LA FACTORIELLE

Hervé Stève, herve.steve@hotmail.fr

Kafemath Zoom du 17/12/2020

INTRODUCTION

- Factorielle des entiers
- Combinatoire, triangle de Pascal, suite de Fibonacci
- L'exponentielle, la fonction exponentielle
- Les fonctions gamma et digamma, Gaussienne et formule de Stirling

FACTORIELLE D'UN ENTIER

- **Définition mathématique** :

la factorielle d'un entier naturel n est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n.

- **Notation** 1808 : $n!$

de Christian Kramp (1760 –1826), prof. de math à Strasbourg

- **Combinatoire** :

Quel est le nombre de combinaisons possibles de placement de 10 personnes autour d'une table ?

La première personne a 10 possibilités pour s'assoir,
la seconde 9, la troisième 8, …soit :

10! = 10 x 9 x 8 x 7 x 8 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 =
3 628 800 combinaisons ou permutations

FACTORIELLE

- **Définition** (formule) :

n! = 1 x 2 x 3 x … x (n-1) x n = $\prod_{i=1}^{n} i$ avec la notation produit

Ainsi : 1! = 1 ; 2! = 1 x 2 = 2 ; 3! = 1 x 2 x 3 = 6 ; 4! = 1 x 2 x 3 x 4 = 24

- **Produit vide** :

0! = 1 par convention (produit vide, 1 élément neutre de la multiplication)
De même : a puissance 0 = a^0 = 1

- **Récurrence** :

Soit 0! = 1 et pour tout entier n>0, n! = (n-1)! x n

- **Fonction gamma** :

Prolongement Γ(x) telle que Γ(n)=(n-1)! pour tout entier n>0 et Γ(1)=0!=1
avec x est nombre réel ou complexe

Passage à la limite : $\lim_{n\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$ (fonction croissante)
Ainsi on a ∞! = ∞

FORMULES DE FACTORIELLE

n! + (n+1)! = n! + (n+1)n! = (n+2)n!

(n+1)! – n! = n n!

(n+1)! -1 = 1x1! + 2x2! + 3x3! + … + n n! = $\sum_{p=1}^{n} p\,p!$

Srinivasa Ramanujan,
Indien 1887-1920

Problème de Brocard : n! + 1 = k² ?
3 solutions connues : 4! + 1 = 5² = 25
5! + 1 = 11² = 121
7! + 1 = 71² = 5 041

Formules de **Ramanujan** :

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{1103+26390n}{396^{4n}}}.$$

$$1-\frac{3!}{(1!\,2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!\,4!)^3}x^4-\ \dots$$
$$=\left(1+\frac{x}{1!^3}+\frac{x^2}{2!^3}+\cdots\right)\left(1-\frac{x}{1!^3}+\frac{x^2}{2!^3}-\cdots\right)$$

COMBINATOIRE

- **Arrangements** :

Il existe n! arrangements de n objets distincts : A_n = n!

Il existe A_n^p arrangements de p objets parmi n :
A_n^p = n x (n-1) x … x (n-p+1) = n! / (n-p)!

Exemple) une phrase sans répétition de mot est un arrangement du dictionnaire, soit environ 250 mots dans une page parmi 65 000 mots dans le Larousse illustré 2020 d'où :
A_{65000}^{250} = environ 10 puissance 4000 arrangements !

- **Combinaisons** : l'ordre n compte pas

$\binom{n}{p} = C_n^p = A_n^p$ / A_p^p = n! / p!(n-p)! = n x (n-1) x … (n-p+1) / p x (p-1) x … x 2 x 1

$C_n^0 = C_n^n$ = n! / 1!n! = 1 ; si p > n , C_n^p = 0

Exemple) tirage au loto de 6 boules parmi 49 (avant 2008)
C_{49}^6 = 13 983 816 donc on a environ 1 sur 14 millions de gagner le gros lot !
soit en moyenne 500 000€ !

