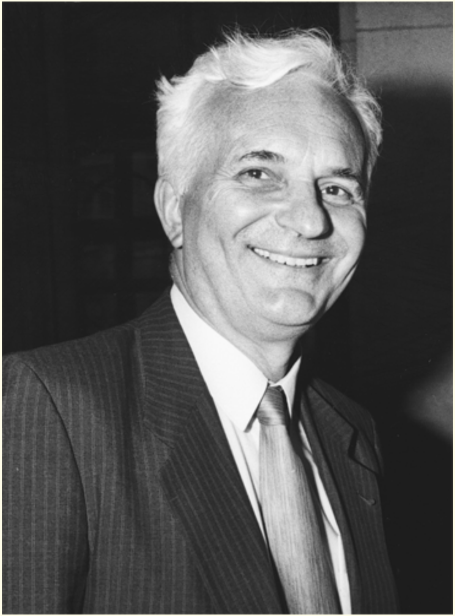
- Valeur au bord $(\gamma f)(\theta)=f(1,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n(1)\,e^{in\theta}$.

$\gamma f\in L^2(\Gamma)$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\alpha_n(1)|^2<\infty$; $\frac{d}{d\theta}(\gamma f)=\sum_{n} in\,\alpha_n(1)\,e^{in\theta}$

$\gamma f\in L^2(\Gamma)$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|\alpha_n(1)|^2<\infty$; $\gamma f\in H^{1/2}(\Gamma)$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n||\alpha_n(1)|^2<\infty$

Estimation: $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n||\alpha_n(1)|^2\leq C\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1\left[r|\alpha_n(r)|^2+r|\alpha_n'(r)|^2+\frac{n^2}{r}|\alpha_n(r)|^2\right]dr$

Jacques-Louis Lions (1928-2001)



THÉORÈMES DE TRACE ET D'INTERPOLATION (I).

J. L. LIONS (Nancy)

Introduction.

Soient D et E deux espaces de Banach, avec $D \subset E$ algébriquement et topologiquement, D étant dense dans E, et soient $\mathcal{A}(D)$ et $\mathcal{B}(E)$ deux espaces de « fonctions » ou de distributions d'une variable réelle $t > 0$ à valeurs dans D et E respectivement. On considère l'espace des $u \in \mathcal{A}(D)$ et dont la dérivée du/dt (prise au sens des distributions vectorielles) cf. L. Schwartz [1]) appartient à l'espace $\mathcal{B}(E)$. On peut alors, sous certaines conditions, définir la « trace » $u(0)$ de u à l'origine, et lorsque u varie — en étant assujetti aux conditions çi dessus —, $u(0)$ parcourt un « espace intermédiaire » entre D et E. On appelle « théorème de trace » tout résultat *caractérisant* directement l'espace des traces, soit T, *i. e.* l'espace engendré par les $u(0)$. Des problèmes de ce type interviennent constamment dans la théorie des problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles. Et en outre, selon une remarque dégagée dans toute sa généralité par N. Aronszajn, à tout théorème de trace correspond un théorème d'interpolation: si $D_1 \subset E_1$ est un deuxième couple d'espaces de Banach, et si l'on construit l'espace des traces — disons T_1 — correspondant aux fonctions $v \in \mathcal{A}(D_1)$ avec $dv/dt \in \mathcal{B}(E_1)$, alors, si π est une application linéaire continue de D dans D_1 et de E dans E_1, elle est aussi une application linéaire continue de T dans T_1. (Il faut que $1 \otimes \pi$ applique continûment $\mathcal{A}(D)$ dans $\mathcal{A}(D_1)$ et $\mathcal{B}(E)$ dans $\mathcal{B}(E_1)$).

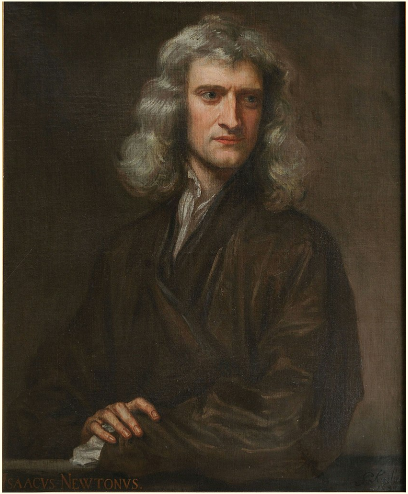
On suppose essentiellement dans ce travail que le sous-espace D de E est le domaine d'un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu et borné (cf. Hille Phillipe [1]), ou bien le domaine commun à une famille finie de générateurs infinitésimaux commutatifs.

