tenseurs

sous tension

Pierre Chabry 1er octobre 2020

en bref…

(1846	Hamilton)	*« tensor » signification ≠ de l'actuelle.*
1898	Voigt	*Les propriétés physiques fondamentales des cristaux* *
1900	Levi-Civita/Ricci-Curbastro	*La Théorie des tenseurs dans les méthodes de calcul différentiel et leurs applications.*
1913	Grossmann avec Einstein	*Projet d'une Théorie de la Relativité générale et de la Gravitation **(partie mathématique).***
≥ 40's	Bourbaki	*Algèbre multilinéaire.*
…		

* « [...] les états du genre décrit se produisent avec **tensions et allongements** et nous les appelons donc **tensoriels**, alors que les grandeurs physiques qui les caractérisent sont appelées **tenseurs**. »

tenseurs sous tension

un parcours

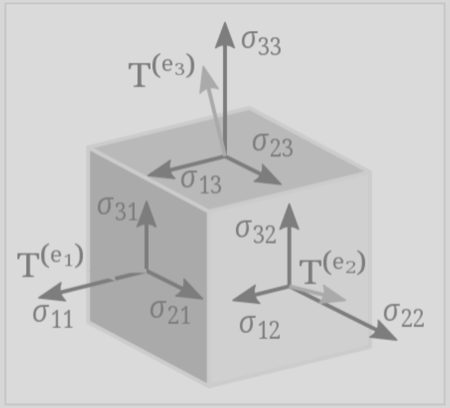
- ❑ vecteurs (rappels, notations) • co/contravariance ;
- ❑ formes linéaires • espace dual ;
- ❑ produit tensoriel • tenseurs 2 fois covariants ;
- ❑ tenseur métrique en espace euclidien ;
- tenseurs mixtes : applications linéaires.

vos questions

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

VECT

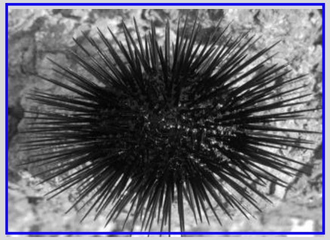
$1^{ère}$ *impression …*



Les composants du tenseur des contraintes, un tenseur de deuxième ordre, en trois dimensions. Le tenseur dans l'image est le vecteur ligne $\sigma = \left[\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)}\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)}\right]$ des forces agissant sur les faces e_1, e_2 et e_3 du cube. Ces forces sont représentées par des vecteurs colonnes. Les vecteurs ligne et colonnes qui composent le tenseur peuvent être représentées par une matrice :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

wikipedia



Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

VECT

algèbre multilinéaire

JEANPERRIN
Initiation progressive au calcul tensoriel.

HLADIK
Le calcul tensoriel en physique.

…

GRIFONE
Algèbre linéaire.

SCHWARTZ
Les tenseurs.

ROUVIÈRE
1^{ers} pas en calcul tensoriel.

…

*« **2** » approches*

1 "critères de tensorialité"

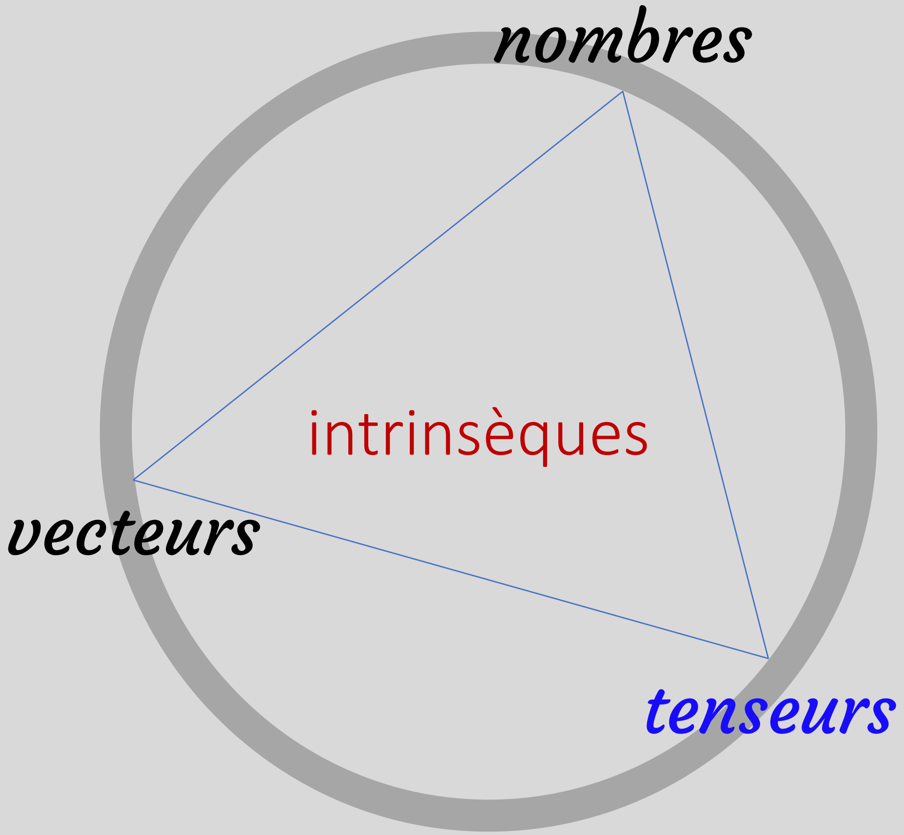
2 *en géométrie "classique"*

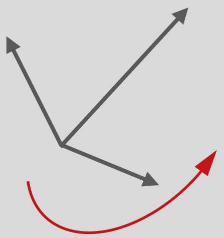
wikipedia

[…] la notion mathématique de tenseur est réalisée par l'algèbre linéaire […] en utilisant la notion d'application multilinéaire et d'espace vectoriel dual.

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

« le + important »





réalité physique

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

remarque sur la structure de base

on utilisera la structure
« espace vectoriel sur un corps »
comme structure de base.

(comme le corps des nbs. réels **R**)

i

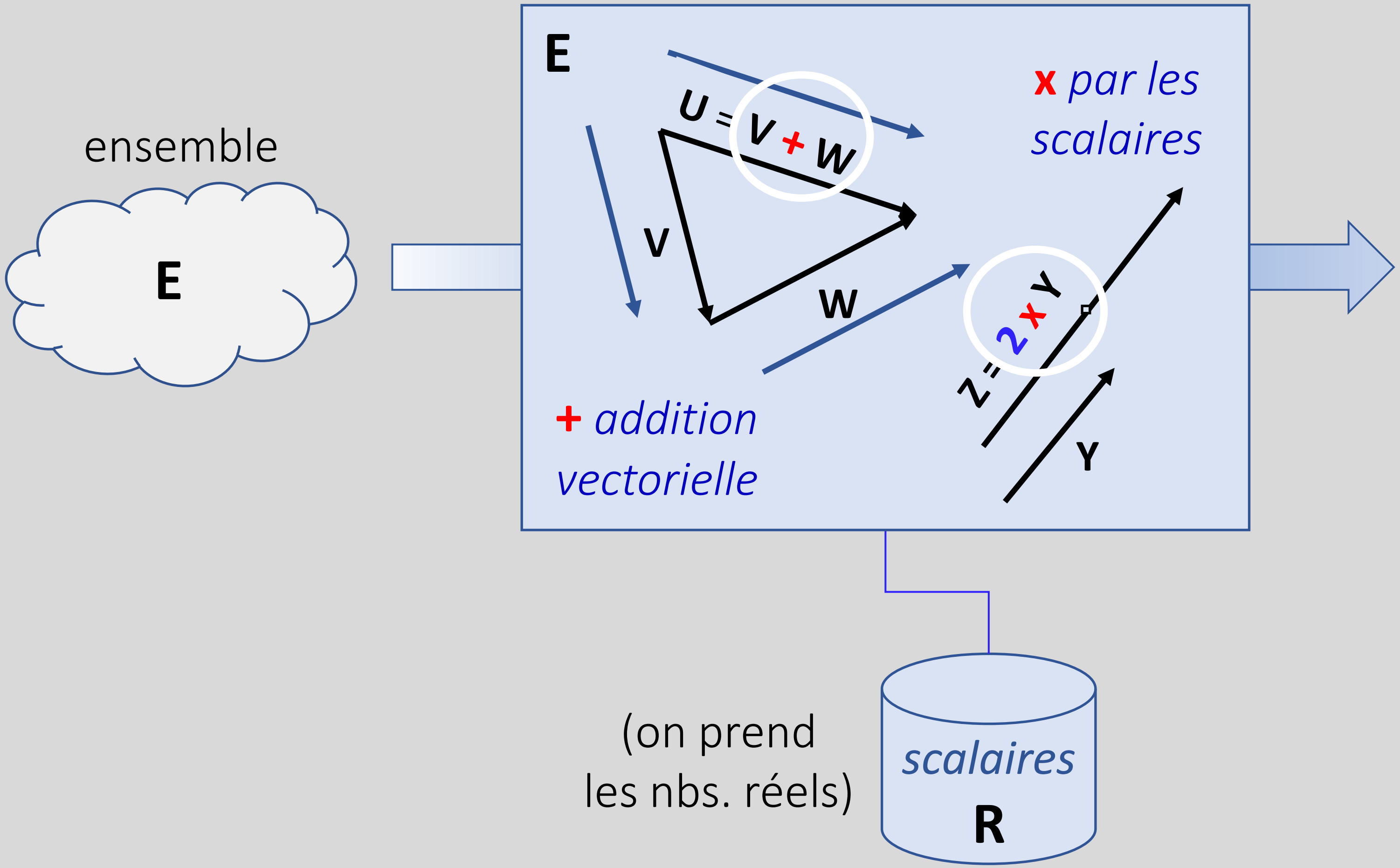
une structure très proche de
« module sur un anneau »
est aussi utilisée comme base de la théorie des tenseurs.

(comme l'anneau des entiers relatifs **Z**)

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

juste 2 lois …

ensemble



espace vectoriel

E (**+ x**) E-V "sur **R**"

// (Thalès) : ok.

ni longueurs
ni angles

indépendance
de toute base

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

multiplets : quelques nombres …

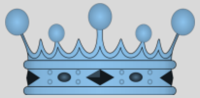
$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 3/2 \end{pmatrix}$ triplet de réels

addition vectorielle $+$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \end{pmatrix}$$

multiplication par les scalaires $\times$

$$\lambda \times \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbf{R}$$



le triplet $\overrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & -7 & 3/2 \end{pmatrix}}$ *devient un* **vecteur** $\in \mathbf{R}^3$, *espace vectoriel*

matrices

multiplet

$(a \; b \; c \; d)$ → **tableau** → $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\mathcal{M}_{2\text{-}2}$

$(e \; f \; g \; h)$

. . . .

+ vectorielle

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

x / scalaires

$$\lambda \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

E-V sur **R**

« multiplication matricielle »
non incluse

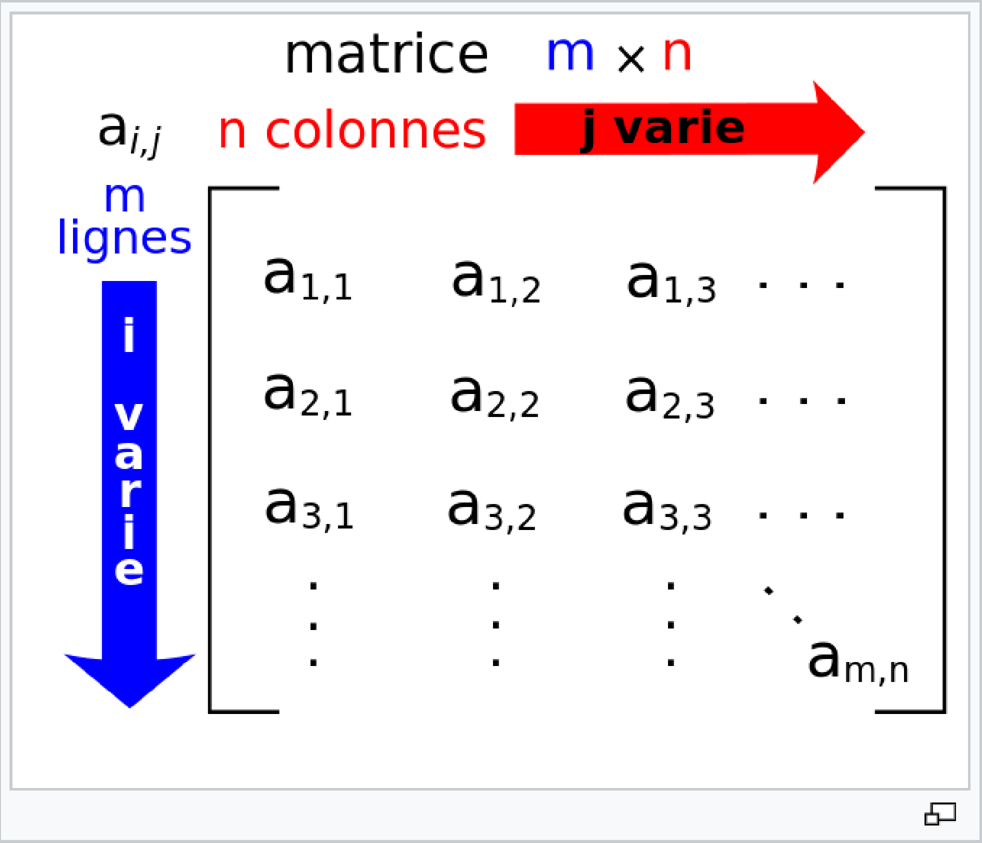
$$\underset{\mathcal{M}_{2\text{-}3}}{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}} \times \underset{\mathcal{M}_{3\text{-}1}}{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}} = \underset{\mathcal{M}_{2\text{-}1}}{\begin{pmatrix} au+bv+cw \\ du+ev+fw \end{pmatrix}}$$

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

matrices !?