TRIANGLE DE PASCAL

- **Blaise Pascal** 1623-1662 :
Philosophe, théologien, inventeur et Mathématicien

- Machine à calculer à 19 ans et 50 prototypes !
- Géométrie projective
- Problème des « parties » et probabilités

0: 1
1: 1 1
2: 1 2 1
3: 1 3 3 1
4: 1 4 6 4 1
5: 1 5 10 10 5 1

- **Triangle de Pascal** : en occident mais connu en Chine, Perse, …
avec plus petit ou égal à n :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$$

ainsi pour n=5 et p=3 on a 10 = 4 + 6

- **Coefficients binomiaux de Newton** : $C_n^p = \binom{n}{p}$

$(x + y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, x^{n-p} y^p$

$(x + y)^n = x^n + n\, x^{n-1}y + n(n-1)/2\, x^{n-2}y^2 + \dots + n(n-1)/2\, x^2y^{n-2} + n\, xy^{n-1} + y^n$

Exemple) $(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

SUITE DE FIBONACCI

- **Leonardo Fibonacci**, pisan 1175-1250

- Suite F^n d'entiers naturels :
  $F_2=F_1=1$
  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour n>1

- Identification avec le triangle de
Pascal : voir figure en sommant
Les termes selon une diagonale

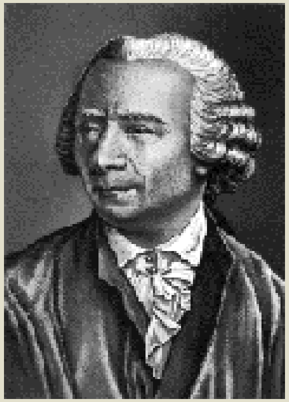
$F_1=1$
$F_2=1$
$F_3=2$
$F_4=3$
$F_5=5$
$F_6=8$
$F_7=13$
$F_8=21$

0: 1
1: 1 1
2: 1 2 1
3: 1 3 3 1
4: 1 4 6 4 1
5: 1 5 10 10 5 1
6: 1 6 15 20 15 6 1
7: 1 7 21 35 35 21 7 1

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1-k}^{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1-k)!}{k!(n-1-2k)!}$$

Exemple)
$F_6 = C_5^0 + C_4^1 + C_3^2 + C_2^3 + C_1^4 + C_0^5$= 1 + 4 + 3x2/2 + 0 + 0 + 0 = 8

EXPONENTIELLE



- **Leonard Euler** 1707-1787

L'exponentielle **e** est la somme infinie
ou série des inverses des factorielles entières :

e = $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ = 1 + 1 + ½ + 1/6 + 1/24 + … ≈ 2,718 281 828 459…

Appelé nombre d'Euler ou constante de Neper*

Euler montre 1737 que **e** est irrationnel (nombre qui n'est pas le rapport de 2 entiers), et en 1873, Charles Hermite (1822-1901) montre qu'il est transcendant (nombre qui n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers)

(*) John Napier (1550-1617) en construisant la table des logarithmes (le Napier log) obtient la constante 1/e ~ 0,367879… (fortuitement) : NapLog (sinθ) vaut 10^7 entre θ =21°35' (0,367854…) et θ=21°36' (0,368124…)

FONCTION EXPONENTIELLE

Fonction sous la forme d'une série : exp(x) = $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Hypothèse selon H. Lehning : Euler a posé $e^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots$

Pour x=0, on obtient A=1

Comme $e^{2x}=(e^x)^2$, on obtient :
$1 + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + 16Ex^4 \ldots = (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots)^2$
D'où par identification des termes en x : 2B = 2B
Puis des termes en x^2 : $4C = B^2 + 2C$ d'où $C=B^2/2$
Puis en en x^3 : $8D = 2D + 2BC$ d'où $D=B^3/6$ …etc

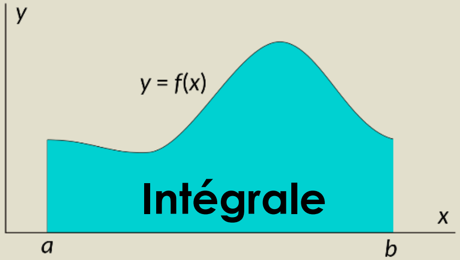
Et donc $e^x = 1 + Bx + B^2/2\ x^2 + B^3/6\ x^3 + B^4/24\ x^4 + \ldots$

