Les diviseurs d'un entier et leurs mystères

Kafemath – Paris

Jean-Marie De Koninck

19 novembre 2020

Plan

Plan

1. Les diviseurs d'un entier

Plan

1. Les diviseurs d'un entier
2. La fonction $\tau(n)$

Plan

1. Les diviseurs d'un entier
2. La fonction $\tau(n)$
3. Les diviseurs de deux nombres consécutifs

Plan

1. Les diviseurs d'un entier
2. La fonction $\tau(n)$
3. Les diviseurs de deux nombres consécutifs
4. Une conjecture de Paul Erdős

Plan

1. Les diviseurs d'un entier
2. La fonction $\tau(n)$
3. Les diviseurs de deux nombres consécutifs
4. Une conjecture de Paul Erdős
5. Un lien entre le monde réel et le monde complexe

Plan

Plan

Le nombre de diviseurs d'un entier

Le nombre de diviseurs d'un entier

- Un entier positif d est appelé un *diviseur* de l'entier positif n si n/d est un entier.

Le nombre de diviseurs d'un entier

- Un entier positif d est appelé un *diviseur* de l'entier positif n si n/d est un entier.
- Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12

Le nombre de diviseurs d'un entier

- Un entier positif d est appelé un *diviseur* de l'entier positif n si n/d est un entier.
- Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12
- Les diviseurs de 13 sont 1 et 13

Le nombre de diviseurs d'un entier

- Un entier positif d est appelé un *diviseur* de l'entier positif n si n/d est un entier.
- Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12
- Les diviseurs de 13 sont 1 et 13
- $\tau(n) =$ le nombre de diviseurs positifs de n

Le nombre de diviseurs d'un entier

- Un entier positif d est appelé un *diviseur* de l'entier positif n si n/d est un entier.
- Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12
- Les diviseurs de 13 sont 1 et 13
- $\tau(n) =$ le nombre de diviseurs positifs de n
- $\tau(n) = \tau(q_1^{a_1} \cdot q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1)$

Le nombre de diviseurs d'un entier

- Un entier positif d est appelé un *diviseur* de l'entier positif n si n/d est un entier.
- Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12
- Les diviseurs de 13 sont 1 et 13
- $\tau(n) =$ le nombre de diviseurs positifs de n
- $\tau(n) = \tau(q_1^{a_1} \cdot q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1)$
- $\tau(12) = \tau(2^2 \cdot 3) = (2 + 1)(1 + 1) = 6$

La somme des diviseurs

La somme des diviseurs

$\sigma(n) =$ la somme des diviseurs positifs de n

La somme des diviseurs

$\sigma(n) =$ la somme des diviseurs positifs de n
$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

La somme des diviseurs

$\sigma(n) =$ la somme des diviseurs positifs de n
$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$
n est appelé un *nombre parfait* si $\sigma(n) = 2n$

La somme des diviseurs

$\sigma(n)$ = la somme des diviseurs positifs de n

$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

n est appelé un *nombre parfait* si $\sigma(n) = 2n$

Les nombres 6, 28, 496, 8128 et 33 550 336 sont parfaits

La somme des diviseurs

$\sigma(n)$ = la somme des diviseurs positifs de n

$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

n est appelé un *nombre parfait* si $\sigma(n) = 2n$

Les nombres 6, 28, 496, 8128 et 33 550 336 sont parfaits

$$\begin{aligned} &n \text{ est un nombre parfait pair} \\ &\quad \Longleftrightarrow \exists \text{ un premier } p \text{ tel que } n = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right), \\ &\qquad \text{où } 2^p - 1 \text{ est premier} \end{aligned}$$

La somme des diviseurs

$\sigma(n)$ = la somme des diviseurs positifs de n
$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$
n est appelé un *nombre parfait* si $\sigma(n) = 2n$
Les nombres 6, 28, 496, 8128 et 33 550 336 sont parfaits

$$\begin{aligned} & n \text{ est un nombre parfait pair} \\ & \quad \Longleftrightarrow \exists \text{ un premier } p \text{ tel que } n = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right), \\ & \qquad \text{où } 2^p - 1 \text{ est premier} \end{aligned}$$

On ne sait pas s'il existe des nombres parfaits impairs

La somme des diviseurs

$\sigma(n)$ = la somme des diviseurs positifs de n
$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$
n est appelé un *nombre parfait* si $\sigma(n) = 2n$
Les nombres 6, 28, 496, 8128 et 33 550 336 sont parfaits

$$\begin{aligned} &n \text{ est un nombre parfait pair} \\ &\quad\iff \exists \text{ un premier } p \text{ tel que } n = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right), \\ &\qquad\qquad \text{où } 2^p - 1 \text{ est premier} \end{aligned}$$

On ne sait pas s'il existe des nombres parfaits impairs
Un tel nombre devrait être $> 10^{1500}$ et avoir au moins 10 facteurs premiers distincts

La valeur moyenne du nombre de diviseurs

La valeur moyenne du nombre de diviseurs

- En moyenne, un entier positif n possède environ $\log n$ diviseurs

La valeur moyenne du nombre de diviseurs

- En moyenne, un entier positif n possède environ $\log n$ diviseurs
- Cela découle du fait qu'il existe une constante $\theta > 0$ telle que