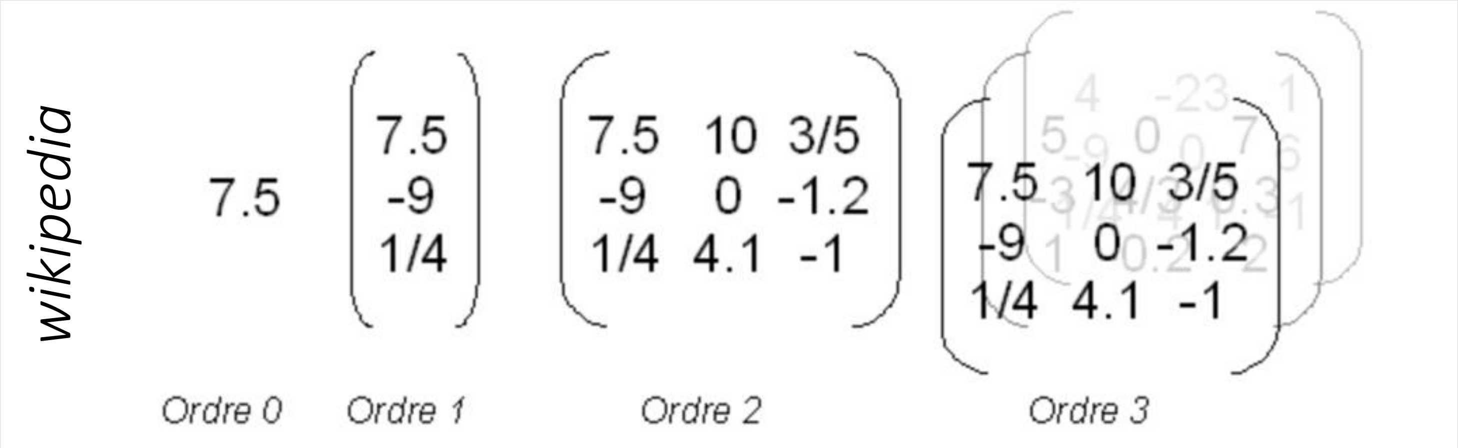
En mathématiques, les **matrices** sont des tableaux des éléments (nombres, caractères) qui servent à interpréter en termes calculatoires, et donc opérationnels, les résultats théoriques de l'algèbre linéaire et même de l'algèbre bilinéaire.

Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent les matrices. Quant aux phénomènes non linéaires, on en donne souvent des approximations linéaires, comme en optique géométrique avec les approximations de Gauss.



wikipedia

matrices !?



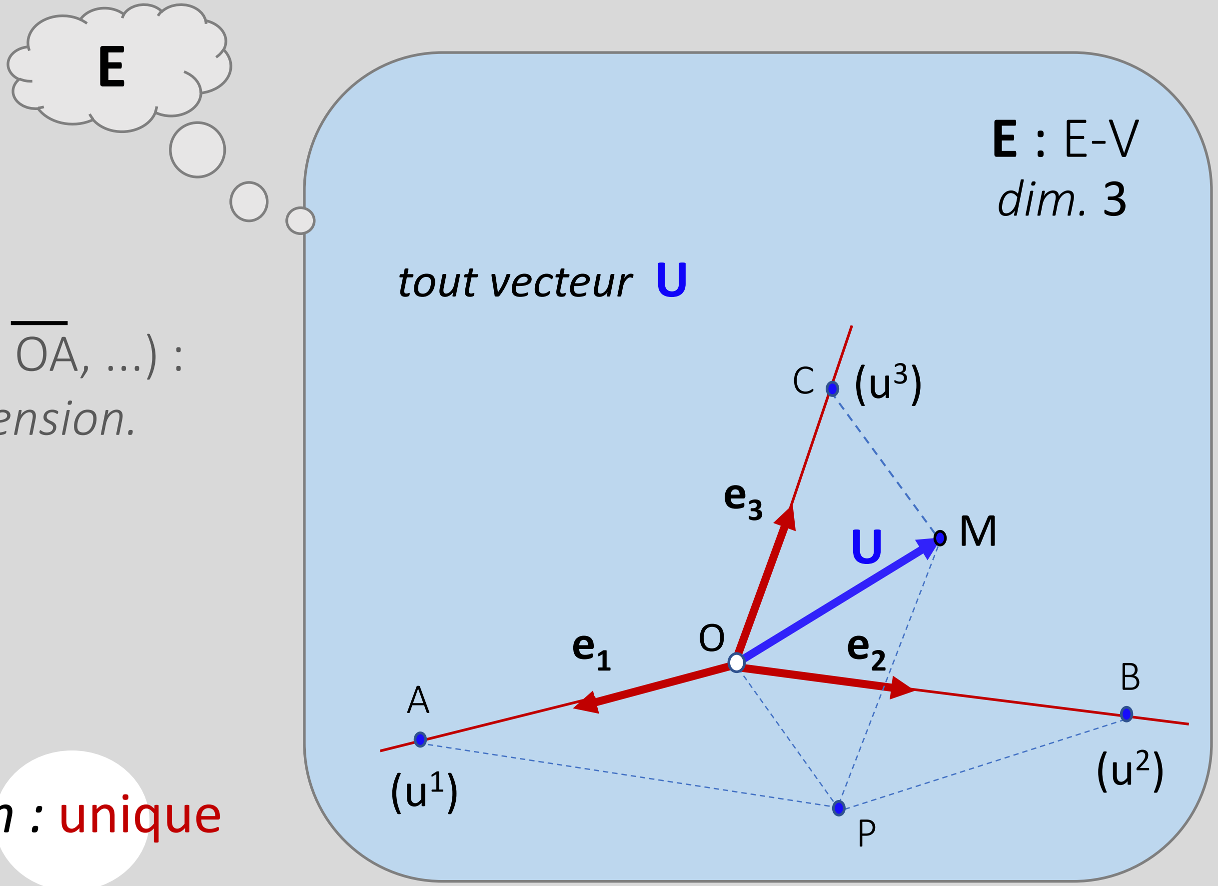
? ? !

vecteurs ; tenseurs d'ordre 2 ——▶|—— **matrices** (à 2 dim. !)

structures de rangement

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

tout E-V a des bases



base : génératrice

composantes ($u^1 = \overline{OA}$, ...) :
nombres sans dimension.

dimension de l'E-V :

nb. de vecteurs **commun** à toutes les bases

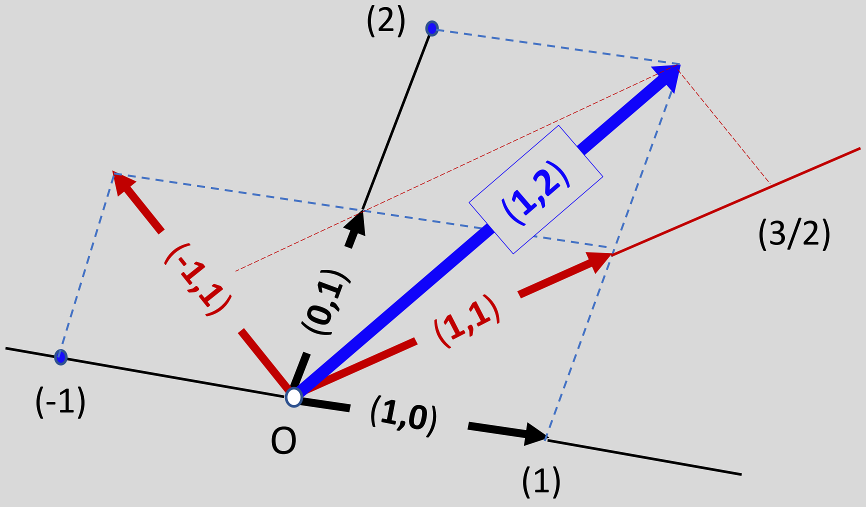
décomposition : unique

composantes de **U** : u^i $\boxed{\mathbf{U}}$ $= u^1\,\mathbf{e_1} + u^2\,\mathbf{e_2} + u^3\,\mathbf{e_3}$ $\boxed{= u^i\,\mathbf{e_i}}$ Σ omis (i = 1 à 3)

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

exemple : multiplets, vecteurs intrinsèques !

le vecteur-doublet $\overrightarrow{\mathbf{(1,2)}}$
est intrinsèque



dim. 2

les composantes du ***vecteur*** $\overrightarrow{\mathbf{(1,2)}}$ *ne sont* **1** *et* **2** *que dans la base canonique*

vecteur-doublet : (1,2)

- *base canonique :* (1,0) ; (0,1) ⟶ **(1,2)** = **1** (1,0) + **2** (0,1)
- *base 2 :* (1,1) ; (-1,1) ⟶ **(1,2)** = (**3/2**) (1,1) + **½** (-1,1)

produit cartésien d'ensembles

E x **F** produit cartésien *ensemble des couples* (U,V) *d'éléments de* **E** *et de* **F**

E = { A, R, D, V, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 }
F = { ♣ , ♦ , ♥ , ♠}

E × F est un jeu classique de 52 cartes

E = **F** = $\mathbf{R}^3$ (triplets de réels)

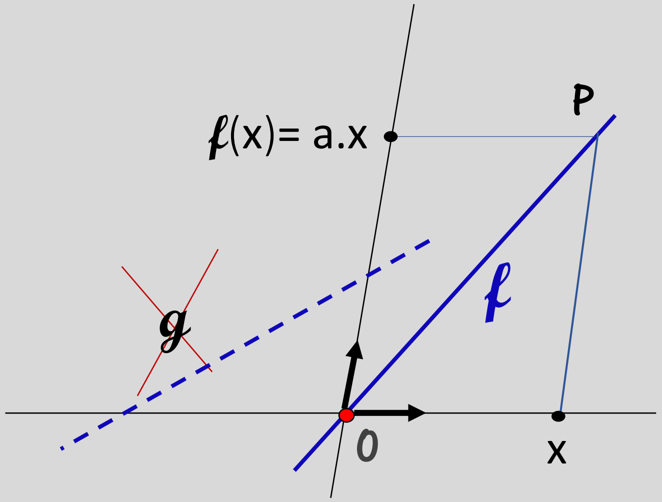
$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^6$ E-V de dim. **6** avec les lois **+**/x

---

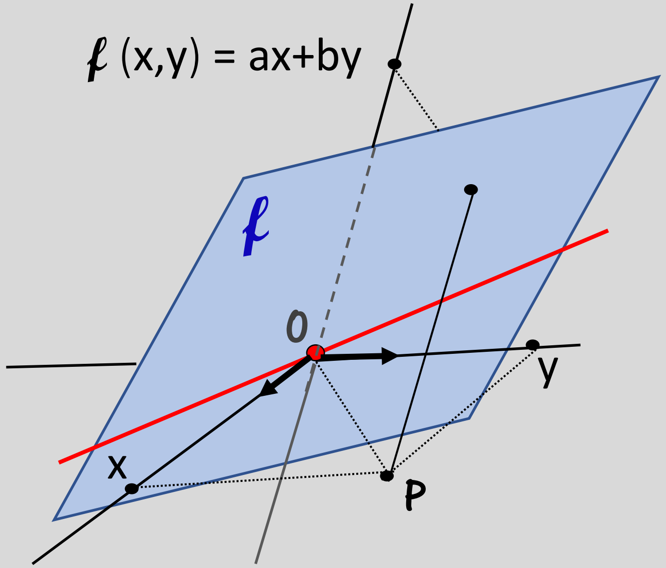
alors que $\mathbf{R}^3 \otimes \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^9$ E-V de dim. **9**

LIN

linéaire ? what else ?

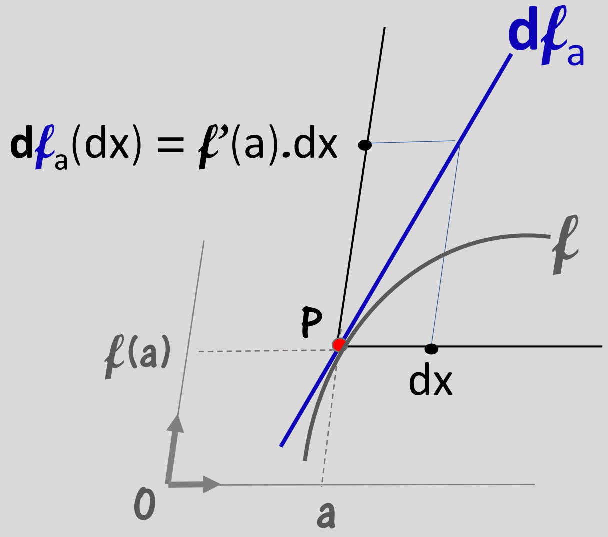


R → R



R^2 → R

(local)



R → R

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

linéaire ?

$$\mathbf{f} : \quad \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

($\mathbf{R}^2$ muni de la structure d'EV)

$$\overrightarrow{(x,y)} \longmapsto \boxed{\mathbf{f}(x,y) = ax + by}$$

doublet *nombre*

$$\boxed{\mathbf{f} \quad \text{est linéaire}}$$

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\lambda x(x,y)) = \mathbf{f}(\lambda x, \lambda y) = a\lambda x + b\lambda y = \lambda(ax + by) = \lambda\mathbf{f}(x,y)$$

et

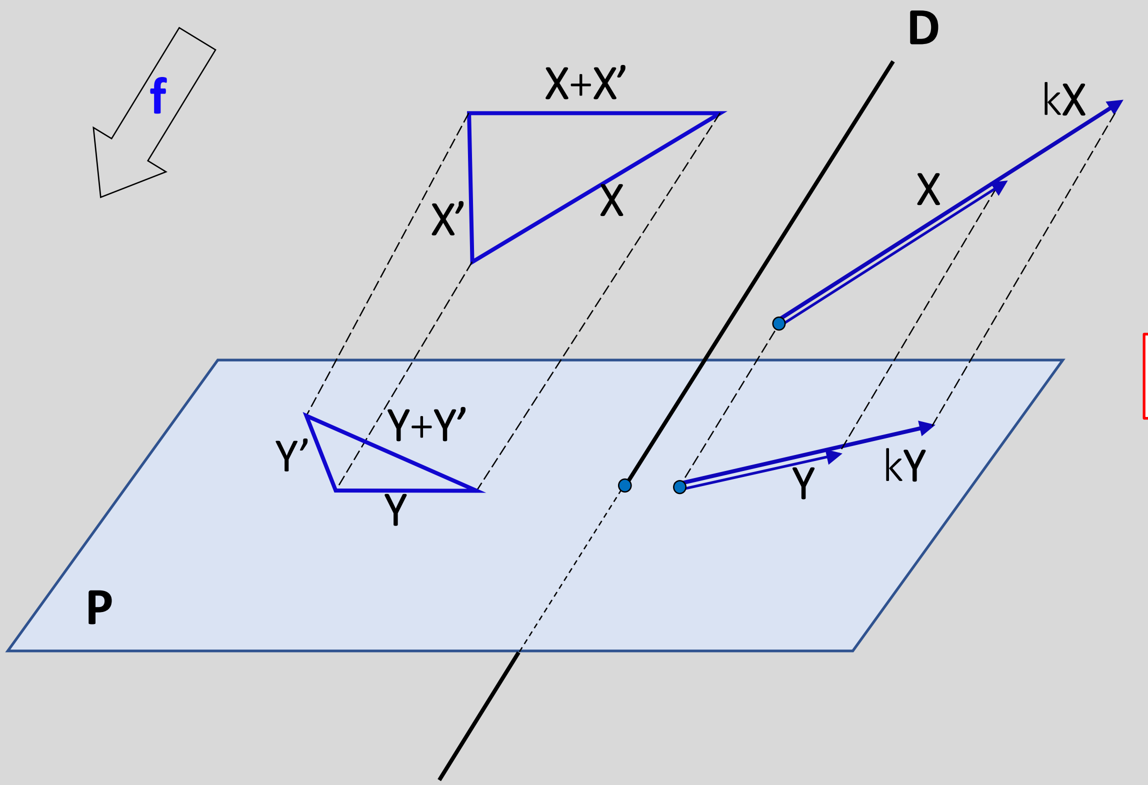
$$\mathbf{f}((x,y)+(x',y')) = \mathbf{f}(x+x', y+y') = a(x+x')+b(y+y') = ax+by + ax'+by' = \mathbf{f}(x,y) + \mathbf{f}(x',y')$$

