

(tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la...)
Modélisation mathématique de l'épidémie de COVID-19
(...sans jamais oser le demander)

Laurent DUMAS

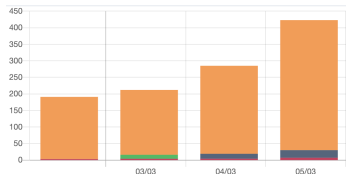
Laboratoire de Mathématiques de Versailles
Université de Versailles Saint Quentin (UVSQ)

Kafemath, le 21 janvier 2021

- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en quelques dates
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?
- 3 Modélisation mathématique pour le COVID-19 pendant la première vague
- 4 Modélisation mathématique pour le COVID-19 après la première vague
- 5 Quelques scénarios pour 2021
- 6 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin

- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en quelques dates
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?
- 3 Modélisation mathématique pour le COVID-19 pendant la première vague
- 4 Modélisation mathématique pour le COVID-19 après la première vague
- 5 Quelques scénarios pour 2021
- 6 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin

Retour au 5 mars 2020

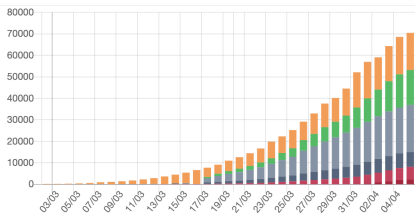


Le point sur l'épidémie due au coronavirus : plus de 100 000 cas dans le monde, l'Italie pays le plus touché en Europe

L'Italie a enregistré 49 nouveaux décès en 24 heures, soit 197 morts au total. Le nombre de personnes infectées atteint plus de 4 630.

Le Monde avec AFP - Publié le 06 mars 2020 à 06h43 - Mis à jour le 07 mars 2020 à 07h17

Retour au 5 avril 2020

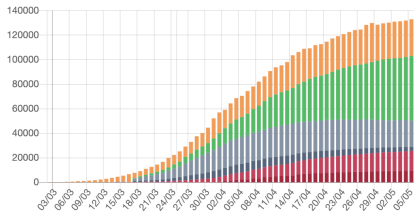


Coronavirus : en Europe, où 47 000 personnes sont mortes, des appels à continuer à respecter le confinement

Les derniers chiffres de la mortalité en Italie, où le bilan total frôle les 16 000 décès, laissent espérer qu'un plateau a été atteint. Aux Etats-Unis, les autorités préparent la population à une période « horrible » et à l'aggravation de la crise sanitaire.

Le Monde avec AFP, AP et Reuters - Publié le 05 avril 2020 à 05h41 - Mis à jour le 06 avril 2020 à 14h50

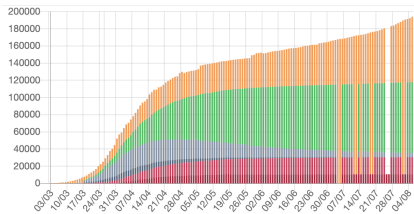
Retour au 5 mai 2020



Coronavirus : ce qu'il faut retenir de la journée du 5 mai

En France, 330 décès supplémentaires en 24 heures sont à déplorer, mais les hospitalisations sont en forte baisse sur l'ensemble du territoire. Les cinq départements des Hauts-de-France ne sont plus classés « rouges » concernant la circulation du Covid-19 et la tension sur les services hospitaliers.

Retour au 5 août 2020



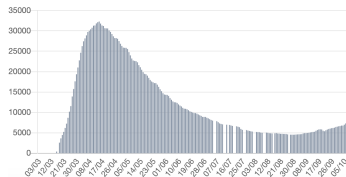
Les plages du Sud (et pas seulement) sont prises d'assaut, comme ici dans la cité phocéenne, toujours peuplée il est vrai. Photo Clement MAHOUEAU/JAF

Le nombre de nouveaux cas de coronavirus au plus haut depuis fin mai

Mardi, le conseil scientifique qui guide le gouvernement dans la lutte contre le Covid-19 avait prévenu que la France ne serait pas à l'abri d'une deuxième vague à l'automne.