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\theta}\right)$$

La valeur moyenne du nombre de diviseurs

- En moyenne, un entier positif n possède environ $\log n$ diviseurs
- Cela découle du fait qu'il existe une constante $\theta > 0$ telle que

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\theta}\right)$$

- 1840: Dirichlet démontre que l'on peut choisir $\theta = 1/2$

La valeur moyenne du nombre de diviseurs

- En moyenne, un entier positif n possède environ $\log n$ diviseurs
- Cela découle du fait qu'il existe une constante $\theta > 0$ telle que

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^\theta\right)$$

- 1840: Dirichlet démontre que l'on peut choisir $\theta = 1/2$
- 1916: G.H. Hardy et E. Landau démontrent que $\theta \geq 1/4$

La valeur moyenne du nombre de diviseurs

- En moyenne, un entier positif n possède environ $\log n$ diviseurs
- Cela découle du fait qu'il existe une constante $\theta > 0$ telle que

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\theta}\right)$$

- 1840: Dirichlet démontre que l'on peut choisir $\theta = 1/2$
- 1916: G.H. Hardy et E. Landau démontrent que $\theta \geq 1/4$
- 2003: Martin Huxley montre que $\theta \leq 131/416 \approx 0,31490$

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

- On a $\tau(14) = \tau(15) = 4$ et $\tau(44) = \tau(45) = 6$

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

- On a $\tau(14) = \tau(15) = 4$ et $\tau(44) = \tau(45) = 6$

Existe-t-il une infinité d'entiers positifs n tels que $\tau(n) = \tau(n+1)$?

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

- On a $\tau(14) = \tau(15) = 4$ et $\tau(44) = \tau(45) = 6$

Existe-t-il une infinité d'entiers positifs n tels que $\tau(n) = \tau(n+1)$?

- 1981: Claudia Spiro démontre que l'équation $\tau(n) = \tau(n+5040)$ possède une infinité de solutions.

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

- On a $\tau(14) = \tau(15) = 4$ et $\tau(44) = \tau(45) = 6$

Existe-t-il une infinité d'entiers positifs n tels que $\tau(n) = \tau(n+1)$?

- 1981: Claudia Spiro démontre que l'équation $\tau(n) = \tau(n+5040)$ possède une infinité de solutions.
- 1984: Roger Heath-Brown démontre que l'équation $\tau(n) = \tau(n+1)$ admet une infinité de solutions.

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

- On a $\tau(14) = \tau(15) = 4$ et $\tau(44) = \tau(45) = 6$

Existe-t-il une infinité d'entiers positifs n tels que $\tau(n) = \tau(n+1)$?

- 1981: Claudia Spiro démontre que l'équation $\tau(n) = \tau(n+5040)$ possède une infinité de solutions.
- 1984: Roger Heath-Brown démontre que l'équation $\tau(n) = \tau(n+1)$ admet une infinité de solutions.

Existe-t-il une infinité d'entiers positifs n tels que $\tau(n) = \tau(n+1) = \tau(n+2)$?

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

- On a $\tau(14) = \tau(15) = 4$ et $\tau(44) = \tau(45) = 6$

Existe-t-il une infinité d'entiers positifs n tels que $\tau(n) = \tau(n+1)$?

- 1981: Claudia Spiro démontre que l'équation $\tau(n) = \tau(n+5040)$ possède une infinité de solutions.
- 1984: Roger Heath-Brown démontre que l'équation $\tau(n) = \tau(n+1)$ admet une infinité de solutions.

Existe-t-il une infinité d'entiers positifs n tels que $\tau(n) = \tau(n+1) = \tau(n+2)$?
Étant donné un entier $k \geq 3$ quelconque, existe-t-il un entier positif n tel que

$$\tau(n+1) = \tau(n+2) = \cdots = \tau(n+k) \ ?$$

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

Rappel:

$$\tau(n) = \tau(q_1^{a_1} \cdot q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1)$$

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

Rappel:

$$\tau(n) = \tau(q_1^{a_1} \cdot q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1)$$

Considérons maintenant la focntion

$$\beta(n) = \beta(q_1^{a_1} \cdot q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}) = a_1 a_2 \cdots a_r$$

Les diviseurs de deux nombres consécutifs

Rappel:

$$\tau(n) = \tau(q_1^{a_1} \cdot q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1)$$

Considérons maintenant la focntion

$$\beta(n) = \beta(q_1^{a_1} \cdot q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}) = a_1 a_2 \cdots a_r$$

- 2009: De Koninck et Luca:
  Étant donné un entier $k \geq 2$ quelconque, il existe un entier positif n tel que

$$\beta(n+1) = \beta(n+2) = \cdots = \beta(n+k)$$

A-t-on souvent $\sigma(n) = \sigma(n+1)$?

A-t-on souvent $\sigma(n) = \sigma(n+1)$?

Les plus petites solutions de $\sigma(n) = \sigma(n+1)$ sont

$$14,\ 206,\ 957,\ 1334,\ 1364,\ 1634,\ 2685,\ 2974,\ 4364$$

A-t-on souvent $\sigma(n) = \sigma(n+1)$?

Les plus petites solutions de $\sigma(n) = \sigma(n+1)$ sont

$$14,\ 206,\ 957,\ 1334,\ 1364,\ 1634,\ 2685,\ 2974,\ 4364$$

Existe-t-il une infinité d'entiers positifs n tels que $\sigma(n) = \sigma(n+1)$?

