LA DÉRIVATION

Hervé Stève, herve.steve@hotmail.fr

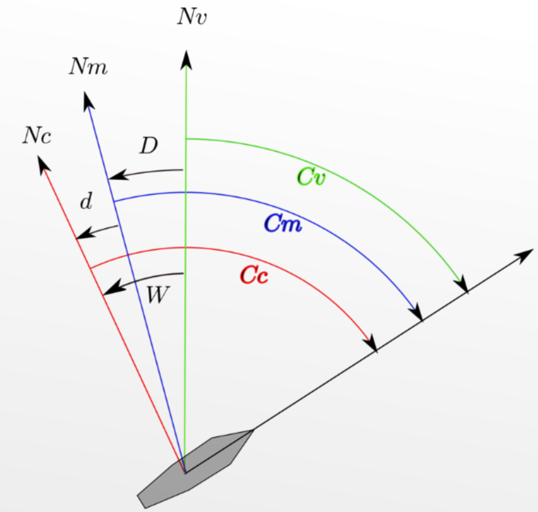
Kafemath Zoom du 4/03/2021

INTRODUCTION

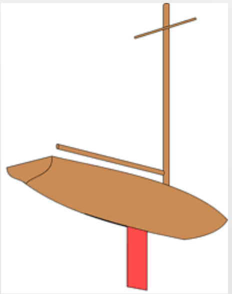
- Définitions
- Calculs de dérivées
- Formules
- Dérivée numérique
- Différentielle, opérateurs différentiels
- Dérivée complexe

DÉRIVE

- La dérive est l'écart entre le cap et la route d'un véhicule qui dépend du vent et/ou du courant



Cc : cap compas suivant son nord Nc
Cm : cap magnétique suivant son nord Nm
Cv : cap vrai suivant le nord géographique Nv