Comme la fonction exponentielle est égale à sa dérivée :
$e^x = (e^x)' = B + Bx + B^2/2\ x^2 + B^3/6\ x^3 + \ldots$
alors on déduit que B=1 d'où $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \ldots$

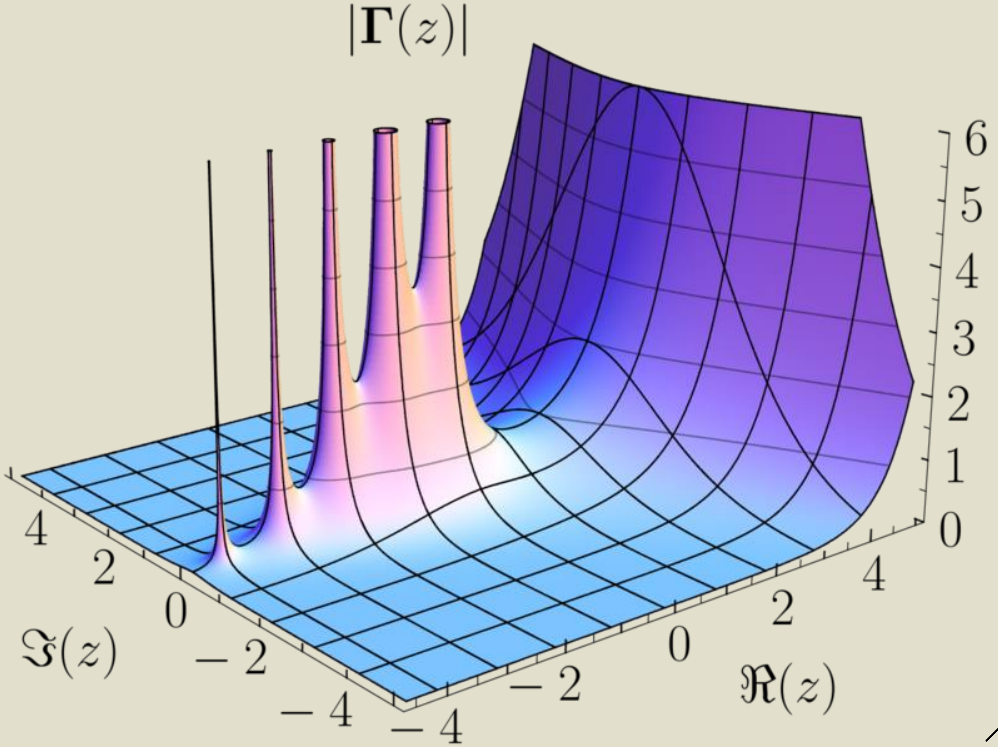
Et on retrouve la formule de la constante d'Euler **e**

LA FONCTION GAMMA

- **fonction gamma d'Euler** :



Soit z tel que Re(z)>0 un nombre du demi-plan complexe,
l'application Γ : z → $\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$
Γ(z) se prolonge sur presque tout le plan complexe en
vérifiant la relation récurrence Γ(1) =1 et Γ(z+1) = z Γ(z) pour z dans C \ (-N) c.a.d.
on retire les entiers négatifs : ainsi Γ(0) n'est pas défini.