A-t-on souvent $\sigma(n) = \sigma(n+1)$?

Les plus petites solutions de $\sigma(n) = \sigma(n+1)$ sont

$$14,\ 206,\ 957,\ 1334,\ 1364,\ 1634,\ 2685,\ 2974,\ 4364$$

Existe-t-il une infinité d'entiers positifs n tels que $\sigma(n) = \sigma(n+1)$?

Probablement, mais on ne sait pas le démontrer.

A-t-on souvent $\sigma(n) = \sigma(n+1)$?

Les plus petites solutions de $\sigma(n) = \sigma(n+1)$ sont

$$14,\ 206,\ 957,\ 1334,\ 1364,\ 1634,\ 2685,\ 2974,\ 4364$$

Existe-t-il une infinité d'entiers positifs n tels que $\sigma(n) = \sigma(n+1)$?

Probablement, mais on ne sait pas le démontrer.

On ne connait aucun entier n tel que

$$\sigma(n) = \sigma(n+1) = \sigma(n+2)$$

La distance entre les diviseurs consécutifs d'un entier

La distance entre les diviseurs consécutifs

La distance entre les diviseurs consécutifs

Soit $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{\tau(n)} = n$ la suite des diviseurs consécutifs d'un entier n.

La distance entre les diviseurs consécutifs

Soit $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{\tau(n)} = n$ la suite des diviseurs consécutifs d'un entier n.

Pour chaque $n \geq 2$, posons

$$H(n) = \sum_{i=2}^{\tau(n)} \frac{1}{(d_i - d_{i-1})}.$$

La distance entre les diviseurs consécutifs

Soit $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{\tau(n)} = n$ la suite des diviseurs consécutifs d'un entier n.

Pour chaque $n \geq 2$, posons

$$H(n) = \sum_{i=2}^{\tau(n)} \frac{1}{(d_i - d_{i-1})}.$$

- 1986: De Koninck et Ivić démontrent qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{n \leq x} H(n) = C\,x + O\left(\frac{x}{\log^{1/3} x}\right).$$

La distance entre les diviseurs consécutifs

Soit $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{\tau(n)} = n$ la suite des diviseurs consécutifs d'un entier n.

Pour chaque $n \geq 2$, posons

$$H(n) = \sum_{i=2}^{\tau(n)} \frac{1}{(d_i - d_{i-1})}.$$

- 1986: De Koninck et Ivić démontrent qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{n \leq x} H(n) = C\,x + O\left(\frac{x}{\log^{1/3} x}\right).$$

Cela signifie qu'en général les diviseurs d'un entier sont loins les uns des autres.

La distance entre les diviseurs consécutifs

La distance entre les diviseurs consécutifs

- 1948: Paul Erdős conjecture que presque tous les entiers n possèdent deux diviseurs d_1 et d_2 tels que $d_1 < d_2 \leq 2d_1$.

La distance entre les diviseurs consécutifs

- 1948: Paul Erdős conjecture que presque tous les entiers n possèdent deux diviseurs d_1 et d_2 tels que $d_1 < d_2 \leq 2d_1$. Autrement dit, la plupart des nombres ont deux diviseurs proches.

La distance entre les diviseurs consécutifs

- 1948: Paul Erdős conjecture que presque tous les entiers n possèdent deux diviseurs d_1 et d_2 tels que $d_1 < d_2 \leq 2d_1$. Autrement dit, la plupart des nombres ont deux diviseurs proches.
  Exemple: $n = 15$: $d_1 = 3$ et $d_2 = 5$ sont tels que $3 < 5 \leq 2 \cdot 3 = 6$.

La distance entre les diviseurs consécutifs

- 1948: Paul Erdős conjecture que presque tous les entiers n possèdent deux diviseurs d_1 et d_2 tels que $d_1 < d_2 \leq 2d_1$. Autrement dit, la plupart des nombres ont deux diviseurs proches.
  Exemple: $n = 15$: $d_1 = 3$ et $d_2 = 5$ sont tels que $3 < 5 \leq 2 \cdot 3 = 6$.
  Exemple: $n = 119 = 7 \cdot 17$ n'a pas deux "diviseurs proches"

La distance entre les diviseurs consécutifs

- 1948: Paul Erdős conjecture que presque tous les entiers n possèdent deux diviseurs d_1 et d_2 tels que $d_1 < d_2 \leq 2d_1$. Autrement dit, la plupart des nombres ont deux diviseurs proches.
  Exemple: $n = 15$: $d_1 = 3$ et $d_2 = 5$ sont tels que $3 < 5 \leq 2 \cdot 3 = 6$.
  Exemple: $n = 119 = 7 \cdot 17$ n'a pas deux "diviseurs proches"
- 1984: Maier et Tenenbaum démontrent cette conjecture.

La distance entre les diviseurs consécutifs

- 1948: Paul Erdős conjecture que presque tous les entiers n possèdent deux diviseurs d_1 et d_2 tels que $d_1 < d_2 \leq 2d_1$. Autrement dit, la plupart des nombres ont deux diviseurs proches.
  Exemple: $n = 15$: $d_1 = 3$ et $d_2 = 5$ sont tels que $3 < 5 \leq 2 \cdot 3 = 6$.
  Exemple: $n = 119 = 7 \cdot 17$ n'a pas deux "diviseurs proches"
- 1984: Maier et Tenenbaum démontrent cette conjecture. Ils démontrent davantage: "presque tous les entiers n possèdent deux diviseurs d_1 et d_2 tels que

$$d_1 < d_2 \leq (1+\varepsilon)d_1$$

quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance".