Publié le 05 août 2020 à 21h05 - Mis à jour le 06 août 2020 à 11h35 - Le Monde avec AFI

Retour au 5 octobre 2020



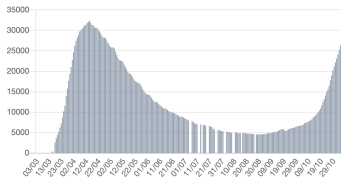
Les nouvelles restrictions à Paris pour endiguer l'épidémie de Covid-19 appelées à évoluer tous les 15 jours

Les pouvoirs publics comptent ajuster les restrictions, qui entreront en vigueur mardi 6 octobre, en fonction des données sanitaires. Au risque de rendre illisible la politique menée.

Publié le 05 octobre 2020 à 18h52 - Mis à jour le 06 octobre 2020 à 08h10 · Denis Cosnard



Retour au 5 novembre 2020



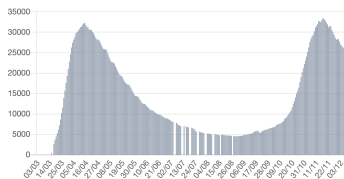
Fermeture des rayons « non essentiels » des grandes surfaces, soutien aux commerçants : retrouvez les annonces de Jean Castex concernant le reconfinement



Le premier ministre s'exprimait dimanche soir au 20 heures de TF1. Tous les produits qui ne peuvent plus être vendus dans les commerces de proximité (fleurs, livres...), ne pourront pas non plus l'être dans les grandes surfaces.

Publié le 01 novembre 2020 à 19h26 - Mis à jour le 02 novembre 2020 à 00h57 - Le Monde

Retour au 5 décembre 2020

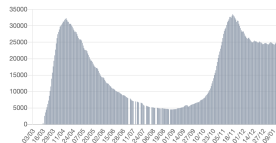


À l'hôpital de La Timone, à Marseille, le 13 novembre 2020. Daniel Cole / AP

Covid-19 : la baisse des hospitalisations en réanimation se poursuit

L'épidémie de Covid-19 a causé la mort de plus de 53 000 personnes en France.

Retour au 15 janvier 2021



Une infirmière reçoit le vaccin de Pfizer-BioNTech contre le Covid-19, à Poissy, le 8 janvier. CHRISTOPHE

III Les pays européens exaspérés par les retards de livraison des vaccins Pfizer-BioNTech

Les livraisons européennes du vaccin de Pfizer-BioNTech vont connaître du retard dans les prochaines semaines, en raison de modifications dans le processus de production, selon le fabricant.

Publié le 15 janvier 2021 à 20h18, mis à jour hier à 13h10 - Virginie Malingre

Quelques questions souvent posées à un mathématicien modélisateur pendant la crise du COVID-19

- Au début de l'épidémie
 - Quels sont les scénarios possibles ?
 - Qu'est ce que l'immunité collective ?
 - Quand aura lieu le pic de l'épidémie ?
 - Combien vaut R_0 ?
- Après la première vague
 - Y aura-t-il une deuxième vague ?
 - Quand aura lieu le pic de la deuxième vague ?
- Actuellement
 - Y aura-t-il une troisième vague ?
 - Quel est l'effet du variant anglais ?
 - Quel sera l'effet du vaccin ?

- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en quelques dates
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?**
- 3 Modélisation mathématique pour le COVID-19 pendant la première vague
- 4 Modélisation mathématique pour le COVID-19 après la première vague
- 5 Quelques scénarios pour 2021
- 6 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin

Qu'est ce qu'un modèle mathématique ?

- Un modèle mathématique associé à un problème (biologique, physique, économique, sociétal) est une **représentation simplifiée** de celui-ci **sous forme d'équations**.
- Il existe des modèles mathématiques dans de nombreux domaines : météorologie, trafic routier, médecine, etc...
- Un modèle repose sur des **paramètres** qu'il est nécessaire de **fixer avec des données expérimentales**.
- Une fois ses paramètres correctement fixés, le modèle permet de **prédire l'évolution du phénomène étudié** en résolvant les équations associées sur un ordinateur.

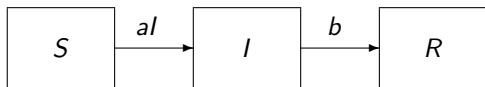
Qu'est ce qu'un modèle mathématique en épidémiologie ?