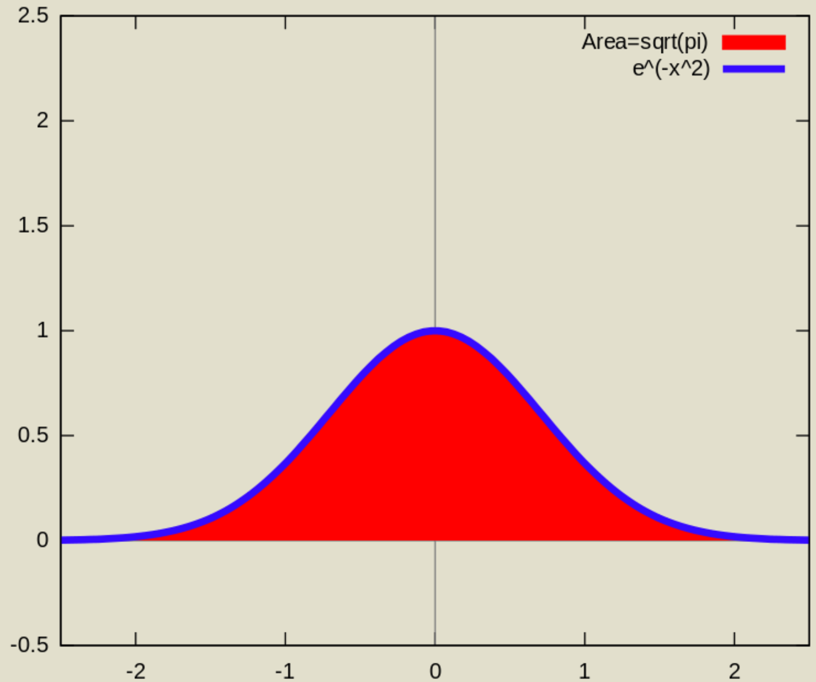
LA GAUSSIENNE

$\Gamma(½) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du$ en posant t=u² donc dt=2u du

est l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$ qui vaut $\sqrt{\pi}$

$1/\sqrt{\pi}$ Γ(½) densité de probabilité de la loi normale centrée en 0 (espérance) d'écart type σ=1/√2

Appelée aussi
courbe en cloche



Par récurrence on en déduit Γ(3/2) = Γ(½ +1) = Γ(½)/2 = $\sqrt{\pi}/2$

Et ainsi on obtient : Γ(n+ ½) = $\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$

Et aussi Γ(½) = Γ(- ½ +1) = - Γ(- ½)/2 d'où Γ(- ½) = -2 Γ(½) = $-2\sqrt{\pi}$

LA FONCTION DIGAMMA

Introduite par James **Stirling** écossais 1692-1770 : c'est la **fonction dérivée logarithmique** de la fonction gamma :

$$\Psi(z) = \ln'(\Gamma(z)) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \text{ avec } \Gamma'(z) = \int_0^{\infty} \ln t \;\; t^{z-1} e^{-t} dt$$

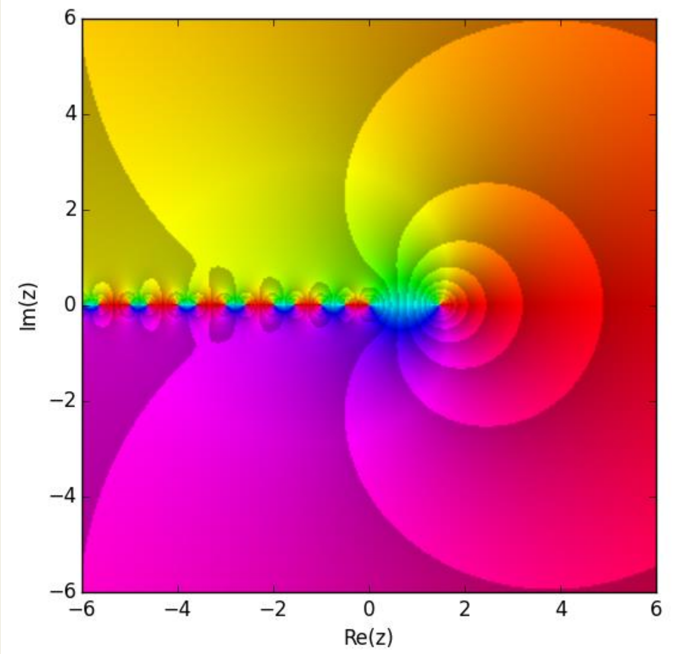
Comme $\Gamma(n) = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1)$, on a aussi :

$\Psi(n) = 1 + ½ + 1/3 + \ldots + 1/n\text{-}1 = H_{n-1}$ n-1 ième nombre harmonique