La distance entre les diviseurs consécutifs

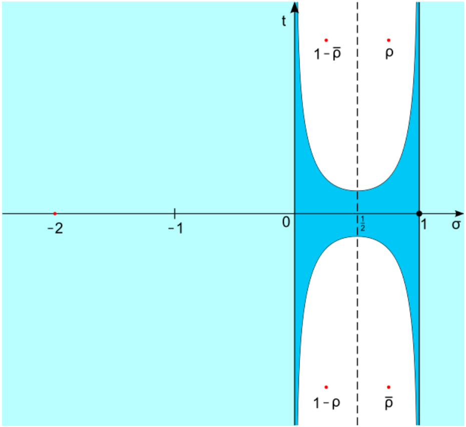
- 1948: Paul Erdős conjecture que presque tous les entiers n possèdent deux diviseurs d_1 et d_2 tels que $d_1 < d_2 \leq 2d_1$.
  Autrement dit, la plupart des nombres ont deux diviseurs proches.
  Exemple: $n = 15$: $d_1 = 3$ et $d_2 = 5$ sont tels que $3 < 5 \leq 2 \cdot 3 = 6$.
  Exemple: $n = 119 = 7 \cdot 17$ n'a pas deux "diviseurs proches"
- 1984: Maier et Tenenbaum démontrent cette conjecture.
  Ils démontrent davantage: "presque tous les entiers n possèdent deux diviseurs d_1 et d_2 tels que

$$d_1 < d_2 \leq (1+\varepsilon)d_1$$

  quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance".
  Autrement dit, la plupart des nombres ont deux "diviseurs très proches".

Un lien entre le monde réel et le monde complexe

L'hypothèse de Riemann



$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Hypothèse de Riemann:

$$\zeta(\sigma + it) = 0$$

avec $0 \leq \sigma \leq 1$

$$\Longrightarrow \sigma = \tfrac{1}{2}$$

Un lien entre le monde réel et le monde complexe

Un lien entre le monde réel et le monde complexe

- 1983: Jean-Louis Nicolas et Guy Robin:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{e^{\gamma} n \log\log n} = 1,$$

où

$$\gamma = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \right) = 0,57721\ldots$$

Un lien entre le monde réel et le monde complexe

- 1983: Jean-Louis Nicolas et Guy Robin:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{e^\gamma n \log\log n} = 1,$$

où

$$\gamma = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \right) = 0,57721\ldots$$

Observons que

$$\frac{\sigma(n)}{e^\gamma n \log\log n} = 1,00556\ldots \quad \text{pour } n = 5040.$$

Un lien entre le monde réel et le monde complexe

- 1983: Jean-Louis Nicolas et Guy Robin:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{e^\gamma n \log\log n} = 1,$$

où

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \log N\right) = 0,57721\ldots$$

Observons que

$$\frac{\sigma(n)}{e^\gamma n \log\log n} = 1,00556\ldots \qquad \text{pour } n = 5040.$$

- 1985: Guy Robin démontre que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'énoncé

$$\sigma(n) < e^\gamma n \log\log n \qquad \text{pour tous les entiers} \quad n \geq 5041.$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Rappelons que si $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}$ (avec $q_1 < q_2 < \cdots < q_r$), alors

$$\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_r+1).$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Rappelons que si $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}$ (avec $q_1 < q_2 < \cdots < q_r$), alors

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1).$$

Peut-on fournir des bornes inférieure et supérieure pour $\tau(n)$?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Rappelons que si $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}$ (avec $q_1 < q_2 < \cdots < q_r$), alors

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1).$$

Peut-on fournir des bornes inférieure et supérieure pour $\tau(n)$?
Comme $a_i \geq 1$ pour chaque i, on a

$$\tau(n) \geq 2^r,$$

i.e.

$$\tau(n) \geq 2^{\omega(n)},$$

où $\omega(n)$ représente le nombre de facteurs premiers distincts de n.

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Une borne supérieure ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Une borne supérieure ?

Étant donné $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}$, soit $\Omega(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$.

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Une borne supérieure ?

Étant donné $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}$, soit $\Omega(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$.
Ainsi $\omega(12) = 2$ et $\Omega(12) = 3$.

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Une borne supérieure ?

Étant donné $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \cdots q_r^{a_r}$, soit $\Omega(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$.
Ainsi $\omega(12) = 2$ et $\Omega(12) = 3$.

Rappelons l'inégalité arithmético-géométrique:

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_r$ des nombres réels positifs. Alors,

$$(x_1 x_2 \cdots x_r)^{1/r} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_r}{r},$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$.