- En épidémiologie, le modèle a pour objectif de **suivre et de prédire l'évolution d'une épidémie au cours du temps**.
- La plupart des modèles en épidémiologie consiste à **classer l'ensemble de la population en différentes catégories** (ou compartiments) et à **représenter** de manière simplifiée **les échanges** entre ces catégories.
- **Le modèle SIR** est le plus connu et le plus simple de ces modèles. Il a encore été abondamment utilisé sous diverses formes pour modéliser l'épidémie de COVID-19.

Description du modèle SIR

- Le **modèle SIR** est dû à Kermack et McKendrick et **date de 1927**.
- L'idée consiste à représenter l'évolution de l'épidémie dans le temps à travers les échanges entre **3 catégories d'individus** :
 - **les individus susceptibles** d'être contaminés (en nombre $S(t)$ à l'instant t).
 - **les individus infectés** (en nombre $I(t)$).
 - **les individus en rémission ou décédés** (en nombre $R(t)$)

- On représente schématiquement le modèle sous la forme de compartiments :



- Les compartiments sont reliés entre eux à travers un taux d'échange :
 - aI : où le paramètre a est le **taux de transmission**
 - b : le paramètre b est le **taux de rémission**

Écriture mathématique du modèle SIR

- Le modèle SIR se traduit mathématiquement par un **système d'équations différentielles** reliant les variations temporelles des 3 catégories de populations à leurs valeurs à un instant t :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -aS(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = aS(t)I(t) - bI(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = bI(t). \end{cases}$$

- Ce système est complété par des **conditions initiales** correspondant aux valeurs actuelles (instant $t = 0$) de chacune des sous-populations d'individus :

$$S(0) = S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 > 0, \quad R(0) = N - S_0 - I_0$$

Résolution numérique du modèle SIR

- Ce problème possède alors une unique solution qu'il est possible d'approcher avec un **logiciel de calcul numérique** (Scilab ou Matlab).
- On peut également remarquer mathématiquement qu'on a une conservation du nombre d'individus :

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

- **Le modèle peut être adimensionalisé** en divisant S , I et R par N . On a alors $0 \leq S(t) \leq 1$, $0 \leq I(t) \leq 1$, $0 \leq R(t) \leq 1$ et $S(t) + I(t) + R(t) = 1$.

Taux de reproduction et taux de reproduction effectif

- On dit que l'épidémie se propage si le nombre de personnes infectées augmente au début de l'épidémie. Cela signifie exactement que :

$$\frac{aS(0)}{b} \simeq \frac{a}{b} > 1$$

- On appelle R_0 le **taux de reproduction de l'épidémie**. Il peut-être vu comme le nombre moyen qu'une personne infectée va contaminer durant sa période de contagiosité :

$$R_0 = \frac{a}{b}$$

- Après le démarrage de l'épidémie, on parlera ensuite de **taux de reproduction effectif R** à l'instant t :

$$R = \frac{aS(t)}{b}$$

Premières utilisations du modèle SIR

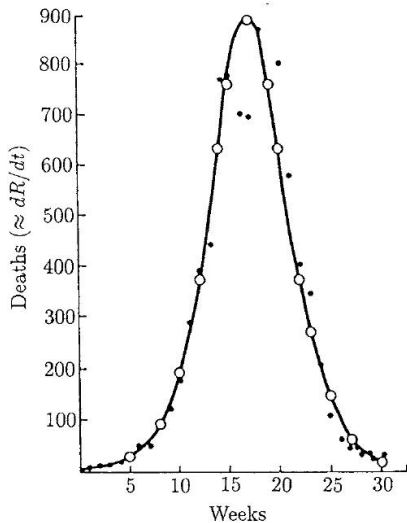


Figure 10.2. Bombay plague epidemic of 1905–1906. Comparison between the data (●) and theory (○) from the (small) epidemic model and where the number of deaths is approximately dR/dt given by (10.16). (After Kermack and McKendrick 1927)