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

autre exemple

application **f :** $\mathbf{R^3} \longrightarrow$ plan $\mathbf{P} \equiv \mathbf{R^2}$

vecteur X $\longmapsto$ $\boxed{\mathbf{f}(X) = Y}$ vecteur Y



$\boxed{\mathbf{f} \;\text{ linéaire}}$

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

bilinéaire

$$\mathbf{f} : \quad \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

doublet $\quad \overrightarrow{(x,y)} \longmapsto \boxed{\mathbf{f}(x,y) = a\,xy}$ $\quad$ *nombre*

f linéaire en (x,y) ? **_non_**

$$\mathbf{f}(\lambda \times (x,y)) = \mathbf{f}(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2\, a\, xy = \lambda^2\, \mathbf{f}(x,y)$$

--------------------------- ***mais*** ---------------------------

linéaire ***séparément*** en **x** et en **y**

→ **f bilinéaire**

la structure d'EV de $\mathbf{R}^2$
n'est pas utilisée

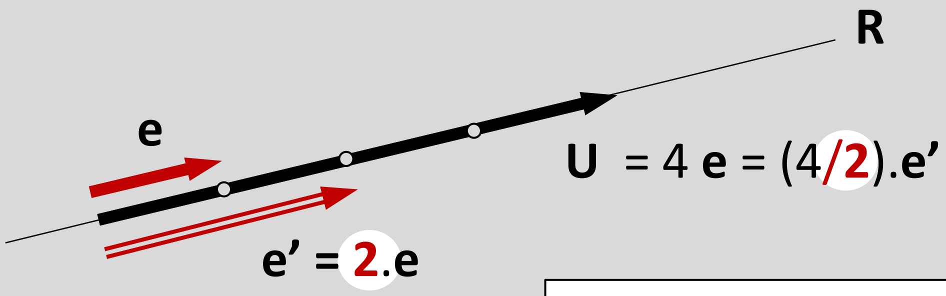
$$\mathbf{f}(\lambda x, y) = \mathbf{f}(x, \lambda y) = \lambda\, a\, xy = \lambda\, \mathbf{f}(x,y)$$

$$\mathbf{f}(x+x', y) = a(x+x')\,y = a\,xy + ax'y = \mathbf{f}(x,y) + \mathbf{f}(x',y)$$

idem en V

covariant / contravariant ⇨ *invariant*

changt de base
e → e'



dim.1

le vecteur **U**
est ***invariant***

composante de **U** *:*
contravariante

En algèbre linéaire, « **covariant** » et « **contravariant** » décrivent comment des grandeurs varient **lors d'un changement de base.**

Ces grandeurs sont dites,

- *covariantes* lorsqu'elles varient comme les vecteurs de la base,
- *contravariantes* lorsqu'elles varient de façon contraire.

(d'après Wikipedia)

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

co– / contravariant ⇨ invariant

changement de base

$\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2$

nouveaux vecteurs de base

$\mathbf{e}'_1 = a\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 \quad | \quad \mathbf{e}'_2 = b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2$

⇕

$[\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2] = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2]\ \mathbf{A}$

nouvelle ***ancienne***

(dim.2)

① → *le changement de* **la base**

matrice **A**

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

*est **la référence** (de covariance)*

②

U *invariant :*

$u'^i\,\mathbf{e}'_i = u^i\,\mathbf{e}_i$

(dim.2)

le changement induit des **composantes de U**

matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$

$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} /(ad-bc)$

*est **contravariant** / la référence*

③

nouvelles composantes d'un vecteur **U** *quelconque*

$$\begin{pmatrix} u'^1 \\ u'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

nouvelles ***anciennes***

action d'un « opérateur »

$$\varphi\,(\boldsymbol{a}) \;=\; \boldsymbol{r}$$

φ agit sur $\boldsymbol{a}$ pour donner $\boldsymbol{r}$

opérateur, fonction, ***application, forme****, …*

nombre, ***vecteur,*** ***couple de vect.****, …*

nombre*,* ***vecteur****, …*

$$\varphi\,(\boldsymbol{a}) \;=\; \psi\,(\boldsymbol{a}) \quad \text{qq. soit } \boldsymbol{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi \;=\; \psi$$

$\mathbf{x}\,(5\,,\,2) \;=\; 5\,\mathbf{x}\,2$

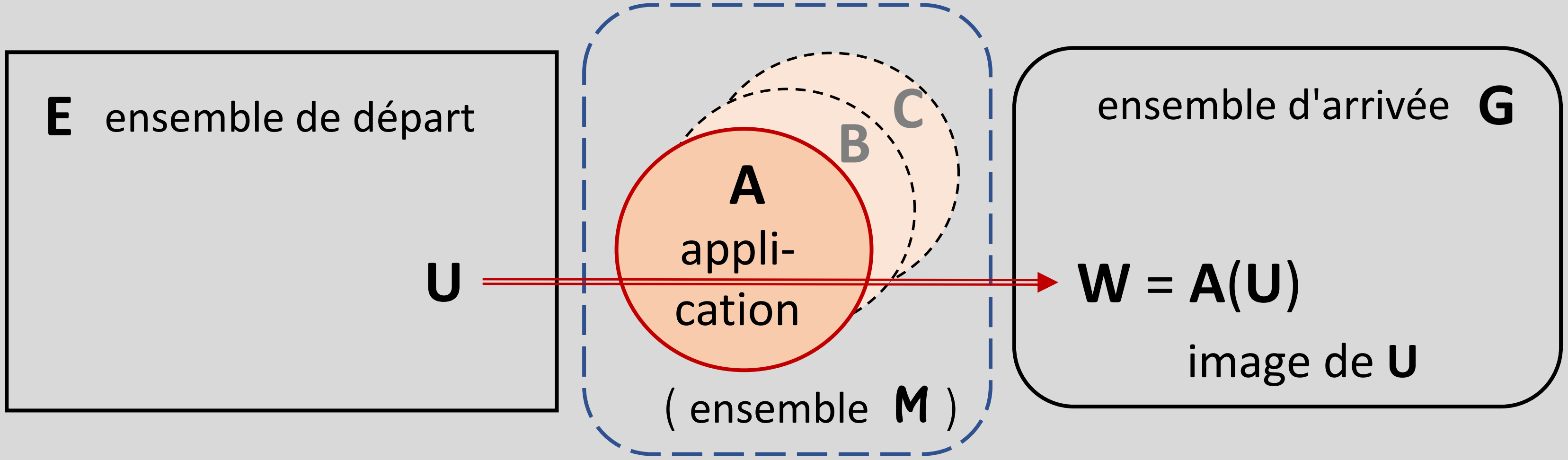
ordre opérateur-opérandes

$\mathbf{G}\,(\mathbf{U},\mathbf{V}) \;=\; \mathbf{U}\,.\,\mathbf{V}$

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

FLIN

action d’une « application » / son résultat



A : **E** -------------------------------> **G**

U |-------------------------> **W = A(U)**

propriétés de **A**

appartenance évent.
de **A** à un ensemble **M**

une application contient, dans sa définition, l’ensemble de départ et l’ensemble d'arrivée

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

action d'une « application » / son résultat

application linéaire

$$\mathbf{A} : \begin{array}{rcl} \mathbf{E} & \text{------------------------------>} & \mathbf{E} \\ \mathbf{U} & \text{|-------------------------->} & \mathbf{A}(\mathbf{U}) \end{array}$$

$\mathbf{A}(\lambda U) = \lambda\, \mathbf{A}(U)$

$\mathbf{A}(U+U') = \mathbf{A}(U) + \mathbf{A}(U')$

$\mathbf{A} \in \mathcal{L}\,(E,E)$

---

forme bilinéaire

$$\mathbf{B} : \begin{array}{rcl} \mathbf{E{x}E} & \text{--------------------------->} & \mathbf{R} \\ (\mathbf{U},\mathbf{V}) & \text{|--------------------->} & \mathbf{B}(\mathbf{U},\mathbf{V}) \end{array}$$

$\mathbf{B}(\lambda U,V) = \mathbf{B}(U, \lambda V) = \lambda\, \mathbf{B}(U,V)$

$\mathbf{B}(U+U',V) = \mathbf{B}(U,V) + \mathbf{B}(U',V)$

(*idem en* V)

$\mathbf{B} \in \mathcal{L}_2\,(ExE\,,\,R)$

(**E**x**E** : ensemble des couples d'éléments de **E**)

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

formes linéaires

FLIN

- *une forme linéaire*

  associe linéairement *un nombre à un vecteur ;*

- *les formes linéaires* (*ou* « covecteurs »)
  constituent « **l'espace dual** » *de l'espace d'origine ;*

- *leur variance est inverse de celle des vecteurs*.

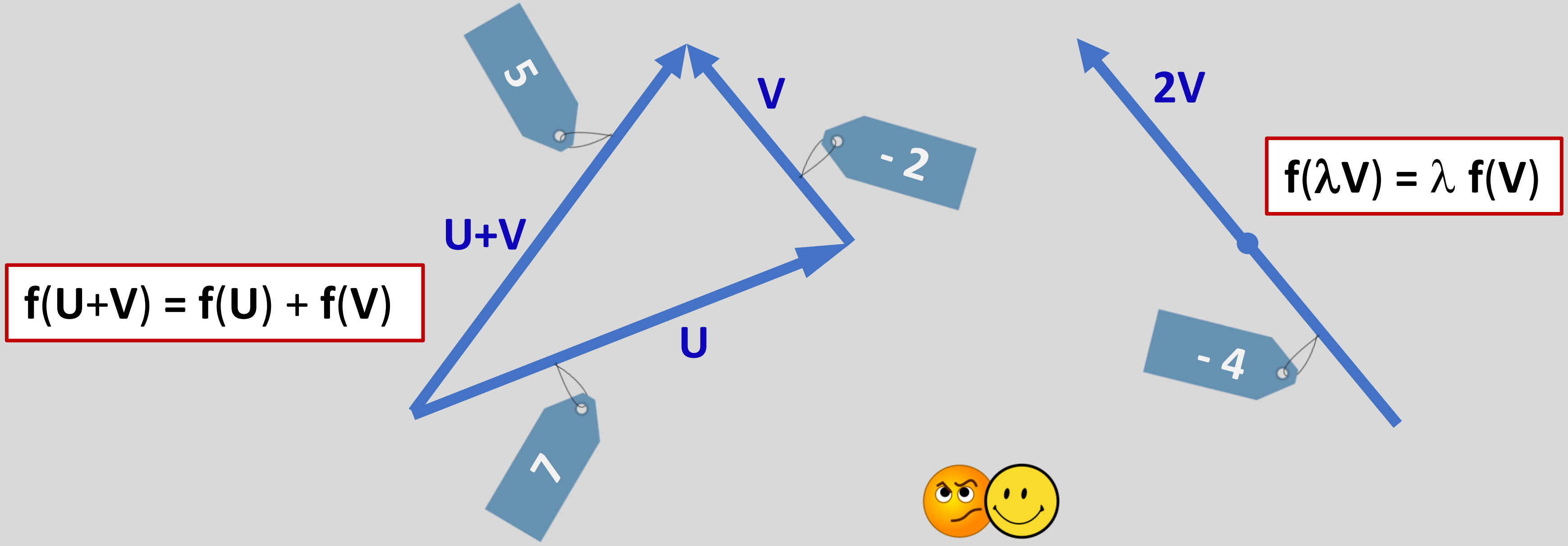
Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