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Comme $\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_r+1)$, on a

$$\begin{aligned}
\tau(n)^{1/r} &\le \frac{(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_r+1)}{r}\\
&= \frac{r+(a_1+a_2+\cdots+a_r)}{r}\\
&= \frac{\omega(n)+\Omega(n)}{\omega(n)}\\
&= 1+\frac{\Omega(n)}{\omega(n)}
\end{aligned}$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Comme $\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_r+1)$, on a

$$\begin{aligned}
\tau(n)^{1/r} &\le \frac{(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_r+1)}{r}\\
&= \frac{r+(a_1+a_2+\cdots+a_r)}{r}\\
&= \frac{\omega(n)+\Omega(n)}{\omega(n)}\\
&= 1+\frac{\Omega(n)}{\omega(n)}
\end{aligned}$$

de sorte que

$$(*) \qquad 2^{\omega(n)} \le \tau(n) \le \left(1+\frac{\Omega(n)}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)}$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

$$(*) \qquad 2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq \left(1 + \frac{\Omega(n)}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)}$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

$$(*) \qquad 2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq \left(1 + \frac{\Omega(n)}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)}$$

En particulier, si n est libre de carrés, (*) se réduit à

$$2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq 2^{\omega(n)} \text{ auquel cas } \tau(n) = 2^{\omega(n)}$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

$$(*) \qquad 2^{\omega(n)} \le \tau(n) \le \left(1 + \frac{\Omega(n)}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)}$$

En particulier, si n est libre de carrés, (*) se réduit à

$$2^{\omega(n)} \le \tau(n) \le 2^{\omega(n)} \text{ auquel cas } \tau(n) = 2^{\omega(n)}$$

Comment se comporte $\dfrac{\Omega(n)}{\omega(n)}$ lorsque n est non libre de carrés ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

$$(*) \qquad 2^{\omega(n)} \le \tau(n) \le \left(1 + \frac{\Omega(n)}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)}$$

En particulier, si n est libre de carrés, (*) se réduit à

$$2^{\omega(n)} \le \tau(n) \le 2^{\omega(n)} \text{ auquel cas } \tau(n) = 2^{\omega(n)}$$

Comment se comporte $\dfrac{\Omega(n)}{\omega(n)}$ lorsque n est non libre de carrés ?

- 1974: De Koninck démontre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{1}{x} \sum_{2 \le n \le x} \frac{\Omega(n)}{\omega(n)} = 1 + \frac{c + o(1)}{\log \log x} \qquad (x \to \infty).$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

- 1974: De Koninck démontre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{1}{x} \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Omega(n)}{\omega(n)} = 1 + \frac{c + o(1)}{\log \log x} \qquad (x \to \infty).$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

- 1974: De Koninck démontre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{1}{x} \sum_{2 \le n \le x} \frac{\Omega(n)}{\omega(n)} = 1 + \frac{c + o(1)}{\log \log x} \qquad (x \to \infty).$$

Cela veut dire en particulier que, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé,

$$1 \le \frac{\Omega(n)}{\omega(n)} \le 1 + \varepsilon \qquad \text{presque partout.}$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Cela veut dire en particulier que, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé,

$$1 \leq \frac{\Omega(n)}{\omega(n)} \leq 1 + \varepsilon \qquad \text{presque partout.}$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Cela veut dire en particulier que, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé,

$$1 \leq \frac{\Omega(n)}{\omega(n)} \leq 1 + \varepsilon \qquad \text{presque partout.}$$

Ainsi, comme

$$2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq \left(1 + \frac{\Omega(n)}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)},$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Cela veut dire en particulier que, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé,

$$1 \leq \frac{\Omega(n)}{\omega(n)} \leq 1 + \varepsilon \qquad \text{presque partout.}$$

Ainsi, comme

$$2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq \left(1 + \frac{\Omega(n)}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)},$$

on peut conclure que

$$2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq (2+\varepsilon)^{\omega(n)} \qquad \text{presque partout.}$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Posons $\gamma(n) := \prod_{p|n} p, \qquad \beta(n) := \prod_{p|n} \frac{1}{\log p}$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Posons $\gamma(n) := \prod_{p|n} p, \qquad \beta(n) := \prod_{p|n} \frac{1}{\log p}$

1915: Ramanujan démontre

$$\tau(n) \le \left(\frac{\log(n\gamma(n))}{\omega(n)} \right)^{\omega(n)} \beta(n) \qquad (n \ge 2).$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Posons $\gamma(n) := \prod_{p|n} p, \qquad \beta(n) := \prod_{p|n} \frac{1}{\log p}$

1915: Ramanujan démontre

$$\tau(n) \le \left(\frac{\log(n\gamma(n))}{\omega(n)} \right)^{\omega(n)} \beta(n) \qquad (n \ge 2).$$

On a égalité si $n = p^a$, puisque $\tau(n) = \tau(p^a) = a + 1$ alors que

$$\left(\frac{\log(n\gamma(n))}{\omega(n)} \right)^{\omega(n)} \beta(n) = \left(\frac{\log(p^{a+1})}{1} \right)^1 \frac{1}{\log p} = a + 1.$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Posons $\gamma(n) := \prod_{p|n} p, \qquad \beta(n) := \prod_{p|n} \frac{1}{\log p}$

1915: Ramanujan démontre

$$\tau(n) \leq \left(\frac{\log(n\gamma(n))}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)} \beta(n) \qquad (n \geq 2).$$

On a égalité si $n = p^a$, puisque $\tau(n) = \tau(p^a) = a + 1$ alors que

$$\left(\frac{\log(n\gamma(n))}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)} \beta(n) = \left(\frac{\log(p^{a+1})}{1}\right)^1 \frac{1}{\log p} = a + 1.$$

Dans le pire cas, soit lorsque n est libre de carrés, l'inégalité de Ramanujan se réduit à

$$\tau(n) \leq \left(\frac{2\log n}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)} \beta(n) \qquad (n \geq 2).$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