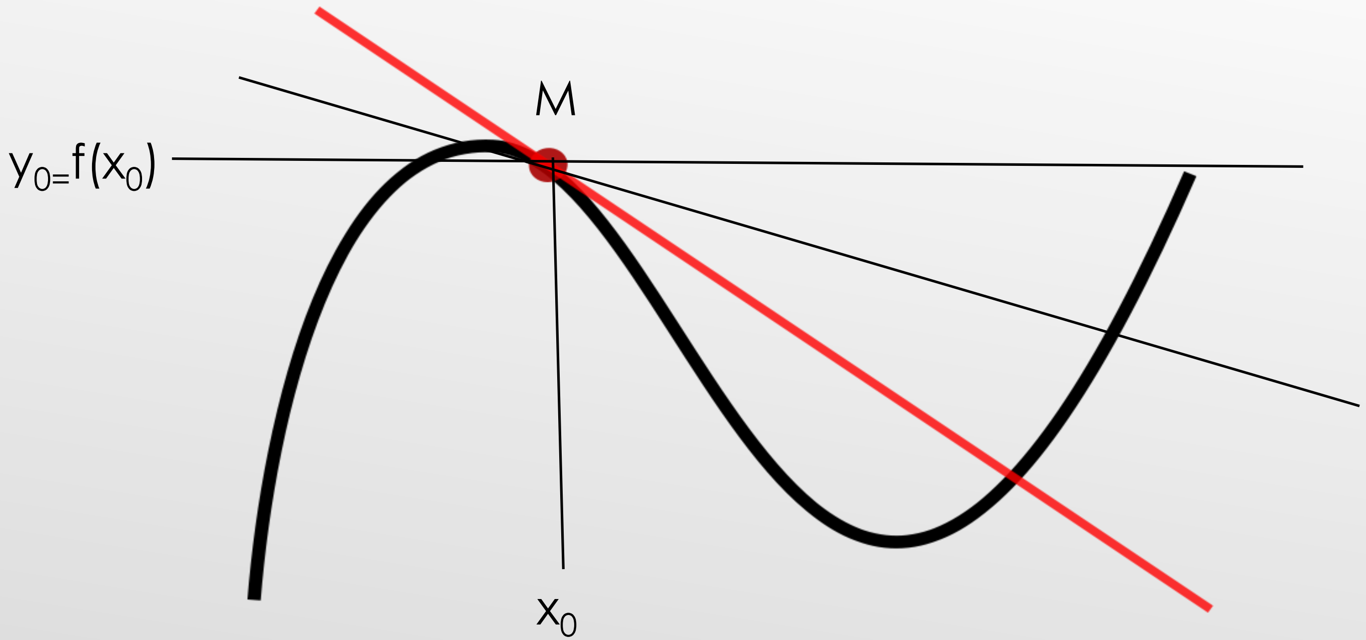


- sur un voilier : la dérive est un plan porteur anti-dérive. Sur un dériveur, la dérive est amovible.

- Sur un avion ou planeur : la dérive est un empennage vertical

PENTE DE LA TANGENTE

- Pour une courbe ou fonction continue, il s'agit d'approcher la valeur de la pente de la tangente (vitesse)



- Si la pente existe, la fonction est dite dérivable en x_0
- Si la pente est positive, cette fonction est dite croissante

sinon elle est décroissante.

- Si la pente est nulle alors la tangente est horizontale en ce point

DÉFINITIONS

- **Fonction** f(x) : fonction réelle à valeurs réelles x, f : Df → R, x → f(x)

avec Df **domaine** de la fonction f

- Calcul de la valeur de la **dérivée** de la fonction f(x) en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

C'est la limite du **taux d'accroissement** $t_{x0}(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ de la fonction f quand le pas h tend vers 0. Si cette limite existe alors on dit que la fonction f est **dérivable** en $x_{0.}$

- **Fonction dérivée** : f' : Df' → R, x → f'(x)

Avec Df' domaine de dérivabilité de la fonction f' (sous-ensemble de Df)

Exemple) la seule fonction égale à sa dérivée est l'exponentielle : $(e')^x = e^x$
Df' = Df = R

- **Fonction primitive** F(x) : sa dérivée est la fonction f(x) i.e. F'(x)=f(x)

NOTATIONS

Dérivée de la fonction f au point a :

- La notation de **Lagrange** : f'(a)

Lagrange est à l'origine du mot dérivée

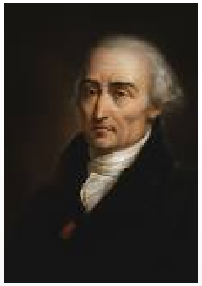
- La notation de **Leibniz** : $\frac{df}{dx}$(a) pour le calcul infinitésimal

attention la notation employée en physique df(a)/dx n'est pas rigoureuse, ce n'est pas vraiment une fraction !

- La notation de **Newton** : $\dot{f}$(a) employée en physique pour une dérivée par rapport au temps. Newton parle de calculs de fluxion.

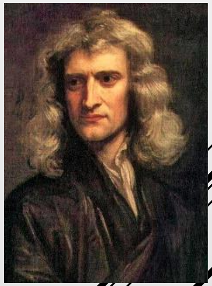
- La notation d'**Euler** : $D_x f$(a)

Généralisation aux dérivées itérées : f''(a) , $\ddot{f}$(a) , $\frac{d^2 f}{dx^2}$(a) , …