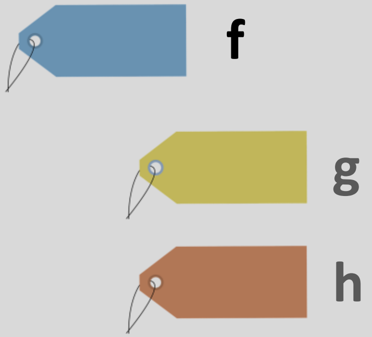
action d'un « opérateur » / son résultat

f(U) est **un nombre réel**

et **f** est **linéaire**

$\boxed{\mathbf{f} \text{ est une "}\mathbf{forme}\text{"... linéaire}}$





…

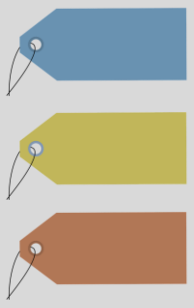
stock de formes linéaires

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

les formes linéaires constituent un E-V

addition vectorielle + $f+g$ est la ***f. lin.*** définie par $[f+g](U) = f(U) + g(U)$

multiplication par les scalaires x $\lambda x f$ est la ***f. lin.*** définie par $[\lambda x f](U) = \lambda . f(U)$



f

g

h

…

E-V **E***
des formes linéaires sur **E**

les f. lin. (f, g, h, …) *constituent un E-V* : **E*** **espace dual de E**

ou « covecteurs »

de même dimension que **E**
(en dim. finie)

$$\boxed{E^* = \mathcal{L}(E, R)}$$

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

FLIN

expression d'une forme linéaire

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{U}) = \mathbf{f}\,(u^1\mathbf{e_1} + u^2\mathbf{e_2}) = u^1\,\boxed{\mathbf{f}\,(\mathbf{e_1})} + u^2\,\boxed{\mathbf{f}\,(\mathbf{e_2})} = \mathbf{a_1}\,\mathbf{u^1} + \mathbf{a_2}\,\mathbf{u^2}$$ *qq. soit* **U**

f *est définie par* $\boxed{\mathbf{a_1}}$ $\boxed{\mathbf{a_2}}$ *dim.2*

une forme linéaire est définie par les valeurs qu'elle prend sur la base de **E**

$$\boxed{\mathbf{f}\,(\mathbf{U}) = \mathbf{a_i}\,\mathbf{u^i}}$$

Σ_i

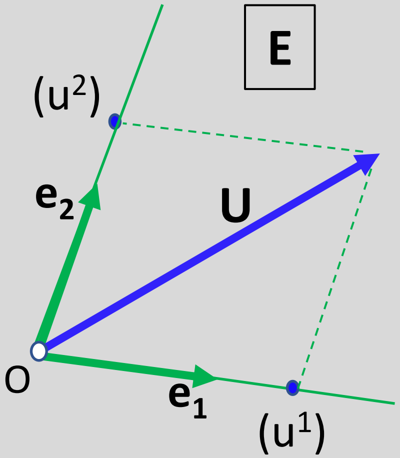
dim. qconque i = 1,n

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

FLIN

poursuite sur la i^{ème} composante

$\mathbf{e}^{*i}$ est l'application qui à tout **U** associe sa i^{ème} composante



les $\mathbf{e}^{*i}$:

- sont des *formes linéaires* (*donc* ∈ **E***)
- forment *une base de* **E***, dite « *duale* » de celle de **E**

$$\mathbf{U} = u^i\, \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}^{*i}(\mathbf{U}) = u^i$$

forme linéaire i^{ème} *composante*

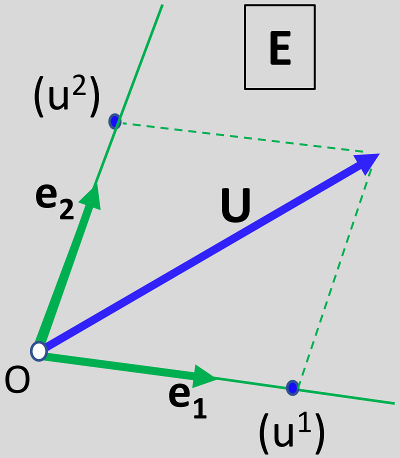
v. de base —— $\mathbf{e}^{*\,i}$ —— i *ème*

∈E*

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

poursuite sur la $i^{ème}$ composante

$\mathbf{e}^{*i}$ est l'application qui à tout **U** associe sa $i^{ème}$ composante



$\mathbf{U} = u^i\, \mathbf{e}_i$

$\mathbf{e}^{*i}(\mathbf{U}) = u^i$

les $\mathbf{e}^{*i}$:

- sont des *formes linéaires* (*donc* $\in$ **E***)
- forment *une base de* **E***, dite « *duale* » de celle de **E**

toute forme lin. **f** s'y décompose : $\mathbf{f} = \mathbf{a}_i.\mathbf{e}^{*i}$

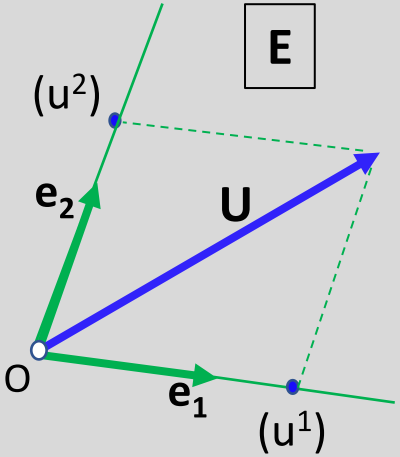
$$\mathbf{f}\,(\mathbf{U}) = \mathbf{a}_i.\mathbf{e}^{*i}(\mathbf{U}) = \mathbf{a}_i\, \mathbf{u}^i$$

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

FLIN

poursuite sur la $i^{\text{ème}}$ composante

$\mathbf{e}^{*i}$ est l'application qui à tout **U** associe sa $i^{\text{ème}}$ composante



$\mathbf{U} = u^i\, \mathbf{e}_i$

$\mathbf{e}^{*i}(\mathbf{U}) = u^i$

les $\mathbf{e}^{*i}$:

- sont des *formes linéaires* (*donc* $\in$ **E***)
- forment *une base de* **E***, dite « *duale* » de celle de **E**

toute forme lin. **f** s'y décompose : $\mathbf{f} = \mathbf{a}_i.\mathbf{e}^{*i}$

les $\mathbf{e}^{*i}$ appliquées aux vecteurs de la base ($\mathbf{e}_i$) de **E** :

$\mathbf{e}^{*1}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{1}$; $\mathbf{e}^{*1}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$

$\mathbf{e}^{*2}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$; $\mathbf{e}^{*2}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{1}$

dim. 2

$\mathbf{e}^{*i}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{1}$ *si* $i = j$; $= \mathbf{0}$ *sinon* *dim. qconque*

variances « inversées » dans un E-V et son dual

FLIN

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{U}) = a_1\, u^1 + a_2\, u^2 \qquad \left(\vec{f} \in E^*\ (\text{E-V})\ ;\ \vec{U} \in E\ (\text{E-V})\right)$$

changt de base dans **E** ⇨ changt de base dans **E***

la valeur **f(U)** *est inchangée*

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{U}) = a_1\, u^1 + a_2\, u^2$$

invariant

base duale

$(e^{*1}\ e^{*2})$

contravariante

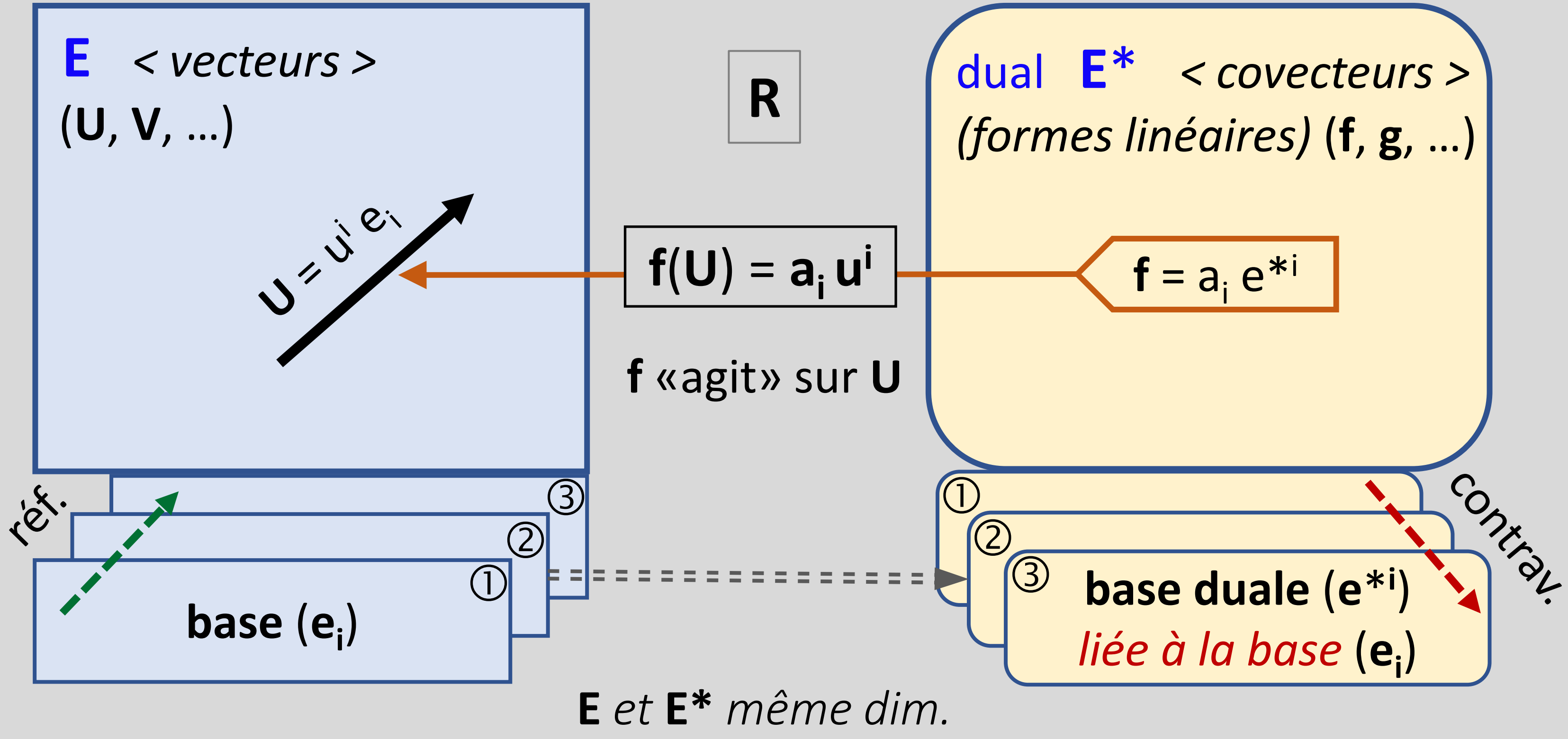
⇦ *covariant*

contravariant

référence : base de **E**

dim. 2

résumé



la valeur **f**(**U**) *est maintenue aux changements de bases* **conjoints** *dans* **E** *et* **E***

2 espaces différents et liés

FLIN

$\mathbf{M} = \mathbf{OM} = u^1\,\mathbf{e_1} + u^2\,\mathbf{e_2} \quad \in \mathbf{R^2}$

$\mathbf{f} = a_1\,\mathbf{e^{*1}} + a_2\,\mathbf{e^{*2}} \quad \in \mathbf{R^{2*}}$

valeur attribuée à **M** *par* **f** :

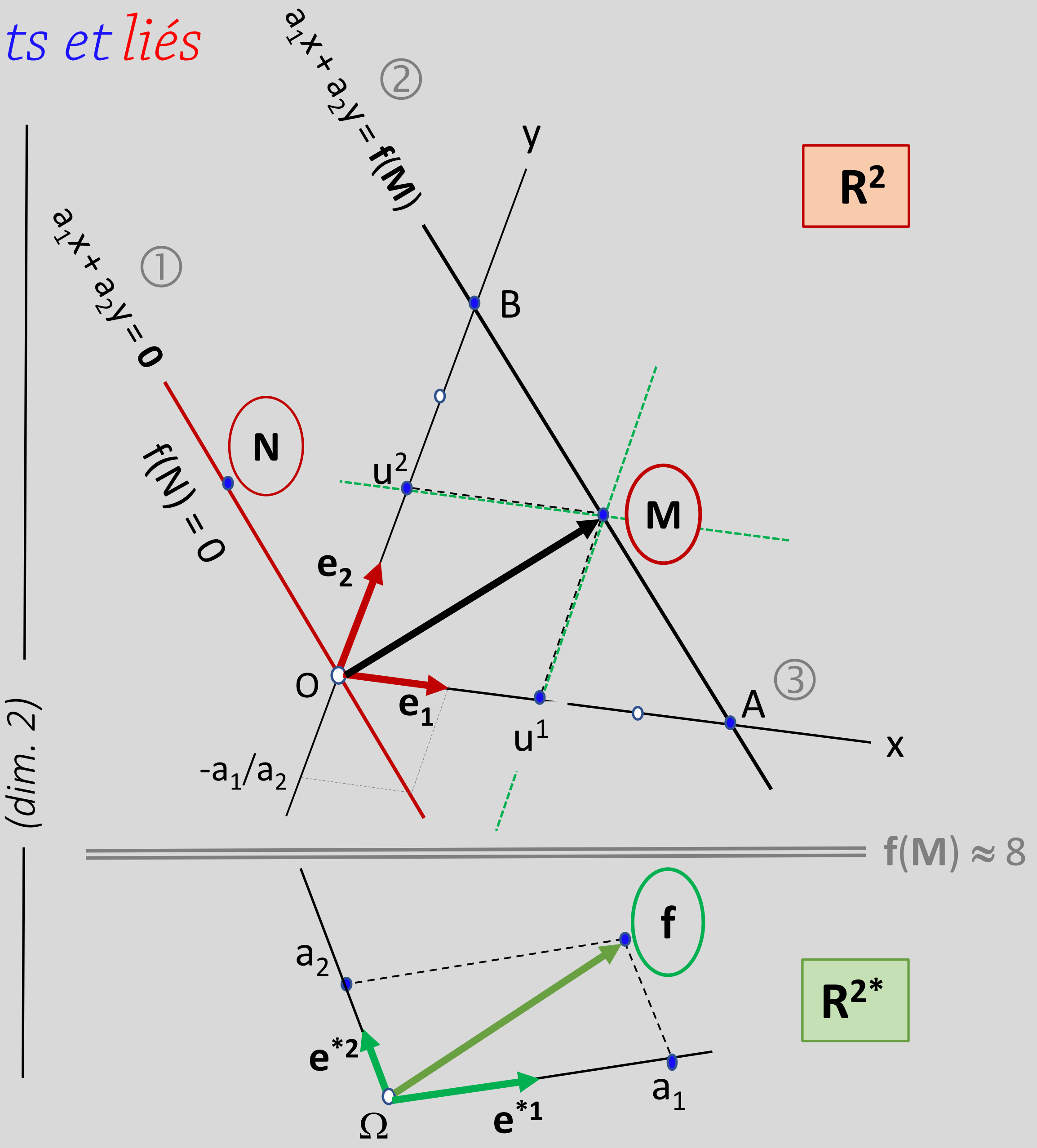
$$\boxed{\mathbf{f}\,(\mathbf{M}) = \mathbf{a_1}\mathbf{u^1} + \mathbf{a_2}\mathbf{u^2}} \in \mathbf{R} \quad \begin{cases} = \mathbf{f}\,(\mathbf{A}) = a_1.\overline{OA} \\ = \mathbf{f}\,(\mathbf{B}) = a_2.\overline{OB} \end{cases}$$