Premières utilisations du modèle SIR

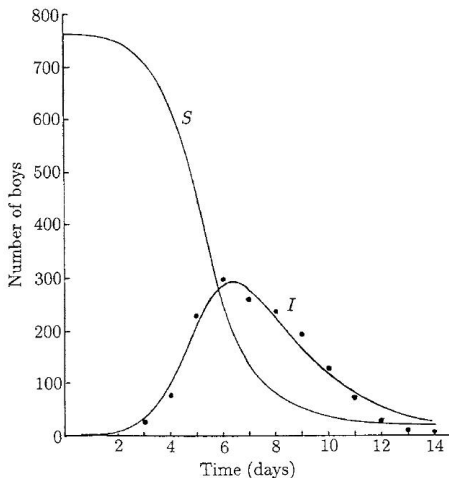


Figure 10.3. Influenza epidemic data (●) for a boys' boarding school as reported in the British medical journal, *The Lancet*, 4th March 1978. The continuous curves for the infectives (I) and susceptibles (S) were obtained from a best fit numerical solution of the SIR system (10.1)–(10.3): parameter values $N = 763$, $S_0 = 762$, $I = 1$, $\rho = 202$, $r = 2.18 \times 10^{-3}$ /day. The conditions for an epidemic to occur, namely, $S_0 > \rho$, are clearly satisfied and the epidemic is severe since R/ρ is not small.

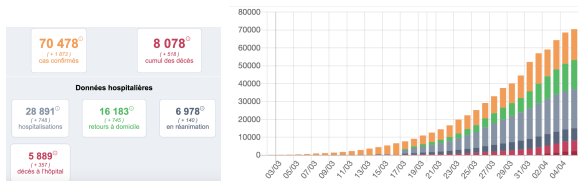
- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en quelques dates
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?
- 3 Modélisation mathématique pour le COVID-19 pendant la première vague**
- 4 Modélisation mathématique pour le COVID-19 après la première vague
- 5 Quelques scénarios pour 2021
- 6 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin

Hypothèses de modélisation pour l'épidémie de COVID-19

- On suppose tout qu'abord que le virus se propage de manière homogène à l'échelle du pays et que les populations ne se déplacent pas ou peu.
- On étudie **deux scénarios possibles** :
 - **Scénario sans confinement** : on laisse la maladie se propager afin d'atteindre le seuil d'immunité collective en faisant décroître $S(t)$: dans ce cas, le **taux de transmission** est **constant** et le taux de reproduction R baisse avec la décroissance de $S(t)$.
 - **Scénario avec confinement** : on cherche à freiner la maladie (fermeture des écoles, confinement, etc...) : dans ce cas le **taux de transmission va décroître avec le temps** : $t \mapsto a(t)$) et faire baisser le taux de reproduction R .
- On suppose que le **taux de rémission b est constant**.
- Autres hypothèses : immunité acquise, non saisonnalité du virus.

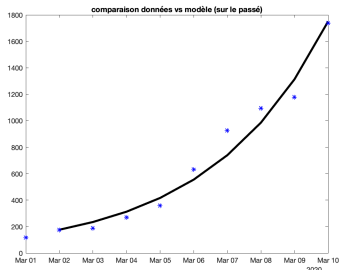
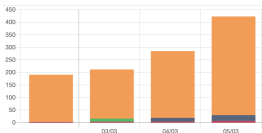
Données utilisées pour le COVID-19 (première vague)

- Les données collectées chaque jour pendant l'épidémie et fournies par Santé Publique France vont servir à calculer les paramètres a et b du modèle.
- Jusqu'au début du mois de mai, tous les tests concernent uniquement les personnes ayant développé des symptômes graves.
- Pour estimer l'ensemble des cas, une solution consiste à multiplier la fraction de cas recensés par un facteur multiplicatif constant (10 par exemple).