- 1915: Ramanujan démontre

$$\tau(n) \leq \left(\frac{\log(n\gamma(n))}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)} \beta(n) \qquad (n \geq 2).$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

- 1915: Ramanujan démontre

$$\tau(n) \leq \left(\frac{\log(n\gamma(n))}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)} \beta(n) \qquad (n \geq 2).$$

- 2019, De Koninck et Letendre:

$$\tau(n) < \left(1 + \frac{\log n}{\omega(n) \log \omega(n)}\right)^{\omega(n)} \quad \text{pour tout } n \text{ avec } \omega(n) \geq 74.$$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Un exemple numérique:

Soit $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 367 \cdot 373$, de sorte que $\tau(n) = 2^{74}$

Améliorer un vieux résultat de Ramanujan ?

Un exemple numérique:

Soit $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 367 \cdot 373$, de sorte que $\tau(n) = 2^{74}$

valeur exacte de $\tau(n)$ =	18 889 465 931 478 580 854 784
borne sup de Letendre-DK =	476 419 831 114 044 492 742 656
borne sup de Ramanujan =	929 425 691 104 681 717 137 408

Les diviseurs milieux d'un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

De toutes les paires de co-diviseurs d'un entier n, il en est une qui se distingue de toutes les autres.

Les diviseurs milieux d'un entier

De toutes les paires de co-diviseurs d'un entier n, il en est une qui se distingue de toutes les autres.
Il s'agit de la paire de co-diviseurs $\{\rho_1(n), \rho_2(n)\}$ définie par

$$\rho_1(n) = \max\{d \mid n : d \leq \sqrt{n}\} \qquad \text{et} \qquad \rho_2(n) = \min\{d \mid n : d \geq \sqrt{n}\}.$$

Les diviseurs milieux d'un entier

De toutes les paires de co-diviseurs d'un entier n, il en est une qui se distingue de toutes les autres.
Il s'agit de la paire de co-diviseurs $\{\rho_1(n), \rho_2(n)\}$ définie par

$$\rho_1(n) = \max\{d \mid n : d \leq \sqrt{n}\} \qquad \text{et} \qquad \rho_2(n) = \min\{d \mid n : d \geq \sqrt{n}\}.$$

On appelle ces deux diviseurs les *diviseurs milieux* de n.

Les diviseurs milieux d'un entier

De toutes les paires de co-diviseurs d'un entier n, il en est une qui se distingue de toutes les autres.
Il s'agit de la paire de co-diviseurs $\{\rho_1(n), \rho_2(n)\}$ définie par

$$\rho_1(n) = \max\{d \mid n : d \leq \sqrt{n}\} \qquad \text{et} \qquad \rho_2(n) = \min\{d \mid n : d \geq \sqrt{n}\}.$$

On appelle ces deux diviseurs les *diviseurs milieux* de n.
Par exemple, $\rho_1(6) = 2$ et $\rho_2(6) = 3$, alors que $\rho_1(36) = \rho_2(36) = 6$.

Les diviseurs milieux d'un entier

De toutes les paires de co-diviseurs d'un entier n, il en est une qui se distingue de toutes les autres.
Il s'agit de la paire de co-diviseurs $\{\rho_1(n), \rho_2(n)\}$ définie par

$$\rho_1(n) = \max\{d \mid n : d \leq \sqrt{n}\} \qquad \text{et} \qquad \rho_2(n) = \min\{d \mid n : d \geq \sqrt{n}\}.$$

On appelle ces deux diviseurs les *diviseurs milieux* de n.
Par exemple, $\rho_1(6) = 2$ et $\rho_2(6) = 3$, alors que $\rho_1(36) = \rho_2(36) = 6$.
De toute évidence, $\rho_1(n)\rho_2(n) = n$ pour tout $n \geq 1$.

Les diviseurs milieux d'un entier

De toutes les paires de co-diviseurs d'un entier n, il en est une qui se distingue de toutes les autres.
Il s'agit de la paire de co-diviseurs $\{\rho_1(n), \rho_2(n)\}$ définie par

$$\rho_1(n) = \max\{d \mid n : d \le \sqrt{n}\} \qquad \text{et} \qquad \rho_2(n) = \min\{d \mid n : d \ge \sqrt{n}\}.$$

On appelle ces deux diviseurs les *diviseurs milieux* de n.
Par exemple, $\rho_1(6) = 2$ et $\rho_2(6) = 3$, alors que $\rho_1(36) = \rho_2(36) = 6$.
De toute évidence, $\rho_1(n)\rho_2(n) = n$ pour tout $n \ge 1$.
De plus, $\rho_1(n) = \rho_2(n)$ si et seulement si n est un carré parfait.

Les diviseurs milieux d'un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

$$\rho_1(n) = \max\{d \mid n : d \leq \sqrt{n}\} \qquad \text{et} \qquad \rho_2(n) = \min\{d \mid n : d \geq \sqrt{n}\}.$$

Les diviseurs milieux d'un entier

$$\rho_1(n) = \max\{d \mid n : d \leq \sqrt{n}\} \qquad \text{et} \qquad \rho_2(n) = \min\{d \mid n : d \geq \sqrt{n}\}.$$

En géométrie, on a le problème d'optimisation suivant:
"Étant donné un rectangle de surface n, comment doit-on choisir les longueurs (entières) des côtés de ce rectangle pour que son périmètre soit minimal ?"