$\mathbf{e^{*1}}\,(\mathbf{M}) = u^1 \qquad \mathbf{e^{*2}}\,(\mathbf{M}) = u^2$

à **M** *et* **f** *donnés,*
un changt de base
dans $\mathbf{R^2}$

$\Rightarrow$

un changt de base
contravariant dans $\mathbf{R^{2*}}$
pour maintenir la valeur **f (M)**



Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

bidual

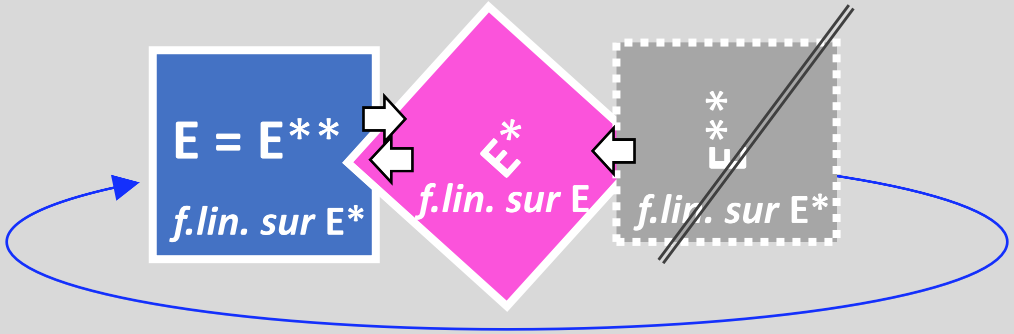
FLIN

E* espace dual de **E**
(formes linéaires sur **E***)*

E* **a aussi son espace dual** **(E*)*** **!**
(formes linéaires sur **E****)*

de même dimension (finie),
E et E** sont isomorphes

isomorphisme « naturel » [1]
qui permet de confondre **E** et **E****



[1] *ne fait pas intervenir les bases*

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

bidual

FLIN

vecteurs	f.lin. sur **E**
E = (**E***)*	**E***
f.lin. sur **E*** **!**	*(co)vecteurs* **!**

$$\langle\ 🤨\ ,\ 🙂\ \rangle \qquad \boxed{\begin{matrix} f\,(U) \\ !? \\ U\,(f) \end{matrix}} \quad \begin{matrix} = a_1\,u^1 + a_2\,u^2 \\ \\ = u^1\,a_1 + u^2\,a_2 \end{matrix}$$

« la chose fascinante de la dualité en dimension finie est qu'elle agit comme un miroir »

"Dualité en dimension finie" - PDF ENS

formes bilinéaires

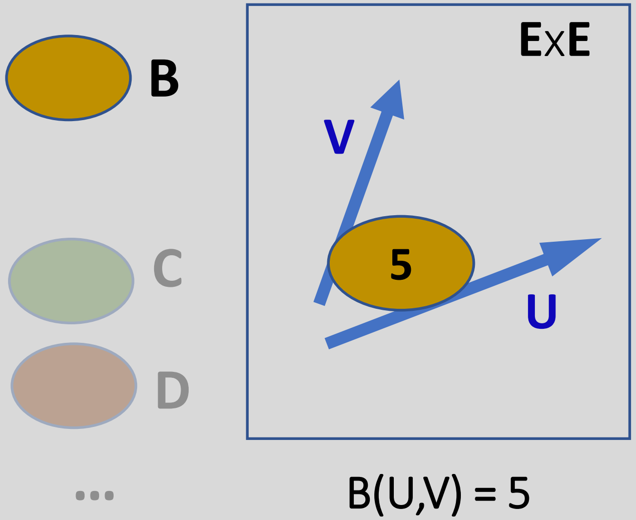
- *une forme bilinéaire*

  associe bilinéairement *un nombre à un couple de vecteurs ;*

- les formes bilinéaires constituent un espace vectoriel ;

- ce sont des tenseurs 2 fois covariants.

formes bilinéaires



B(U,V) = 5

B(V,U) = ...

B(U,V) est **un nombre réel**

et **B** est **linéaire en U et en V** (séparément)

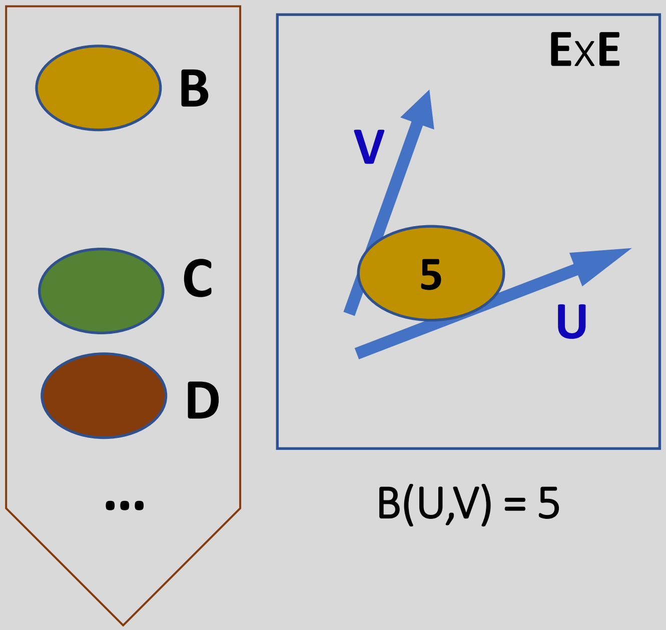
B est une "**forme**"... **bilinéaire** sur **ExE**

i.e. **B(λU,V) = B(U,λV) = λ B(U,V)**

B(U+U',V) = B(U,V) + B(U',V) $\in$ **R**

idem en V

formes bilinéaires



espace vectoriel des f. bilinéaires sur l'ensemble **ExE**

B(U,V) = 5

B, C, D, … sont des **formes bilinéaires**

sur **ExE**

on définit les 2 lois : une **+** interne et une x par les scalaires, …

les formes bilin. sur **ExE** *constituent un* **E-V** *sur* **R**

« $\mathcal{L}_2$(**ExE , R**) »

produit tensoriel et tenseurs d'ordre 2

- *un* **produit tensoriel** (**PT**) *s'obtient en* appairant 2 vecteurs ou covecteurs *au moyen d'un opérateur algébrique « ⊗ » de type multiplicatif ;*

- *les* **produits tensoriels** *obtenus peuvent être additionnés et multipliés par des nombres, ce qui produit des* **tenseurs** *;*

- *les* **tenseurs** (*et* **PT**) *constituent un E-V ;*

- *ils ont des propriétés* **d'applications** *ou* **de formes** *linéaires ou bilinéaires.*

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

produit tensoriel et tenseurs d'ordre 2

ensembles en jeu :	**E**	vecteurs **U** et **V**
	E*	formes linéaires **f** et **h**

types de produits tensoriels (**PT**) *possibles :*

dualité

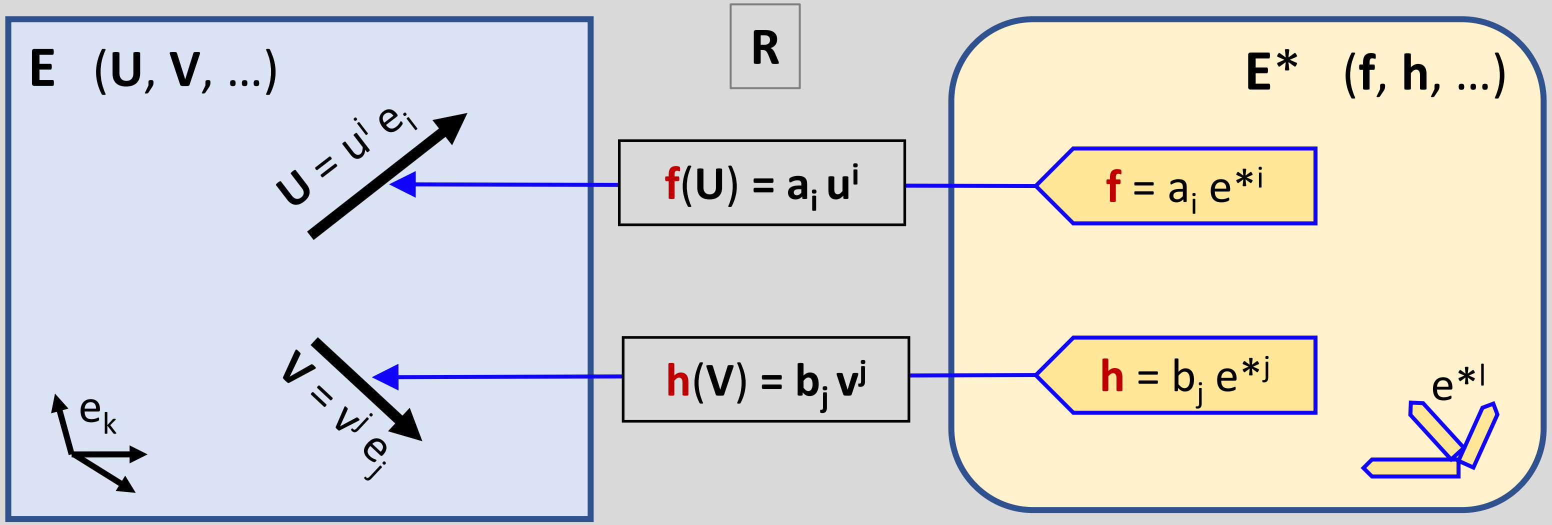
E <–> E*

▪ $\mathbf{f} \otimes \mathbf{h}$	**PT**	constitués de	**2** formes linéaires.
▪ $\mathbf{f} \otimes \mathbf{V}$	**PT**	» » »	**1** forme linéaire et **1** vecteur.
▪ $\mathbf{U} \otimes \mathbf{h}$	**PT**	» » »	**1** vecteur et **1** forme linéaire.
▪ $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$	**PT**	» » »	**2** vecteurs.

les **PT** *sont des tenseurs "élémentaires"*

l'approche des tenseurs d'ordre 2 est inspirée de « Premiers pas en calcul tensoriel »
de François Rouvière, Professeur émérite de Mathématiques à l'Université Nice-Sophia Antipolis.

2 formes linéaires . . .

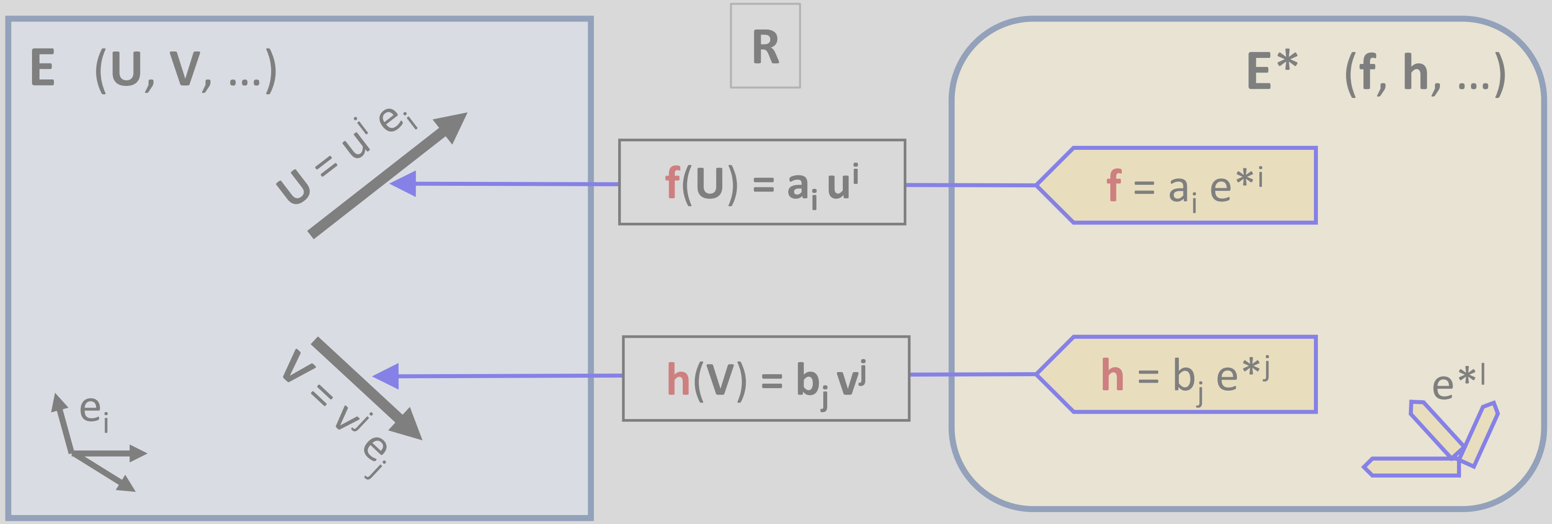


*les covecteurs de **E*** agissent sur les vecteurs de **E***

. . . construisons 1 forme bilinéaire

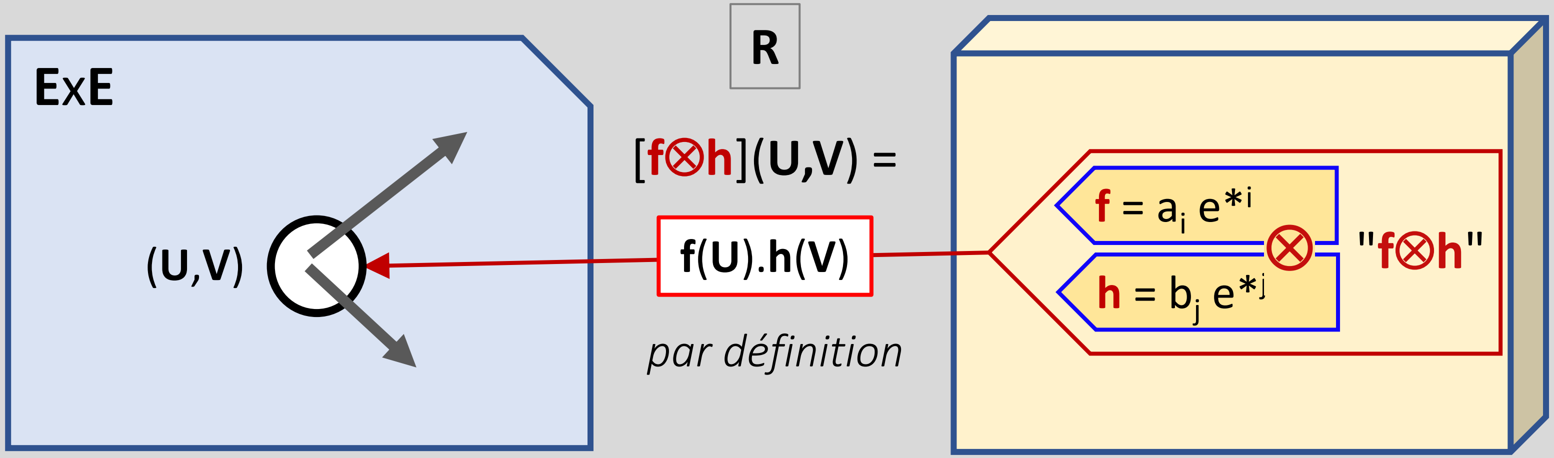
Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