Joseph-Louis Lagrange 1736-1813

Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716



Isaac Newton 1643-1727

Leonard Euler 1707-1783

CALCULS DE DÉRIVÉES 1/2

- **Fonction linéaire** $f(x)=ax+b$ avec $Df=R$

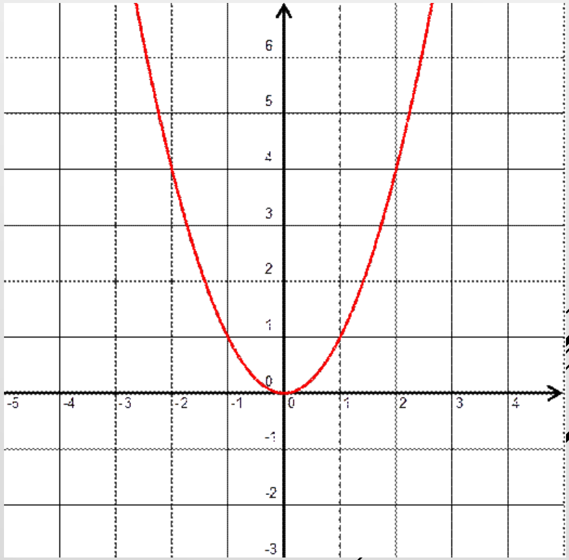
Son taux d'accroissement vaut $t_{x0}(h) = \dfrac{a(x_0+h)+b-ax_0-b}{h} = a$

Le passage à la limite quand h tend vers 0, donc $f'(x) = a$ est constante et $Df'=Df=R$

Si $a=0$, fonction $f(x)=b$ alors la dérivée est nulle pour tout x .

- **Fonction $f(x) = x^2$** avec $Df=R$

$t_{x0}(h) = \dfrac{(x_0+h)^2-x^2_0}{h} = \dfrac{\cancel{x^2_0}+2x_0h+h^2-\cancel{x^2 0}}{h} = 2x_0 + h$



Le passage à la limite quand h tend vers 0,
donc $f'(x) = 2x$ fonction linéaire et $Df'=Df=R$
- si $x<0$, la fonction x^2 est décroissante
- si $x>0$, la fonction x^2 est croissante
- la fn dérivée s'annule en $x=0$

CALCULS DE DÉRIVÉES 2/2

- **Fonction polynomiale** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec Df=R

Calculons la dérivée du monôme x^n pour tout n :

$$t_{x0}(h) = \frac{(x_0+h)^n - x^n_0}{h} = \frac{\cancel{x^n_0} + nX_0^{n-1}h + \dots + h^n - \cancel{x^n_0}}{h} = nX_0^{n-1} + g(h)$$

avec g(h) tend vers 0 quand h tend vers 0

donc $(x^n)' = nx^{n-1}$ est un monôme avec un degré de moins.
Ainsi $f'(x) = n\,a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots\ 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ avec Df'=Df=R

- **Fonction f(x) =** $\sqrt{x}$ avec Df=R^+ (réels positifs)

$$t_{x0}(h) = \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}\,\frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{h}\,\frac{\cancel{x_0}+h\cancel{-x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} \quad \text{avec } x_0>0$$

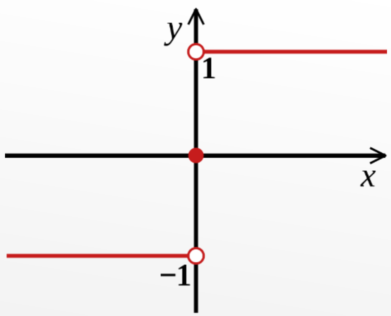
Ce qui donne $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ après passage à la limite , avec Df'=R^{+*} (réels strictement positifs). Cette fonction est donc strictement croissante.

FONCTIONS NON DÉRIVABLES

- **Fonctions discontinues** :

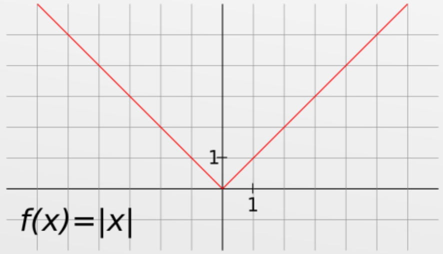
Exemple) la fonction signe f(x)=1 si x>0 =0 si x=0 et et -1 sinon

le taux de variation vaut th(0)= $\frac{1-(-1)}{h} = \frac{2}{h}$ tend vers l'infini quand h tend vers 0 donc f(x) n'est pas dérivable en 0