Les diviseurs milieux d'un entier

$$\rho_1(n) = \max\{d \mid n : d \leq \sqrt{n}\} \qquad \text{et} \qquad \rho_2(n) = \min\{d \mid n : d \geq \sqrt{n}\}.$$

En géométrie, on a le problème d'optimisation suivant:
"Étant donné un rectangle de surface n, comment doit-on choisir les longueurs (entières) des côtés de ce rectangle pour que son périmètre soit minimal ?"

La réponse est qu'il faut choisir le rectangle de dimensions $\rho_1(n)$ par $\rho_2(n)$. En particulier, si la surface du rectangle est 18, les dimensions pour un périmètre minimal sont 3 par 6, parce que $\rho_1(18) = 3$ et $\rho_2(18) = 6$.

Les diviseurs milieux d'un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

- 1975: François Dress offre 50 francs français pour une preuve ou un contre-exemple de l'estimé

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \sum_{n\le x} \rho_1(n) = 0.$$

Les diviseurs milieux d'un entier

- 1975: François Dress offre 50 francs français pour une preuve ou un contre-exemple de l'estimé

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \sum_{n\le x} \rho_1(n) = 0.$$

- Tenenbaum prouve cet estimé, voire davantage, en démontrant que

$$\frac{\sqrt{x}}{\log x} \ll \frac{1}{x} \sum_{n\le x} \rho_1(n) \ll \frac{\sqrt{x}}{\log\log x}.$$

Les diviseurs milieux d'un entier

- 1975: François Dress offre 50 francs français pour une preuve ou un contre-exemple de l'estimé
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \sum_{n\leq x} \rho_1(n) = 0.$$
- Tenenbaum prouve cet estimé, voire davantage, en démontrant que
$$\frac{\sqrt{x}}{\log x} \ll \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} \rho_1(n) \ll \frac{\sqrt{x}}{\log\log x}.$$
- Peut-on faire mieux ?

Les diviseurs milieux d'un entier

- 1975: François Dress offre 50 francs français pour une preuve ou un contre-exemple de l'estimé
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \sum_{n\le x} \rho_1(n) = 0.$$
- Tenenbaum prouve cet estimé, voire davantage, en démontrant que
$$\frac{\sqrt{x}}{\log x} \ll \frac{1}{x} \sum_{n\le x} \rho_1(n) \ll \frac{\sqrt{x}}{\log\log x}.$$
- Peut-on faire mieux ?
- 1975: Paul Erdős conjecture que
$$(*) \qquad \frac{1}{x} \sum_{n\le x} \rho_1(n) = \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^{\delta+o(1)}} \qquad (x\to\infty),$$

Les diviseurs milieux d'un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

- 1975: Paul Erdős conjecture que

$$(*) \qquad \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\rho_1(n) = \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^{\delta+o(1)}} \qquad (x\to\infty),$$

où $\delta = 1-(1+\log\log 2)/\log 2 = 0,08607\ldots$.

Les diviseurs milieux d'un entier

- 1975: Paul Erdős conjecture que

$$(*) \qquad \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\rho_1(n) = \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^{\delta+o(1)}} \qquad (x\to\infty),$$

  où $\delta = 1-(1+\log\log 2)/\log 2 = 0,08607\ldots$.
- 1976: Tenenbaum démontre $(*)$

Les diviseurs milieux d'un entier

- 1975: Paul Erdős conjecture que

$$(*) \qquad \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\rho_1(n) = \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^{\delta+o(1)}} \qquad (x\to\infty),$$

  où $\delta = 1-(1+\log\log 2)/\log 2 = 0,08607\ldots$.
- 1976: Tenenbaum démontre $(*)$
- 1976: Tenenbaum démontre que

$$\sum_{n\le x}\rho_2(n) = \frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)$$

Les diviseurs milieux d'un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

1976: Tenenbaum:

Pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $x_0 = x_0(\varepsilon)$ *tel que pour tout* $x \geq x_0$*,*

$$\frac{x^{3/2}}{(\log x)^{\delta+\varepsilon}} < \sum_{n \leq x} \rho_1(n) \ll \frac{x^{3/2}}{(\log x)^{\delta}(\log\log x)^{1/2}},$$

où

$$\delta = 1 - \frac{1 + \log\log 2}{\log 2} \approx 0.086071.$$

Les diviseurs milieux d'un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

- 1976: Tenenbaum

$$\frac{x^{3/2}}{(\log x)^{\delta+\varepsilon}} < \sum_{n \le x} \rho_1(n) \ll \frac{x^{3/2}}{(\log x)^{\delta} (\log \log x)^{1/2}},$$

Les diviseurs milieux d'un entier

- 1976: Tenenbaum

$$\frac{x^{3/2}}{(\log x)^{\delta+\varepsilon}} < \sum_{n \le x} \rho_1(n) \ll \frac{x^{3/2}}{(\log x)^{\delta} (\log \log x)^{1/2}},$$

- 2008: Kevin Ford démontre que

$$\sum_{n \le x} \rho_1(n) \asymp \frac{x^{3/2}}{(\log x)^{\delta} (\log \log x)^{3/2}}.$$