2 formes linéaires pour 1 forme bilinéaire



les ***covecteurs*** *de* ***E**** *agissent sur les vecteurs de* ***E***

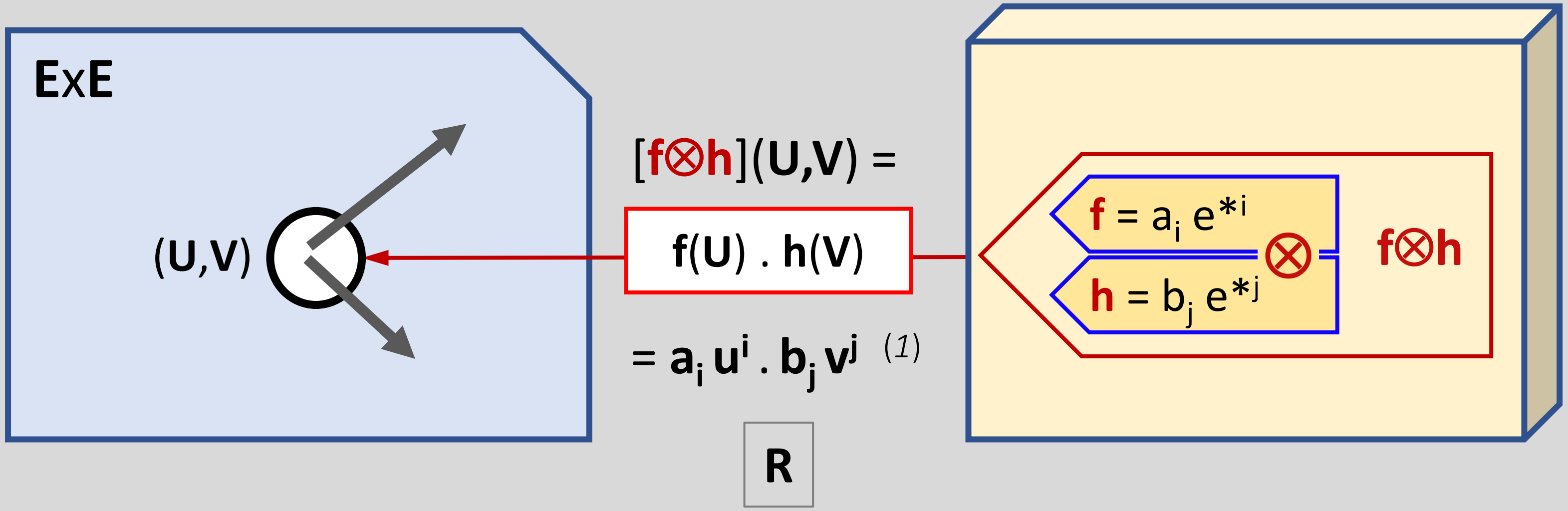
. . . construisons 1 forme bilinéaire



appairage (⊗) de ***covecteurs***

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

produit tensoriel de 2 covecteurs



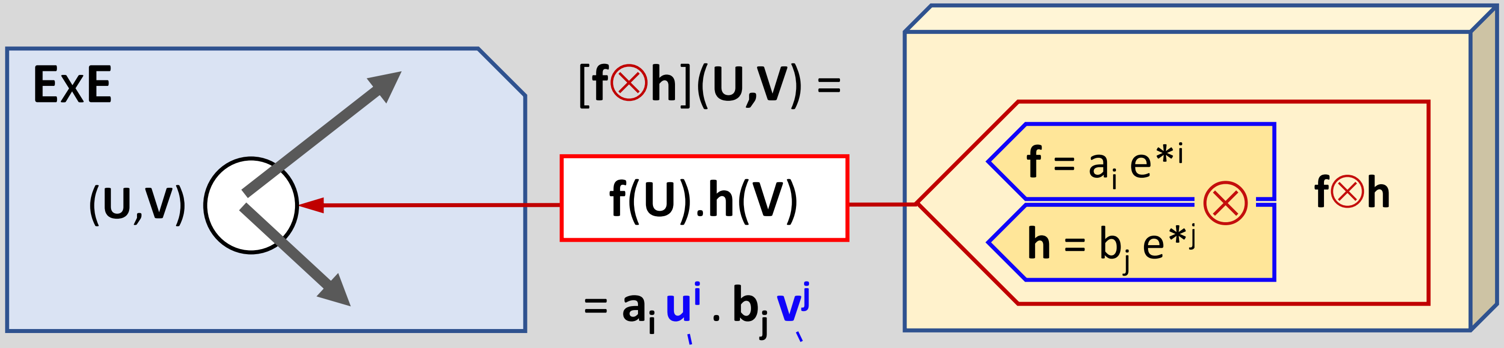
f⊗h est

- une **forme bilinéaire** sur **ExE** $\in \mathcal{L}_2$ **(ExE,R)**  ✓
- le **« produit tensoriel »** des covecteurs **f** et **h** 

(1) *en dim. 2* **f(U).h(V)** $= (a_1u^1 + a_2u^2).(b_1 v^1 + b_2v^2)$

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

produit tensoriel de 2 covecteurs



$$f(U).h(V) = a_i\, b_j\, \boxed{e^{*i}(U).e^{*j}(V)}$$

caractérisons f⊗h

$$[f \otimes h](U,V) = a_i\, b_j\, [e^{*i} \otimes e^{*j}](U,V)$$

⇩

$$\boxed{f \otimes h \;=\; a_i\, b_j . e^{*i} \otimes e^{*j}}$$

$i = 1$ à n ; $j = 1$ à n

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

produit tensoriel de 2 covecteurs

le PT de **f** et de **h** $\boxed{\mathbf{f}\otimes\mathbf{h} \;=\; \underbrace{a_i\, b_j}_{n^2 \text{ nombres}} . \underbrace{e^{*i} \otimes e^{*j}}_{n^2 \text{ PT des formes lin. de base de } \mathbf{E}^*}}$

n² *nombres*

n² PT *des formes lin.*
de base de **E***

- *les* $e^{*i} \otimes e^{*j}$ *constituent une base d'un* E-V de **dimension n²**,
  - « **espace produit tensoriel** » *de* **E***et **E*** *noté* **E*⊗ E***
  - *ses éléments sont appelés* tenseurs 2 fois covariants.

- *il contient les* PT *et* ***toutes leurs combinaisons linéaires****.*

- *cet espace s'identifie à celui des formes bilinéaires sur* **ExE.**

produit tensoriel de 2 covecteurs (résumé)

en résumé le produit tensoriel de **f** *et de* **h**

$$\boxed{\mathbf{f}\otimes\mathbf{h} = \underbrace{a_i\, b_j}_{\mathbf{n}^2 \text{ nombres}} \,.\, \underbrace{e^{*i}\otimes e^{*j}}_{\mathbf{n}^2 \text{ PT des formes lin. de base de } \mathbf{E^*}}}$$

agit sur un couple **(U,V)** : $[\mathbf{f}\otimes\mathbf{h}](\mathbf{U},\mathbf{V}) = a_i\, b_j\, u^i v^j$

le nombre $[\mathbf{f}\otimes\mathbf{h}](\mathbf{U},\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} v^1 \dots v^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1b_1 & \dots & a_nb_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & \dots & a_nb_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u^1 \\ \dots \\ u^n \end{pmatrix}$

f⊗h

- **PT ∈ E*⊗E***

- forme bilinéaire $\in \mathcal{L}_2$ **(ExE,R)**

du produit tensoriel au « grand » tenseur 2 fois covariant

n'importe quelle forme bilinéaire B sur ExE s'exprime de manière unique :

produit tensoriel
$\mathbf{f \otimes h} = a_i\, b_j . e^{*i} \otimes e^{*j}$

$$\boxed{\mathbf{B} = \boldsymbol{b}_{ij} \,.\, \mathbf{e^{*i} \otimes e^{*j}}}$$

base (génératrice)

b_{ij} : n² composantes (arbitraires) de **B** dans la base de **E*⊗E***

b # b !

B

- **tenseur** *2 fois covariant* ∈ **E*⊗E***
- *forme bilinéaire* ∈ $\mathcal{L}_2$ **(ExE,R)**

- identité
- activité

action sur le couple **(U,V)** : $\boxed{\mathbf{B(U,V)} = b_{ij}\, u^i v^j}$ ∈ **R**

$$\textit{nombre}\ \mathbf{B(U,V)} = \begin{pmatrix} v^1 \dots v^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{n1} \\ \dots \\ b_{1n} \dots b_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u^1 \\ \dots \\ u^n \end{pmatrix}$$

transposition possible

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

résumé (cas du tenseur 2 fois covariant)

l'espace produit tensoriel **E*⊗ E***

s'identifie à l'E-V des formes bilinéaires

$\mathcal{L}_2(\mathbf{E}\times\mathbf{E}\ ,\ \mathbf{R})$

base — *d'un* → "espace produit tensoriel" « **E*⊗ E*** »

dim. $\mathbf{n^2}$

constituent une

contenant les

prod. tensoriel

$\mathbf{f}\otimes\mathbf{h} = \underbrace{a_i\, b_j}\ .\ \boxed{\mathbf{e^{*i}}\otimes\mathbf{e^{*j}}}$

n^2 *produits croisés des composantes des 2 formes linéaires*

tenseurs

2 fois covariants :

$\mathbf{B} = \boldsymbol{b}_{i\,j}\ \mathbf{e^{*i}}\otimes\mathbf{e^{*j}}$

$\boldsymbol{b}_{i\,j}$ quelconques

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

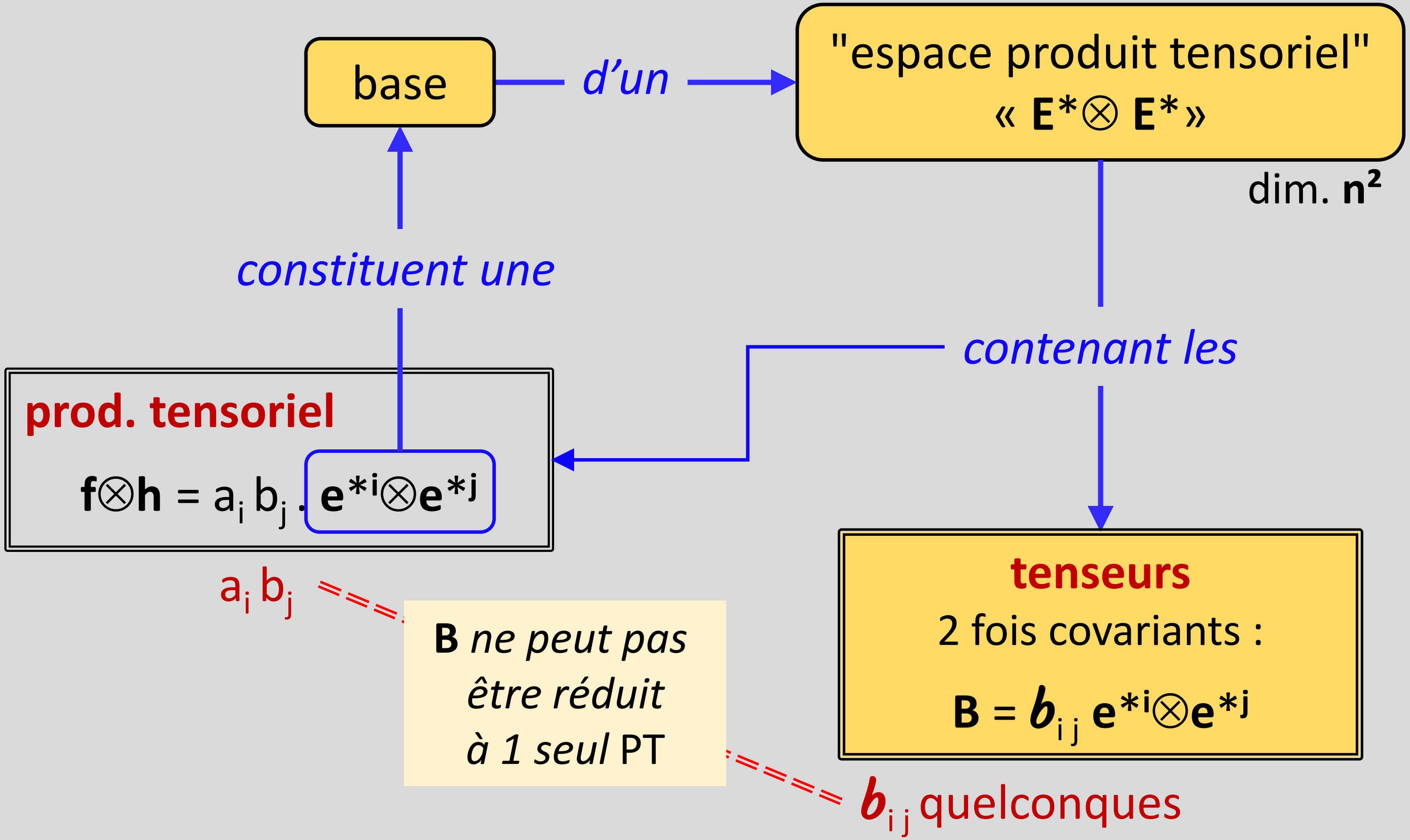
résumé (cas du tenseur 2 fois covariant)