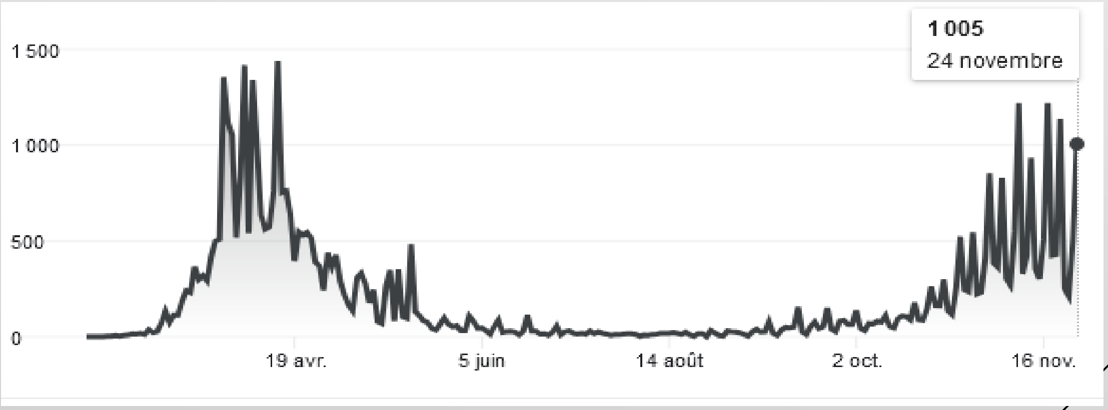


- **Courbes brisées :**

Exemple 1) valeur absolue f(x)=|x|=x si x ≥ 0 et –x sinon
Cette fonction est continue dans R, mais elle a une dérivée discontinue = -1 si x≤0 et =+1 si x≥0
donc elle n'est pas dérivable en 0



Exemple 2) Fractales qui sont des courbes continues jamais dérivables.
Exemple 3) La courbe journalière des décès covid en France



FORMULES / RÈGLES

- **Somme** de dérivées : $(f+g)' = f' + g'$

- **Produit** de dérivées : $(fg)' = fg' + gf'$

$$\begin{aligned} fg(x+h)-fg(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= [f(x+h)-f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h)-g(x)] \end{aligned}$$

On divise par h puis on passe à la limite pour obtenir la formule

- Dérivée de l'**inverse** : $(1/f)' = -f'/f^2$

Idée : $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f(x+h)-f(x)}{hf(x+h)f(x)}$

On en déduit le **quotient** de dérivées : $(f/g)' = (f'g - fg') / g^2$

- **Composée** de dérivées : $(g \circ f)' = (g' \circ f) . f'$

- Dérivée **réciproque** : $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$ (telle que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$)

DÉRIVÉES N-IÈME

- f' est la fonction dérivée première. Donc f est dérivable et sa dérivée est continue, f est dite de **classe C^1**

- f'' = (f')' est la fonction dérivée seconde (dérivée de la dérivée) … lorsqu'elle existe. Donc f est 2 fois dérivable, ses dérivées 1ère et 2nde sont continues, f est C^2

- On note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ la fonction dérivée n-ième, on dit que f est de classe C^n c'est à dire n-fois continûment dérivable.

- Une **fonction de classe C^∞** est une fonction indéfiniment dérivable

Exemple) l'exponentielle car$(e')^x = e^x$ par récurrence

- **Formule de Leibniz** :

(fg)' = f'g + gf'

(fg)'' = (f'g + gf')' = f''g + 2f'g' + fg''

…

$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ coefficient binomiaux

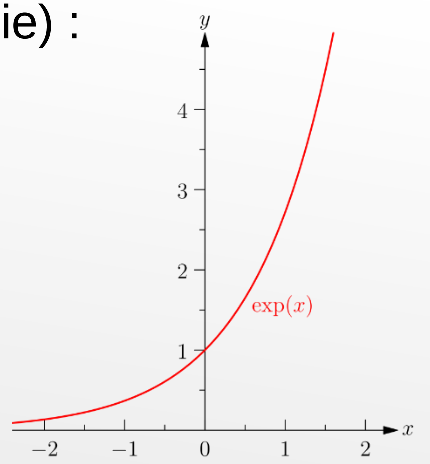
Analogie avec la formule du binôme : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$