Paramètres SIR pour le COVID-19 (sans confinement)

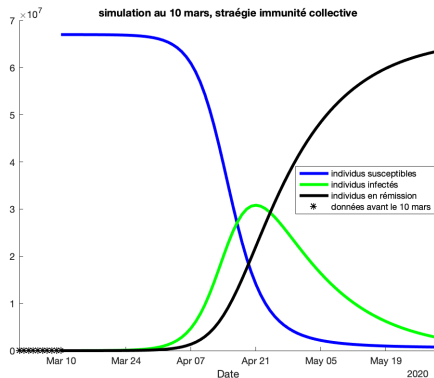
- On se place au démarrage de l'épidémie (début Mars).
- Afin de déterminer les **paramètres a et b du modèle**, on ajuste l'évolution du modèle SIR avec les données **sur une fenêtre dans le passé de 8 jours** :



- Pour cela, on résout un **problème de minimisation** pour déterminer a et b .
- Une fois a et b fixés, on peut faire évoluer le modèle dans le futur.

Evolution au 10 mars (sans confinement)

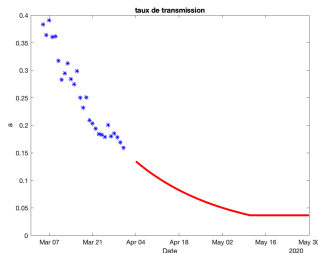
- Au 10, mars, on trouve $a \simeq 0.364$ et $b \simeq \frac{1}{13}$.
- Cela conduit à une valeur $R0 \simeq \frac{a}{b} = 4.73$ au 10 mars.



- L'immunité collective est atteinte lorsque $R = 1$ soit $S(t) = \frac{b}{a} \simeq 0.21$.
- Une tel scénario aurait été catastrophique d'un point de vue sanitaire.

Paramètres SIR pour le COVID-19 (avec confinement)

- En calculant les taux de transmissions journaliers avec la méthode précédente pendant le mois de mars, on constate que ceux-ci décroissent en raison de la prise de conscience collective puis du confinement.



- On suppose à présent que le **taux de transmission décroît de manière exponentielle** jusqu'au 11 mai :

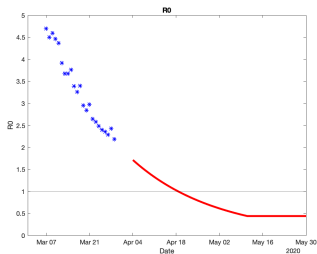
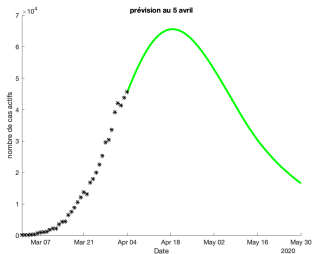
$$a(t) = c \exp(-dt)$$

puis reste stable ensuite.

- Les paramètres c et d deviennent les nouveaux paramètres du modèle qu'il est nécessaire d'ajuster avec le **même principe précédent de minimisation**.

Evolution au 5 avril (avec confinement)

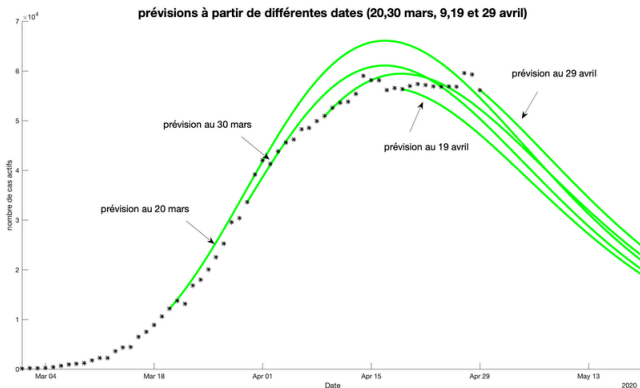
- Sous les nouvelles hypothèses précédentes et à la date du 5 avril, le pic de l'épidémie est **correctement prédit** (autour du 15 avril).
- La décroissance de R sous la valeur 1 à partir de cette date provient de la décroissance du taux de transmission et non de l'obtention d'une immunité collective.



- La **valeur de R** , autour de 2 au 5 avril, était estimée valoir **autour de 0.5 un mois plus tard... ce qui a bien été confirmé !**

Validation de la modélisation de la première vague

- Le scénario avec confinement a permis d'obtenir une très bonne prévision de l'épidémie à partir de fin mars et jusqu'à la fin du confinement début mai.