La relation de récurrence devient :

$$\Psi(1) = \int_0^{\infty} \ln t \;\; e^{-t} dt = -\gamma$$

$$\Psi(z+1) = \Psi(z) + 1/z$$



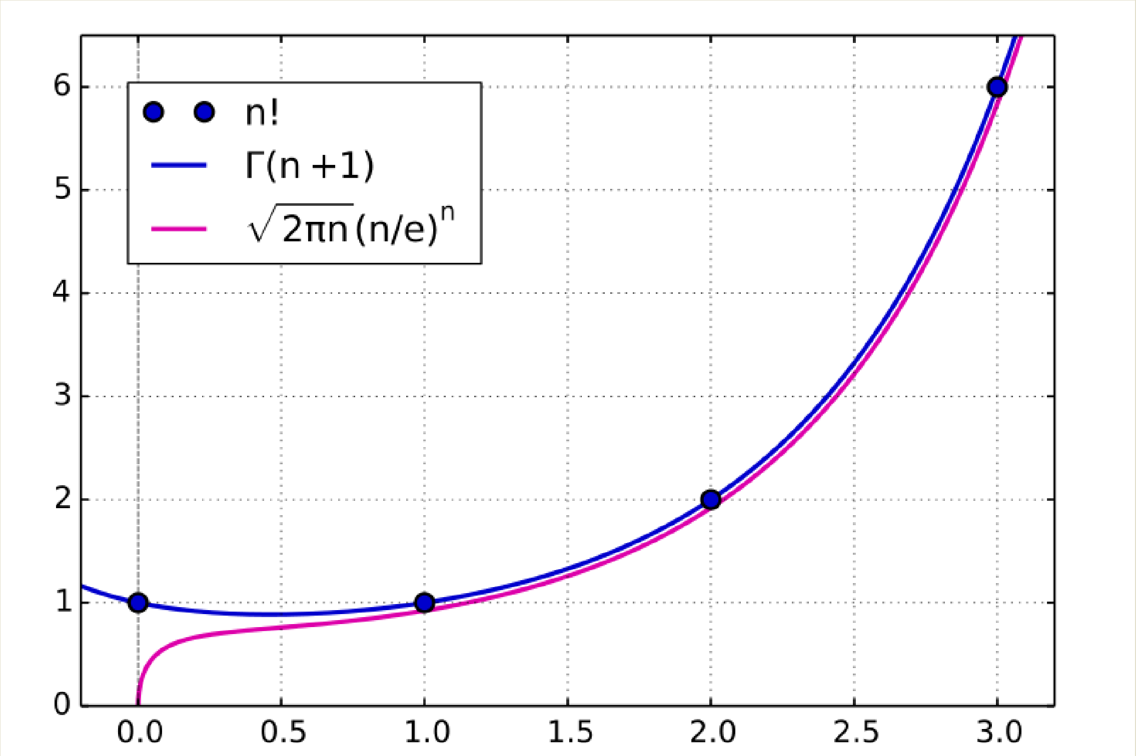
avec γ = 0,577215… constante d'Euler-Mascaroni qui est la limite entre la série harmonique et le logarithme naturel :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(1+1/2+1/3+\ldots+1/n - \ln(n) \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \gamma + \psi(n+1) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-nt}}{e^t - 1} \right) dt$$

LA FORMULE DE STIRLING

- Formule d'Abraham Moivre (1712) : pour n grand $n! \sim C\, n^{n+1/2}\, e^{-n}$
- James Stirling : $C = \sqrt{2\pi}$ à partir de la fonction gamma Γ d'Euler



Pour n grand : $\ln(n!) \sim n \ln(n) - n$
avec ln logarithme népérien

ENTROPIE

- Entropie statistique de **Ludwig Boltzmann** (autrichien 1844-1906) :

$$S = k \ \ln \Omega$$

  avec S entropie en J/K (joule par Kelvin) : mesure du désordre

  $k=1{,}380\ 649 \times 10^{-23}$ J K^{-1} constante de Boltzmann

  Ω nombre d’états microscopiques ou de configurations

- Ordre parfait : $\Omega = 1 \text{ d'où } S = 0$

- $\Omega = \mathrm{N}!$ arrangements d’où S ≈ kN ln N d’après Stirling

- Un gaz dans un volume V contient environ $6{,}022 \times 10^{23}$ molécules, chaque molécules est définies selon 3 paramètres spatiaux et 1 paramètre d’énergie (agitation thermique) …

  pour un gaz parfait on obtient $\Omega \approx 10^{5\ 10^{24}}$ d’où S = 159 J K^{-1} pour 1 mole