DÉRIVÉE DE L'EXPONENTIELLE …

- Fonction connue sous un développement en série (somme infinie) :

Formule d'Euler :

$f(x) = e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^n/n! + \dots$ avec Df=R



- **Calcul de la dérivée** :

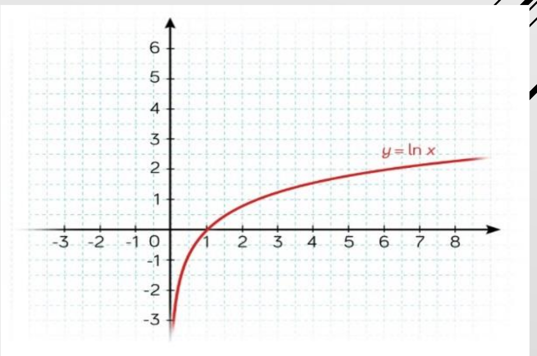
$e^{x+h} - e^x = e^x e^h - e^x = (e^h - 1)\, e^x = (\cancel{1}+h+h^2/2+h^3/6+\dots\cancel{-1})\, e^x$

$\qquad\qquad = h(1+h/2+h^2/6+\dots)\, e^x$

On divise par h puis on passe à limite, on obtient $(e')^x = e^x > 0$ donc Df'=Df=R et cette fonction est strictement croissante

- Dérivée de sa réciproque c.a.d. le logarithme népérien $f^{-1}(x)=\ln(x)$:

On a $\ln'(x) = (f^{-1}{}')(x) = 1/(f' \circ f^{-1})(x) = 1/\ln(e'^x) = 1/\ln(e^x) = 1/x$



Attention : ln(x) est définie dans R^{+*}
et sa dérivée est strictement positive dans ce domaine

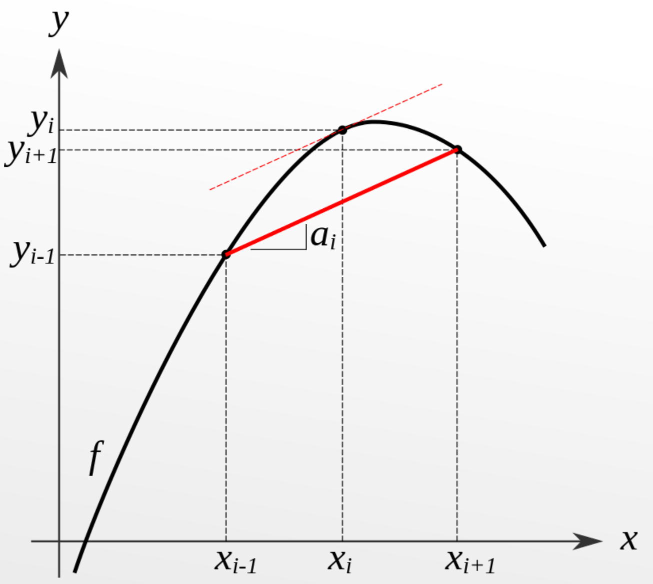
DÉRIVÉE NUMÉRIQUE

- On cherche à approcher la tangente à une courbe/fonction par sa corde :

$$f'(x_i) \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

avec xi point milieu

Applications : courbes expérimentales ou bien lorsque la fonction n’est pas résolue (équations différentielles)



- **Erreurs numériques** :

Soit r précision des nombres pour une machine ($r=10^{-16}$ en double précision)
Si $y_{i+1} - y_{i-1}$ < r alors l’erreur sur la dérivée peut être importante

- **Développement limité** de la fonction f :