Des résultats d'interpolation très généraux ont été obtenus tout récemment par E. Gagliardo [3], [4], à l'aide de sa construction d'espaces inter-

1. *Annali della Scuola Norm. Sup. - Pisa.*

Leibniz et Newton

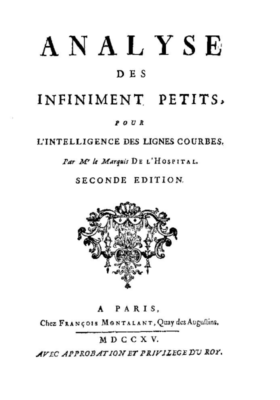
Gottfried Leibniz (1646-1716)



Isaac Newton (1643-1727)

wikipedia

Gottfried Leibniz et Guillaume de l'Hôpital



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par Mr le Marquis DE L'HOSPITAL.
SECONDE EDITION.

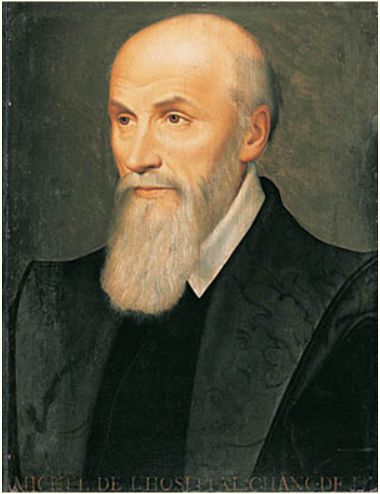
A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT, Quay des Augustins.
M D C C X V.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Gottfried Leibniz (1646-1716)

Guillaume de l'Hôpital (1661-1704)

attention à ne pas se tromper d'hôpital !

Guillaume de l'Hôpital (1661-1704)



Michel de L'Hospital (1503-1507)

correspondance entre Leibniz et de l'Hôpital

Leibnizens

mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

OCT 4 1890 MT. HAMILTON, CAL.

13106.

Erste Abtheilung.

Band I.

Briefwechsel zwischen Leibniz und Oldenburg, Collins, Newton, Galloys, Vitale Giordano.

BERLIN.

Verlag von A. Asher & Comp.

1849.

google.com

Leibniz à de l'Hôpital le 18 mars 1695

[...]

Il ne sera point necessaire aussi, que vous vous borniés aux seules differences puisque, leur calcul est le même avec celuy des sommes, l'un estant seulement reciproque de l'autre. Par exemple j'ay trouvé comme $x^{-1} = 1 : x$ que de même $d^{-1}x = \int x$.

[...]

si m estoit 2, $d^m n$ seroit $d\,dn$, $d^{m-1}n$ seroit dn, $d^{m-2}n$ serait n, $d^{m-3}n$ seroit $\int n$, et $d^{m-4}n$ seroit $\int\int n$ etc.

[...]

Leibniz à de l'Hôpital le 30 septembre 1695

[...]

Mons. Jean Bernoulli me mande qu'il ira droit à Groningue, ayant sa famille avec luy. Il vous aura parlé apparemment d'une ouverture singuliere que je luy ay faite d'une analogie merveilleuse entre les differences ou sommes et les puissances ou multiplications et divisons, en sorte qu'on peut dire dans un certain sens, que les formules avec la suite de leur differences, sçavoir premieres, secondes, troisiemes, sont en progression quasi-géometrique.

[...]

La somme n'estant qu'unc difference, negative on peut demander ce que c'est, qu'une difference dont l'exposant est un nombre rompu, on le peut exprimer per seriem infinitam, sed quid est in Geometria ?

[...]

Leibniz à de l'Hôpital le 30 septembre 1695 *(ii)*

[...]

Vous voyés par là, Monsieur, qu'on peut exprimer par une serie infinie une grandeur comme $d^{\frac{1}{2}}\overline{x}\,\overline{y}$, ou $d^{1:2}\overline{xy}$ quoyque cela paroisse eloigné de la Geometrie, qui ne connoist ordinairement que les differences à exposans entiers affirmatifs, ou les negatifs à l'egard des sommes, et pas encor celles, dont les exposans sont rompus. Il est vray, qu'il s'agit encor de donner $d^{1:2}x$ pro illa serie ; mais encor cela se peut expliquer en quelque façon.