b_{ij} : n^2 nombres

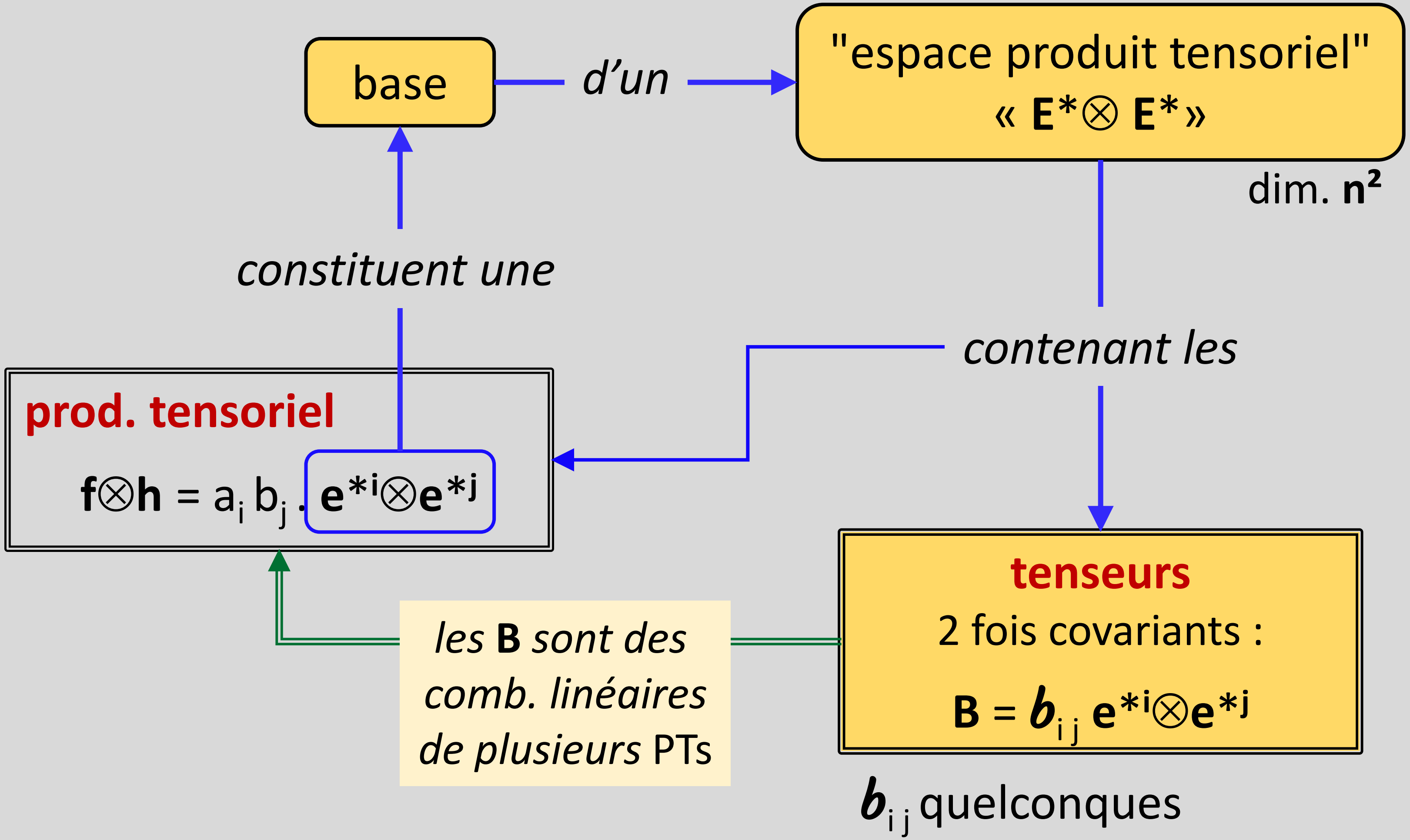
$a_i\, b_j$: n^2 produits résultant de 2n nombres

les composantes $a_i\, b_j$ d'un PT ne sont pas indépendantes

par ex.
$a_1 b_1 . a_2 b_2 = a_1 b_2 . a_2 b_1$



résumé (cas du tenseur 2 fois covariant)



Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

résumé (cas du tenseur 2 fois covariant)

$$\underbrace{\mathbf{B}} = \underbrace{b_{ij}} \,.\, \underbrace{\mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}^{*j}} \qquad (i\,,\,j = 1 \text{ à } n)$$

tenseur
(d'ordre 2)

compo-
santes
n² nombres

base
n² formes
bilinéaires

« 2 fois covariant »

E* ⊗ **E*** ≡ $\mathcal{L}_2$(**E**x**E** , **R**)

n *est la dimension commune de* **E** *et de* **E***

« 2 fois covariant » ⇨

- *un tenseur est invariant*
- *on dit souvent : « le tenseur* b_{ij} *» !*

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

produit tensoriel et tenseurs d'ordre 2

ensembles en jeu : **E** vecteurs **U** et **V**

E* formes linéaires **f** et **h**

ce **PT,**	*constitué de*	*est une*	*∈ un E-V nommé*	*contenant des tenseurs*
▪ **f ⊗ h**	**2** formes linéaires,	forme bilinéaire sur **ExE**	« **E*⊗ E*** »	2 fois covariants
▪ **f ⊗ V**	**1** f. linéaire et **1** vecteur,	application linéaire sur **E**	« **E*⊗ E** »	1 fs cov./1 fs contrav.
▪ **U ⊗ h**	**1** vecteur et **1** f. linéaire,	application linéaire sur **E***	« **E ⊗ E*** »	1 fs contrav./1 fs cov.
▪ **U ⊗ V**	**2** vecteurs.	forme bilinéaire sur **E*** x **E***	« **E ⊗ E** »	2 fois contravariants

« fonctionnel » *"par origine"*

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

tenseur fondamental métrique
(en espace euclidien)

- *le tenseur métrique est le «* **tenseur fondamental** *» ;*

- *il permet de définir* **longueurs***,* **angles** *nombres invariants ;*

- *il résulte directement d'un* **produit scalaire***, qui donne la structure d'espace euclidien et permet de définir des bases orthonormées.*

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

MET

tenseur fondamental métrique

$$\boxed{\mathbf{G} = g_{i\,j} \,.\, \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}^{*j}}$$

est $\begin{cases} \text{une forme bilinéaire } \textbf{symétrique} : \; g_{i\,j} = g_{j\,i} \\ \textit{et} \\ \text{un tenseur} \qquad \text{2 fois covariant} \end{cases}$

« produit scalaire » [1]

tenseur "fondamental métrique"

[1] *la forme bilin. est de plus* définie, positive ⇨ *l'espace* **E** *est* euclidien. *(en dim. finie)*

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

MET

tenseur fondamental métrique

$$\boxed{\mathbf{G} = g_{i\,j} \,.\, \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}^{*j}}$$

est
- une forme bilinéaire **symétrique** : $g_{i\,j} = g_{j\,i}$
- *et*
- un tenseur 2 fois covariant

« produit scalaire »

tenseur "fondamental métrique"

action de **G** *sur* **(U,V)**

$$\boxed{\mathbf{G(U,V)} = g_{i\,j} \,.\, [\mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}^{*j}]\,\mathbf{(U,V)} = g_{i\,j} \,.\, \mathbf{u}^i\,\mathbf{v}^j}$$

autre notation

$$\boxed{\mathbf{G(U,V)} = \mathbf{U.V} = g_{i\,j} \,.\, \mathbf{u}^i\,\mathbf{v}^j}$$

produit scalaire ($\in$ **R**) *des vecteurs* **U** *et* **V**

MET

tenseur fondamental métrique

$$\boxed{\mathbf{G} = g_{i\,j}\,.\,\mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}^{*j}}$$

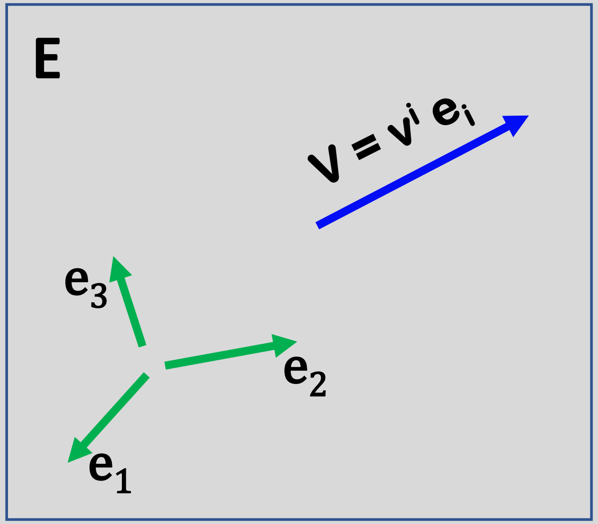
$\mathbf{G}(\mathbf{e}_k\,,\,\mathbf{e}_l) = \boxed{\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \mathbf{g}_{kl}}$ produits scalaires 2 à 2 des vecteurs de base de **E**.

$$[\mathbf{G}]\ (\textit{ou}\ [\mathbf{g}]) = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & g_{ii} & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & \dots & e_1 \cdot e_n \\ \dots & e_i \cdot e_i & \dots \\ e_n \cdot e_1 & \dots & e_n \cdot e_n \end{pmatrix}$$

composantes
du tenseur **G**
"*2 fois covariant*"

matrice carrée **n**x**n** symétrique, le + souvent appelée « **tenseur** » métrique

longueur



➤ POUR UN VECTEUR **V** :

LONGUEUR² : $\|\mathbf{V}\|^2 = \mathbf{V}.\mathbf{V} = (v^i\, \mathbf{e}_i).(v^j\, \mathbf{e}_j) = v^i\, v^j\, \mathbf{g}_{ij}$

$\boxed{\|\mathbf{V}\|^2 = v^i\, v^j\, \mathbf{g}_{ij}}$

BASE ON $\boxed{\|\mathbf{V}\|^2 = \Sigma_i\, (x^i)^2}$

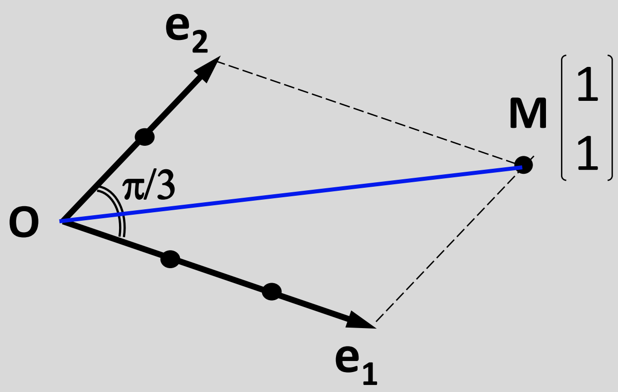
Pythagore

invariant toute base

> 0

exemple (dim. 2)

$$\mathbf{g}_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$\|\mathbf{OM}\|^2 =$

$1x1x9 + 1x1x4 + 2(1x1x3) = \mathbf{19}$

MET

variance des composantes (tenseur métrique)

ancienne base : $\mathbf{e}_i$

E

nouvelle base : $\mathbf{e'}_I = \mathbf{a}_I^i \, \mathbf{e}_i$

matrice de chang$^{\underline{t}}$ de base $\mathbf{A} = \left(\mathbf{a}_j^i \right)$

$$\mathbf{e'}_I \cdot \mathbf{e'}_J = (\mathbf{a}_I^i \, \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{a}_J^j \, \mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_I^i \, \mathbf{a}_J^j \, (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$$

$$\mathbf{g'}_{IJ} = \boxed{\mathbf{a}_I^i \, \mathbf{a}_J^j} \, \mathbf{g}_{ij}$$

nouvelles composantes
du tenseur métrique **G**

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{[\mathbf{g'}] = {}^t\mathbf{A} \times [\mathbf{g}] \times \mathbf{A}}$$

les composantes g_{ij} du tenseur
sont *2 fois covariantes*

(valable pour toute f. bilinéaire)

MET

composantes covariantes

$$\mathbf{U.V} = (g_{ij}\, u^i)\, \mathbf{v}^j = \underbrace{(g_{11}\, u^1 + g_{21}\, u^2)}_{\mathbf{u_1}}\, \mathbf{v}^1 + \underbrace{(g_{12}\, u^1 + g_{22}\, u^2)}_{\mathbf{u_2}}\, \mathbf{v}^2 = {}^t[V] \times [g] \times [U]$$

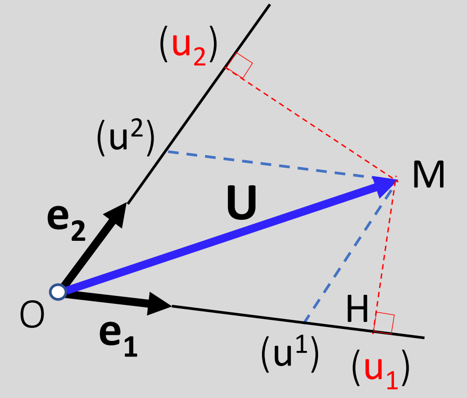
"abaissement d'indice"

$\mathbf{u_1}\ \mathbf{u_2}$: « *composantes covariantes* » de **U**

($\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}$: « *composantes covariantes* » de **V**)

$$\boxed{U.V = \mathbf{u_i}\, v^i = u^i\, \mathbf{v_i}}$$

(dans une base quelconque)



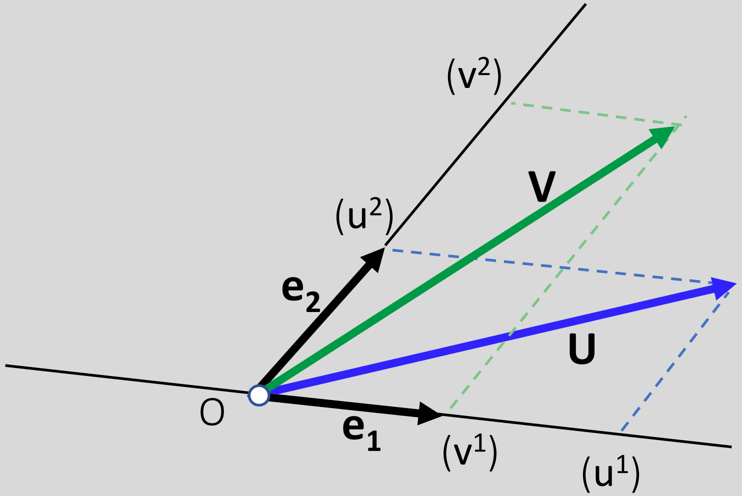
(cas où $||e_1|| = ||e_2|| = 1$)

dans une base **ON**, ***composantes* = *composantes covariantes*,**
on retrouve l'expression classique $U.V = \Sigma_i\, u_i v_i$ $i = 1$ à n

conservation normes et angles

MET

PS de **U** et **V** : action du tenseur g_{ij} . $\mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}^{*j}$ sur **(U,V)**