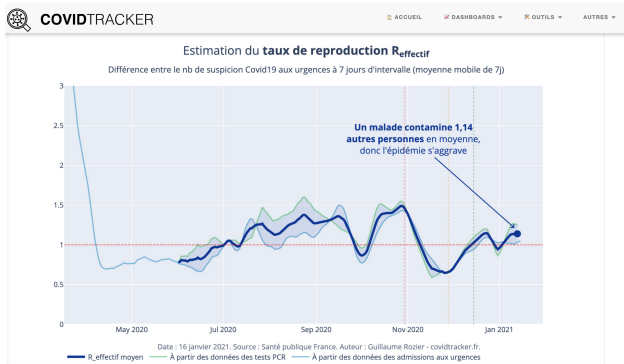
- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en quelques dates
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?
- 3 Modélisation mathématique pour le COVID-19 pendant la première vague
- 4 Modélisation mathématique pour le COVID-19 après la première vague**
- 5 Quelques scénarios pour 2021
- 6 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin

Difficultés de modélisation

- A partir du premier déconfinement, il est devenu très difficile de prédire l'évolution de l'épidémie pour plusieurs raisons :
 - Les **nouvelles stratégies de test massif** rendent plus difficile l'exploitation des données du nombre de cas.
 - **Le taux de transmission varie fortement** au gré des changements des comportements individuels et des mesures sanitaires.
 - **le nombre de personnes immunisées est encore inconnu** en raison de la proportion importante des personnes asymptomatiques.
- Seul le nombre de personnes hospitalisées (ou en réanimation) est un indicateur fiable (mais tardif) pouvant être utilisé pour déterminer les paramètres des modèles.

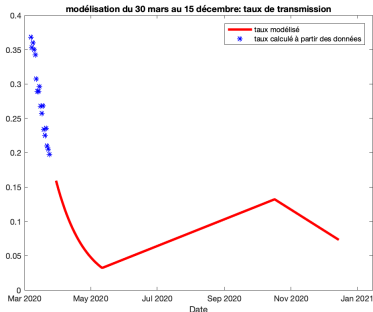
Estimation du R à partir des données

- Une autre façon d'estimer le **taux de reproduction R** est de le faire **uniquement avec les données** (en comparant la situation à J et à J-7).
- Avec cette méthode, la valeur obtenue n'a pas une forme facilement prédictive depuis le premier confinement.



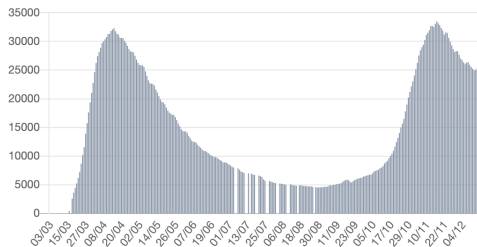
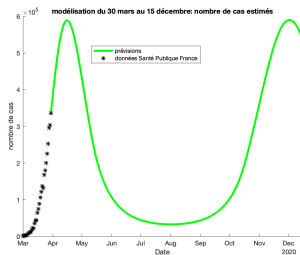
Modélisation du 30 mars au 15 décembre : hypothèses

- On peut choisir de modéliser un **taux de transmission** qui évolue en trois **périodes** entre mars et décembre :
 - 1^{ere} période : 1^{er} mars-11 mai : **décroissance exponentielle**
 - 2^{eme} période : 12 mai- 17 octobre (couvre feu) : **croissance affine**
 - 3^{eme} période : 18 octobre- 15 décembre : **décroissance affine**
- Les caractéristiques des 2 dernières périodes sont ajustées avec les données d'hospitalisation.



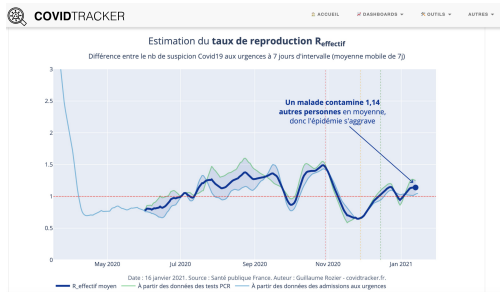
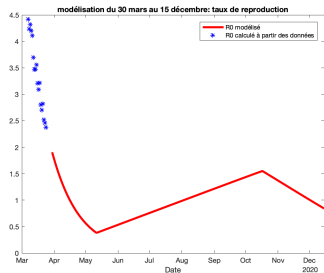
Modélisation du 30 mars au 15 décembre : nombre de cas

- Le nombre de cas obtenu avec ce modèle reproduit la forme du nombre d'hospitalisations (avec un facteur multiplicatif de l'ordre de 20).