[...]

Ainsi il s'ensuit que $d^{1:2}x$ sera egal à $x.\sqrt[2]{dx : x}$. Il y a de l'apparence qu'on tirera un jour des consequences bien utiles de ces paradoxes, car il n'y a gueres de paradoxes sans utilité.

[...]

de l'Hôpital à Leibniz le 01 décembre 1695

[...]

Vous ouvrez un grand champ de meditations par l'analogie merveilleuse que vous avez decouverte entre les differences et les puissances, et les consequences que vous en tirez déja et dont vous avez bien voulu me faire part sont tres belles. Je trouve bien difficile de se former une idée nette de ces differences qui ont pour exposans des nombres rompus et que vous avez trouvé le moyen d'exprimer par des suites infinies.

[...]

Leibniz à de l'Hôpital le 15 janvier 1696

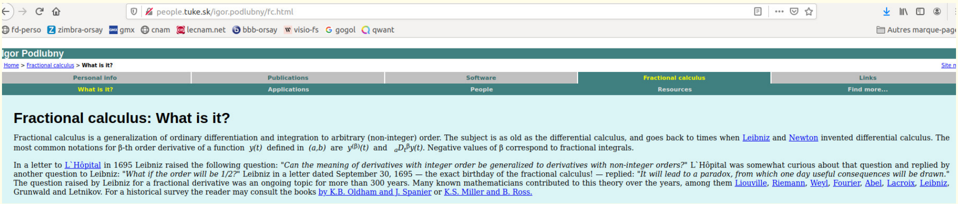
[...]

Quant aux differences dont les exposans sont des nombres rompus, j'avoue qu'on ne les sçauroit comprendre, mais ces sortes de grandeurs quand elles ne seroient qu'imaginaires peuvent servir à trouver des verités réelles. Et il est tousjours vray qu'elles ont fundamentum in re.

[...]

fundamentum in re : à la base [?]
le fondement des choses [?]

introduction à la correspondance de Leibniz


people.tuke.sk/igor.podlubny/fc.html

fd-perso zimbra-orsay gmx cnam lecnam.net bbb-orsay visio-fs gogol qwant Autres marque-page

Igor Podlubny

Home > Fractional calculus > What is it?

Personal info | Publications | Software | Fractional calculus | Links

What is it? | Applications | People | Resources | Find more...

Fractional calculus: What is it?

Fractional calculus is a generalization of ordinary differentiation and integration to arbitrary (non-integer) order. The subject is as old as the differential calculus, and goes back to times when Leibniz and Newton invented differential calculus. The most common notations for β-th order derivative of a function $y(t)$ defined in (a,b) are $y^{(\beta)}(t)$ and ${}_aD_t^{\beta}y(t)$. Negative values of β correspond to fractional integrals.

In a letter to L`Hôpital in 1695 Leibniz raised the following question: "*Can the meaning of derivatives with integer order be generalized to derivatives with non-integer orders?*" L`Hôpital was somewhat curious about that question and replied by another question to Leibniz: "*What if the order will be 1/2?*" Leibniz in a letter dated September 30, 1695 — the exact birthday of the fractional calculus! — replied: "*It will lead to a paradox, from which one day useful consequences will be drawn.*" The question raised by Leibniz for a fractional derivative was an ongoing topic for more than 300 years. Many known mathematicians contributed to this theory over the years, among them Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Abel, Lacroix, Leibniz, Grunwald and Letnikov. For a historical survey the reader may consult the books by K.B. Oldham and J. Spanier or K.S. Miller and B. Ross.

page web d'Igor Podlubny, Košice, people.tuke.sk/igor.podlubny/fc.html


UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

UNIVERSITÉ DE NANTES

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE NANTES
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication
Spécialité : Histoire des Mathématiques

Par
Sandra Bella

De la géométrie et du calcul des infiniment petits : les réceptions de l'algorithme leibnizien en France (1690-1706)

Thèse présentée et soutenue à l'UFR des sciences et techniques, le 23 octobre 2018
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UMR 6629

thèse de Sandra Bella, Nantes, octobre 2018

merci de votre attention !

entre Montréal et Québec