À l’ordre 2, soit h le pas d’accroissement
$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + h^2/2\, f''(x) + O(h^2)$ avec $O(h^2)$ tend vers 0 quand h tend vers 0
$f(x-h) = f(x) - h\, f'(x) + h^2/2\, f''(x) + O(h^2)$
D’où $f'x) \approx (f(x+h) – f(x-h)) / 2h$ avec une erreur de méthode en h^2

DIFFÉRENTIELLE

- **Cas réel** (une seule variable) :

Soit y=f(x), on a vu que pour des petites variations $f(x+h) - f(x) \approx h\, f'(x)$.
On pose alors dy= f(x+h) - f(x) et dx=h, et on introduit la différentielle df :

si f dérivable alors **df** = f'(x) dx (passage à la limite)

De plus, si df est **différentiable** alors on obtient **d²f =** f''(x) (dx)² qui est la différentielle d'ordre 2. Et ainsi de suite $\mathbf{d^n f} = f^{(n)}\,(dx)^n$ est la différentielle d'ordre n.

- **Cas à deux variables :**

Soit f(x,y) fonction de R² vers R, alors **df** = $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy$ avec $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ et $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$ dérivées partielles fonctions de R² vers R. Si elles sont de classe C^1 alors df est différentiable :

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(dy)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 f$$

Avec $\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy$ **l'opérateur différentiel** agissant sur la fonction f …

OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL 1/2

- Pour une fonction à une variable, on utilise les dérivées ordinaires, issues des **équations différentielles ordinaires** ou **EDO** :

Exemple) $\frac{\partial u}{\partial t}$ = f(t,u(t)) est une EDO du premier ordre, l'opérateur est $\frac{\partial}{\partial t}$

- Pour une fonction à plusieurs variables, on utilise les dérivées partielles, issues des **équations aux dérivées partielles** ou **EDP** :

Exemple) équation de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t}$ - α $\Delta T = 0$

avec T(x,t) température dépend du temps t et de l'espace x dans R^3 , α constante

Δ opérateur **laplacien** scalaire du 2^{nd} ordre : Δ = $\nabla \cdot \nabla$, · est le produit scalaire

$\nabla \cdot = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$ opérateur **divergence** du 1^{er} ordre

$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ opérateur **gradient** ou nabla du 1^{er} ordre

OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL 2/2

- **Laplacien** Δ = div(grad) = $\nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial z)^2}$

Pierre-Simon de Laplace 1749-1827

- Opérateur rotationnel : opérateur matriciel du premier ordre

$$\text{rot} = \nabla \times = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}$$ et $\times$ est le produit vectoriel

soit F=(F_x F_y F_z), alors $\nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial Fy}{\partial z} \\ \frac{\partial Fx}{\partial z} - \frac{\partial Fz}{\partial x} \\ \frac{\partial Fy}{\partial x} - \frac{\partial Fx}{\partial y} \end{pmatrix}$ est un vecteur

Exemple) les équations de Maxwell dans le vide

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} & \text{(Équation de Maxwell-Faraday);} \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 & \text{(Inexistence des charges magnétiques, parfois appelée équation de Maxwell-Thomson);} \\ \text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{(Équation de Maxwell-Gauss);} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{\jmath} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{(Équation de Maxwell-Ampère).} \end{cases}$$

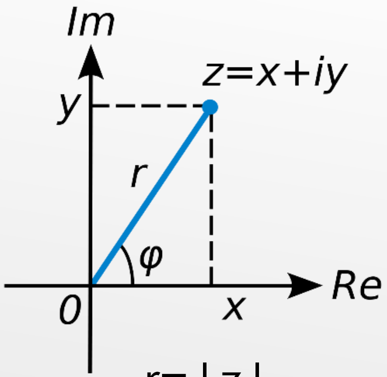
James Clerk Maxwell 1831-1879

DÉRIVÉE COMPLEXE

- Soit f(z) fonction à valeurs complexes définies dans un ouvert U, cette fonction est **C-dérivable** en un point $z_0=x_0 + iy_0$ si :

$$f'(z_0) = \lim_{|u|\to 0} \frac{f(z_0+u)-f(z_0)}{u}$$

avec $u = s + i\,t$, $|u| = \sqrt{s^2+t^2}$ $et\ i^2 = -1$



r=|z|
module de z

- On peut se ramener à une fonction à 2 variables :