Modélisation du 30 mars au 15 décembre : valeur de R

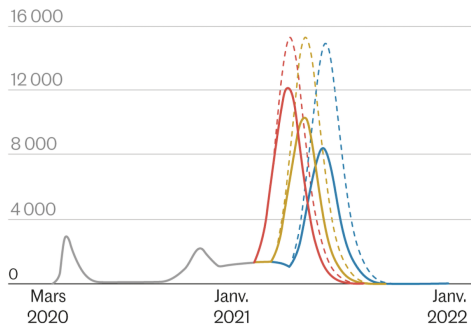
- La valeur de R issue du modèle est "relativement proche" de la valeur de R obtenue avec les données.



- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en quelques dates
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?
- 3 Modélisation mathématique pour le COVID-19 pendant la première vague
- 4 Modélisation mathématique pour le COVID-19 après la première vague
- 5 Quelques scénarios pour 2021**
- 6 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin

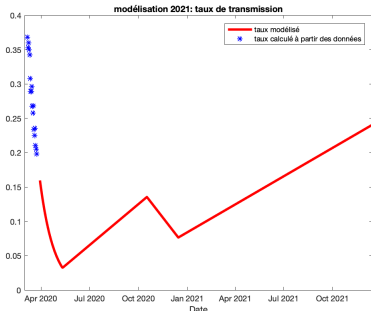
Nouveaux éléments dans la modélisation

- Deux nouveaux éléments dans la modélisation sont à prendre en compte pour 2021 :
 - L'apparition de nouveaux variants plus contagieux
 - Le démarrage de la campagne de vaccination
- Le dernier avis du conseil scientifique (janvier 2021) élabore une série de scénarios en prenant en compte ces éléments (voir figure ci-dessous).



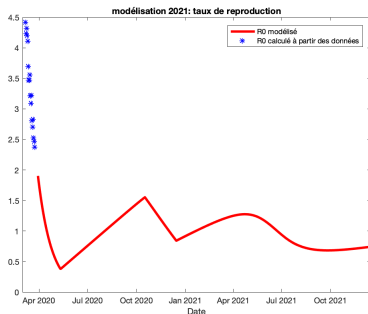
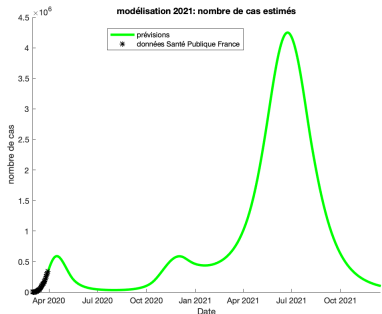
Evolution du taux de transmission en 2021

- On choisit de modéliser un **taux de transmission qui croît sur l'année 2021** en raison de la propagation de variants plus contagieux et malgré d'éventuelles mesures restrictives.



Premier scénario pour 2021 (sans vaccin)

- Sans campagne de vaccination et sans mesures sanitaires strictes, la troisième vague dépasse très largement les deux premières vagues.
- L'immunité collective est acquise en juillet 2021 au prix d'un nombre de cas encore très important.