Les diviseurs milieux d'un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

- 2019: De Koninck et Razafindrasoanaivolala:
  Étant donnés un entier $k \geq 1$ et n'importe quel nombre réel $r > -1$,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)^r} = e_0 \frac{x^2}{\log x} + e_1 \frac{x^2}{\log^2 x} + \cdots + e_{k-1} \frac{x^2}{\log^k x} + O\left(\frac{x^2}{\log^{k+1} x}\right)$$

où $e_0 = \dfrac{\zeta(r+2)}{2}$ et pour chaque $1 \leq \ell \leq k-1$,

$$e_\ell = \left(\frac{r+2}{2}\right) c_\ell + \sum_{\nu=0}^{\ell-1} \frac{r c_\nu}{2} \prod_{m=\nu}^{\ell-1} \left(\frac{m+1}{2}\right),$$

avec, pour chaque $\nu = 0, 1, \ldots, \ell$,

$$c_\nu = \frac{\nu!}{(r+2)^{\nu+1}} \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(r+2)^j (-1)^j \zeta^{(j)}(r+2)}{j!}.$$

Les diviseurs milieux d'un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

- 2019: De Koninck et Razafindrasoanaivolala:
  Étant donnés un entier $k \geq 1$ et n'importe quel nombre réel $r > -1$,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)^r} = e_0 \frac{x^2}{\log x} + e_1 \frac{x^2}{\log^2 x} + \cdots + e_{k-1} \frac{x^2}{\log^k x} + O\left(\frac{x^2}{\log^{k+1} x}\right)$$

Les diviseurs milieux d'un entier

- 2019: De Koninck et Razafindrasoanaivolala:
  Étant donnés un entier $k \geq 1$ et n'importe quel nombre réel $r > -1$,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)^r} = e_0 \frac{x^2}{\log x} + e_1 \frac{x^2}{\log^2 x} + \cdots + e_{k-1} \frac{x^2}{\log^k x} + O\left(\frac{x^2}{\log^{k+1} x}\right)$$

Comme conséquence, en posant

$$T_r(x) := \sum_{n \leq x} \frac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)^r} \sim \frac{\zeta(r+2)}{2} \frac{x^2}{\log x} \qquad (x \to \infty),$$

Toutes les sommes $T_r(x)$ sont du même ordre de grandeur, indépendamment du nombre choisi $r > -1$.

Les diviseurs milieux d'un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

Comme conséquence, en posant

$$T_r(x) := \sum_{n \leq x} \frac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)^r} \sim \frac{\zeta(r+2)}{2} \frac{x^2}{\log x} \qquad (x \to \infty),$$

Toutes les sommes $T_r(x)$ sont du même ordre de grandeur, indépendamment du nombre choisi $r > -1$.

Les diviseurs milieux d'un entier

Comme conséquence, en posant

$$T_r(x) := \sum_{n \le x} \frac{\rho_2(n)}{\rho_1(n)^r} \sim \frac{\zeta(r+2)}{2} \frac{x^2}{\log x} \qquad (x \to \infty),$$

Toutes les sommes $T_r(x)$ sont du même ordre de grandeur, indépendamment du nombre choisi $r > -1$.

Par exemple, bien que contre-intuitif, on a

$$\sum_{n \le x} \rho_2(n)\sqrt{\rho_1(n)} \asymp \sum_{n \le x} \frac{\rho_2(n)}{\sqrt{\rho_1(n)}}$$

Les diviseurs milieux d’un entier

Les diviseurs milieux d'un entier

Soit

$$\begin{aligned} G &:= \{n \in \mathbb{N} : \mathrm{pgcd}(\rho_1(n), \rho_2(n)) > 1\} \\ G(x) &:= \#\{n \leq x : n \in G\} \end{aligned}$$

Les diviseurs milieux d'un entier

Soit

$$\begin{aligned} G &:= \{n \in \mathbb{N} : \text{pgcd}(\rho_1(n), \rho_2(n)) > 1\} \\ G(x) &:= \#\{n \leq x : n \in G\} \end{aligned}$$

- 1976: Tenenbaum démontre que G est de densité nulle. i.e. que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x} = 0$$

Les diviseurs milieux d'un entier

Soit

$$\begin{aligned} G &:= \{n \in \mathbb{N} : \text{pgcd}(\rho_1(n), \rho_2(n)) > 1\} \\ G(x) &:= \#\{n \leq x : n \in G\} \end{aligned}$$

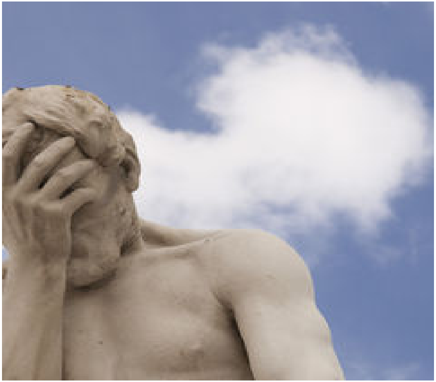
- 1976: Tenenbaum démontre que G est de densité nulle. i.e. que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{G(x)}{x} = 0$$

- 2020: De Koninck et Razafindrasoanaivolala: Il existe des constantes c_1 et c_2 telles que

$$c_1 \frac{x}{\log x} < G(x) < c_2 \frac{x}{\log^\delta x \cdot (\log\log x)^{3/2}}$$

De quoi réfléchir. . .



Merci !

www.jeanmariedekoninck.mat.ulaval.ca