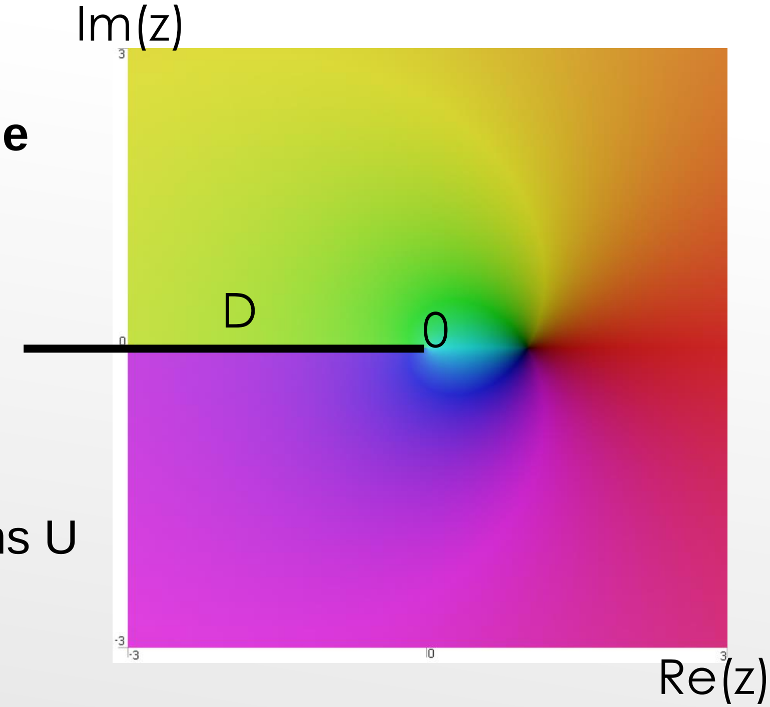
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$$

avec $dz = dx + i\,dy$ et $d\overline{z} = dx - i\,dy$ (conjugué de dz)

si f dérivable en z_0 : $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$

- Une fonction **holomorphe** est une fonction complexe C-dérivable en tout point U ou dans C
- La **fonction entière** d'une fonction complexe est une fonction holomorphe dans C

LOGARITHME COMPLEXE



- Soit L(z) le **logarithme complexe holomorphe** définie dans U tel que :

$$\exp(L(z)) = z$$

- La dérivée de L(z) est 1/z dans C* = C\{0}

- Le logarithme L(z) n'est pas déterminé sur C*
Mais il on peut avoir plusieurs déterminations dans U : $z \to L(z) + 2ik\pi$ avec k entier dans Z

- Il existe une détermination de L(z) sur un ouvert C*\D avec D demi-droite gauche d'extrémité 0 (appelée « coupure ») : cette détermination du logarithme complexe est la seule qui prolonge le logarithme réel

- **Fonction puissance** : sur U de C*, il existe L(z) alors pour tout a dans C
$z^a = \exp(a\, L(z))$ que l'on peut dériver $(z^a)' = a\, z^a$

Pour a=1/n , on peut prolonger la fonction racine n-ième en $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ avec la coupure D

CONCLUSION

- Nous avons abordé le calcul de dérivées élémentaires, la dérivée nième, le calcul différentiel, quelques opérateurs différentiels et la dérivée complexe.

D’autres thèmes connexes :

- Lien avec l’**optimisation** : lorsque la dérivée s’annule, cela peut être le minimum ou le maximum d’une fonction.
- La **dérivée algébrique** : D(a x b) = D(a) x b + a x D(b)
- Généralisation aux **dérivée fractionnaires** …: existe t-il un opérateur linéaire H tq $H^2 f = D f = d/dx f = f'$?
- Après le calcul différentiel, le **calcul intégral** …