Prise en compte de la vaccination dans le modèle

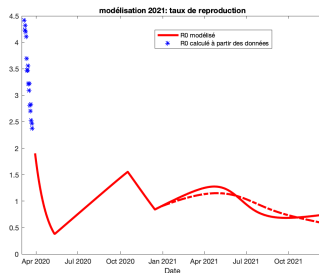
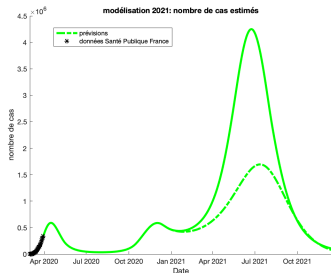
- La vaccination d'une fraction constante de la population à partir de la date $t = 0$ consiste à rajouter un terme dans les équations de S et R :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -aS(t)I(t) - K(t, S(t)) \\ \frac{dI(t)}{dt} = aS(t)I(t) - bI(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = bI(t) + K(t, S(t)). \end{cases}$$

- On peut choisir par exemple $K(t, S(t)) = K_0$ pour une vaccination d'une fraction régulière de la population ou $K(t) = K_1 S(t)$ pour une vaccination proportionnelle au nombre de personnes restant à vacciner.
- La campagne de vaccination peut s'arrêter lorsque l'immunité collective est atteinte, c'est à dire par exemple $K(t, S(t)) = 0$ si $S(t) < 0.3$.

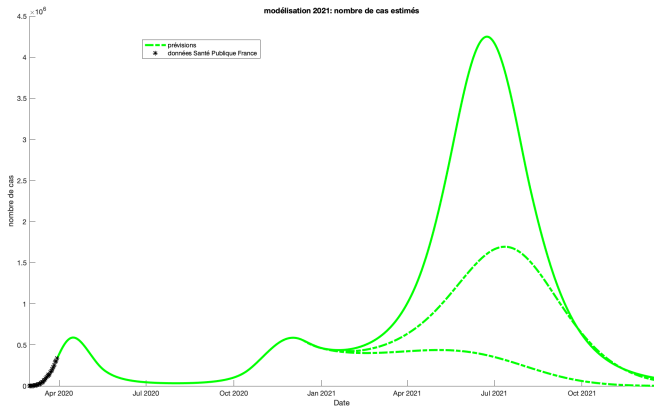
Second scénario pour 2021 (avec vaccin)

- Dans ce second scénario, le **taux de transmission est inchangé** mais on ajoute une **campagne vaccinale régulière à partir du 1er janvier 2021**.
- Les traits pointillés correspondent à la nouvelle évolution du nombre de cas, en supposant vacciner ici un nombre constant de personnes par jour (environ 50000).



Second scénario pour 2021 (avec vaccin)

- Si on vaccine deux fois plus de personnes par jour (environ 100 000 par jour), la troisième vague n'a pas lieu.



Conclusion

- Dans toutes les périodes de cette crise, les **mathématiques** ont eu une importance essentielle pour **prédire, alerter, et anticiper**.
- Il est important cependant de ne pas oublier les **limitations d'un modèle mathématique** liées à ses hypothèses simplificatrices et l'incertitude sur ses paramètres.
- Au final, ce sont toujours les individus qui ont le dernier mot !

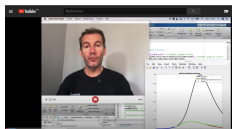
- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en quelques dates
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?
- 3 Modélisation mathématique pour le COVID-19 pendant la première vague
- 4 Modélisation mathématique pour le COVID-19 après la première vague
- 5 Quelques scénarios pour 2021
- 6 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin**

Ouvrages et ressources en ligne

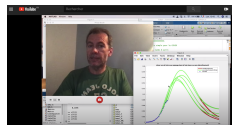
- Le hors série Tangente " mathématiques et médecine"
- Le site Florilège des Maths renvoyant à de nombreuses références :
<https://www.florilege-maths.fr/fiche/mathematiques-et-pandemie/>
- Le site de Marc Lavielle (INRIA et CMAP) de modélisation du COVID :
<http://webpopix.org/covidix19.html>
- La section consacrée au COVID sur le site de IMOSE :
<https://www.imose.fr/covid-19>

Deux vidéos pour revoir l'essentiel de la présentation

- 5 minutes pour expliquer les modèles mathématiques de prédiction du COVID (mise en ligne le 4 avril 2020)



- Un retour vers le futur pour valider le modèle mathématique d'évolution du COVID en 6 minutes (mise en ligne le 6 avril 2020)



Ces deux vidéos sont visibles sur [ma chaîne Youtube "Laurent Dumas"](#) avec d'autres vidéos présentant les outils de mathématiques appliquées (au niveau Licence).