U représenté par $[U] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

V représenté par $[V] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

dans

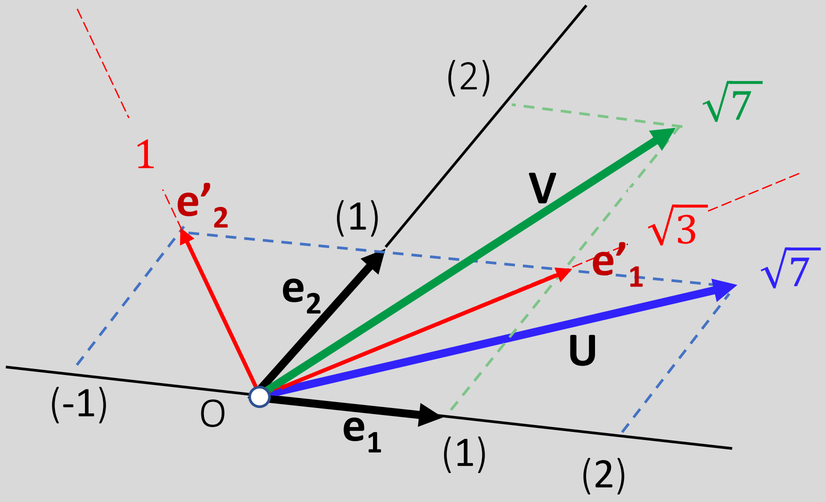
e_1 e_2

$$\mathbf{U.V} = {}^t[V] \times [g] \times [U] \qquad ({}^t[g] = [g])$$

conservation normes et angles

MET

PS de **U** et **V** : action du tenseur $g_{ij} \, . \, \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}^{*j}$ sur **(U,V)**



$$\mathbf{U.V} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{13/2}}$$

base $\mathbf{e_1 \, e_2}$ normée **/ 60°**

$$\boxed{||\mathbf{U}|| = ||\mathbf{V}|| = \sqrt{7} \;/\; \mathbf{(21{,}8\,°)}}$$

changement de base $\mathbf{e'_1 = e_1 + e_2}$; $\mathbf{e'_2 = - e_1 + e_2}$

$$\mathbf{U.V} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{13/2}}$$

base $\mathbf{e'_1 \, e'_2}$ non normée **/ 90°**

$$\boxed{||\mathbf{U}|| = ||\mathbf{V}|| = \sqrt{7} \;/\; \mathbf{(21{,}8\,°)}}$$

U représenté par [U] = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

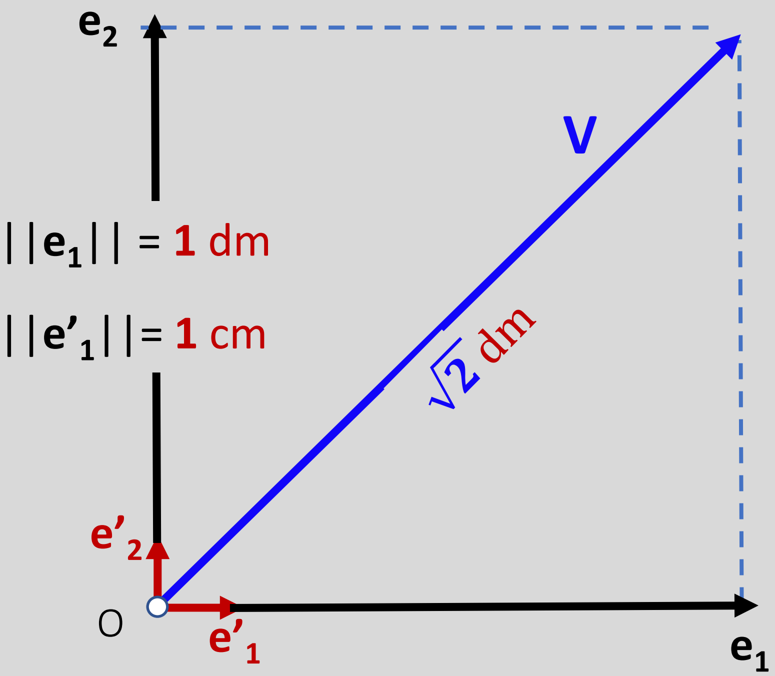
V représenté par [V] = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

dans $e_1 \, e_2$ — dans $e'_1 \, e'_2$

XL

MET

soyons mesurés !



changt de base $e'_1 = e_1/10$
$e'_2 = e_2/10$

$V = 1.e_1 + 1.e_2$
$= 10\,e'_1 + 10\,e'_2$

$e_1.e_1 = e_2.e_2 = 1$ $e'_1.e'_1 = e'_2.e'_2 = 0{,}01$

$$g_{ij} = \overset{dm^2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{dm^2}{\begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}01 \end{bmatrix}}$$

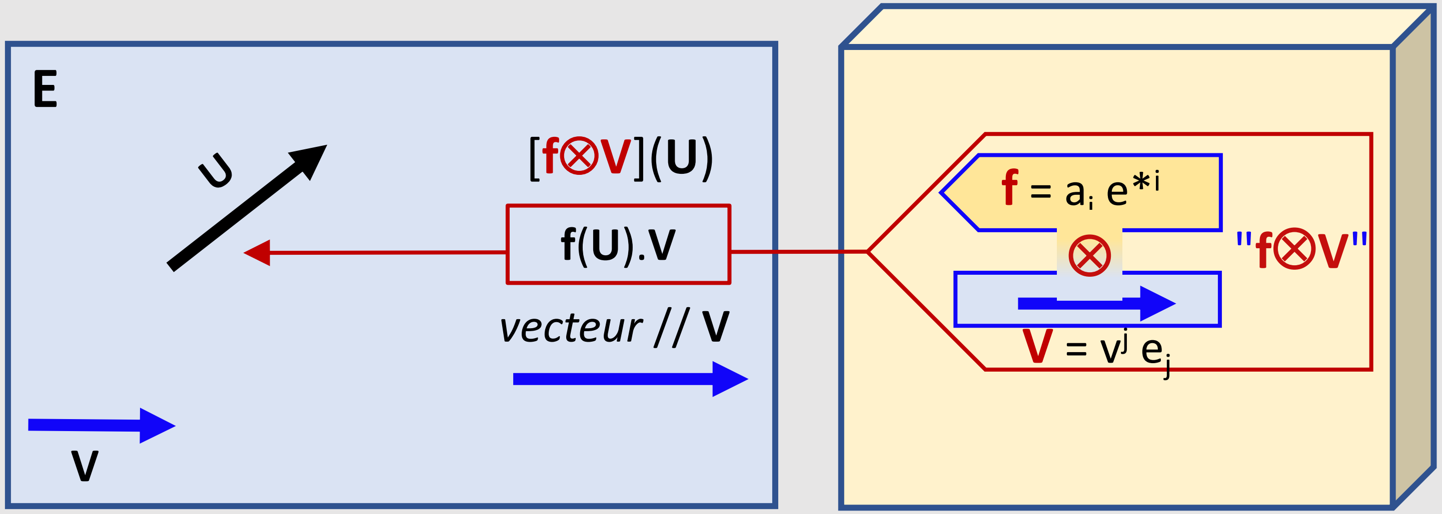
$e_1\ e_2$: **ON** $e'_1\ e'_2$: ortho., **non-normée**

$||V||^2 = 1^2 \times 1 + 1^2 \times 1 = 2 \times 1$ dm²

$||V||^2 = 10^2 \times 0{,}01 + 10^2 \times 0{,}01 = 200 \times 0{,}01$ dm²

les composantes sont sans dimension

1 forme linéaire et 1 vecteur → 1 application linéaire



appairage (⊗)
*d'**1 covecteur***
*et d'**1 vecteur***

f⊗V associe à **U** le vecteur **f(U).V** (colinéaire à V)

f⊗V est
- le « **produit tensoriel** » (**PT**) du covecteur **f** et du vecteur **V**
- une **AL** (application linéaire) $\boxed{\mathbf{U} \;|{-}{-}{-}{-}{>}\; \mathbf{f(U).V}}$ de **E** dans **E** ($\in \mathcal{L}$(**E**,**E**))

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

produit tensoriel de 2 covecteurs

$[\mathbf{f}\otimes\mathbf{V}](\mathbf{U}) =$

$\boxed{\mathbf{f(U).V}}$

$= \mathbf{a_i\,u^i}.v^j\,e_j$

$[e^{*i}\otimes e_j](\mathbf{U}) =$

$\boxed{e^{*i}(\mathbf{U}).e_j}$

$= \mathbf{u^i}.e_j$

$[f\otimes V](U) = a_i\,v^j\,[e^{*i}\otimes e_j](U)$

$\boxed{\mathbf{f\otimes V} = a_i\,v^j.e^{*i}\otimes e_j}$ **PT** du covecteur **f** et du vecteur **V**

- *les* $e^{*i}\otimes e_j$ *constituent une base d'un* E-V de **dimension n²**,
  - ✓ nommé « **espace produit tensoriel** » de **E***et **E** noté **E*⊗ E**
  - ✓ ses éléments sont appelés tenseurs 1 fois covariants et 1 fois contravariants

- *cet espace s'identifie à celui des applications linéaires de* **E** *dans* **E.**

- *(il contient les* PTs *et toutes leurs combinaisons linéaires).*

Pierre CHABRY chabryp@outlook.fr – KAFEMATH 2020.

produit tensoriel d'une forme linéaire et d'un vecteur

en résumé le produit tensoriel de **f** *et de* **V**

$$\boxed{\mathbf{f \otimes V} = a_i\, v^j . e^{*i} \otimes e_j} \qquad \in \mathbf{E^* \otimes E}$$

son action sur **U** *:* $[\mathbf{f \otimes V}]\,(\mathbf{U}) = \mathbf{f(U).}\boxed{\mathbf{V}} = \boxed{\underbrace{(a_i\, u^i)\; v^j}_{c^j} \,\mathbf{.e_j}} \qquad \in \mathbf{E} \qquad (\,//\,\mathbf{V}\,)$

f⊗V

- **PT** *d'1 forme linéaire et d'1 vecteur* $\in \mathbf{E^* \otimes E}$
- *application linéaire de rang 1* $\in \mathcal{L}(\mathbf{E,E})$

compos. de $[\mathbf{f \otimes V}](\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} c^1 \\ \cdots \\ c^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 v^1 & \ldots & a_n v^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 v^n & \ldots & a_n v^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u^1 \\ \cdots \\ u^n \end{pmatrix} \qquad = (a_i\, u^i) \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ \cdots \\ v^n \end{pmatrix}$

tenseur mixte 1 fois covariant et 1 fois contravariant

n'importe quelle application lin. A peut s'exprimer de manière unique :

produit tensoriel
$\mathbf{f}\otimes\mathbf{V} = a_i v^j \, e^{*i}\otimes e_j$

$$\boxed{\mathbf{A} = t_i^{\ j} \, . \, \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e_j}}$$

base (génératrice)

$t_i^{\ j}$ **n²** composantes (arbitraires) de **A** dans la base de **E*⊗E**

A

- *tenseur mixte 1 fois covar., 1 fs contrav.* $\in$ **E*⊗E**
- *application linéaire* $\in \mathcal{L}$(**E,E**)

action sur **U** : $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = [t_i^{\ j}\, \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e_j}](\mathbf{U}) = t_i^{\ j}\, \mathbf{e}^{*i}(\mathbf{U}).\mathbf{e_j}$

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{U}) = t_i^{\ j}\, u^i \,.\, \mathbf{e_j}} \quad \in \mathbf{E}$$

composantes de **A(U)** $= \begin{pmatrix} t_1^{\ 1} \dots t_n^{\ 1} \\ \dots \\ t_1^{\ n} \dots t_n^{\ n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u^1 \\ \dots \\ u^n \end{pmatrix}$

TENS_2

« la forme bilinéaire et le tenseur 2 fois contravariant »

composantes de **B**
dans la base $\mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}^{*j}$

$$B(U,V) = b_{ij}\, u^i v^j$$

composantes de **U⊗V**
dans la base $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

B ***forme* bilinéaire** *sur* **ExE** *est une* ***forme* linéaire** *sur* **E⊗E**

$$B = b_{ij} \,.\, e^{*i} \otimes e^{*j}$$

appliquons-la au tenseur **T** ($\in$ **E⊗E**)

$$T = t^{ij} \,.\, e_i \otimes e_j$$

$$B(T) = b_{ij}\, t^{ij} \in \mathbb{R}$$

B **T**

B
- *tenseur 2 fois covar.*
- *forme bilin. sur* **ExE**
- *forme lin. sur* **E⊗E**

dualité entre *les* **B** (**E*⊗E***) ***et*** *les* **T** (**E⊗E**)

T
- *tenseur 2 fois contrav.*
- *forme bilin. sur* **E*x E***
- *forme lin. sur* **E*⊗E***

E*⊗E* et **E⊗E** sont duaux l'un de l'autre

CONC

des PT et tenseurs d'ordre 3, 4, etc. définis à partir de plusieurs E-V (3, 4, etc.) et d'applications multilinéaires.

$\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} \otimes \mathbf{W} = u^i v^j w^k . \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j \otimes \mathbf{h}_k$

*est un PT (**application trilinéaire**)*

$\mathbf{U} \in \mathbf{E}$	E-V de dim **n**	(base $\mathbf{e}_i$)
$\mathbf{V} \in \mathbf{F}$	E-V de dim **p**	(base $\mathbf{f}_j$)
$\mathbf{W} \in \mathbf{H}$	E-V de dim **q**	(base $\mathbf{h}_k$)

et

$\mathbf{T} = \mathbf{t}^{ijk} . \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j \otimes \mathbf{h}_k$

tenseur d'ordre 3 *à composantes* **3 fois contravariant** *es*

$\Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k$
i, j, k = 1 à n, p, q

les npq… composantes $t^{ijk\ldots}$ des tenseurs d'ordre > 2 ne peuvent pas être rangées en tableau (matrice)

CONC

$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$
A. EINSTEIN
courbure de Ricci
métrique
énergie impulsion