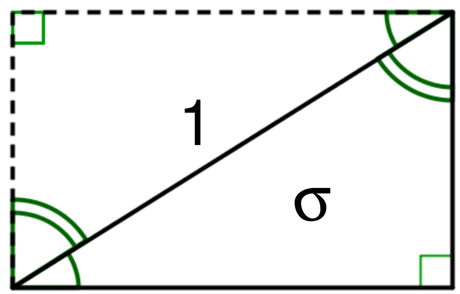
L’art de calculer en notant moins de 100 leçons

Tautologies productives

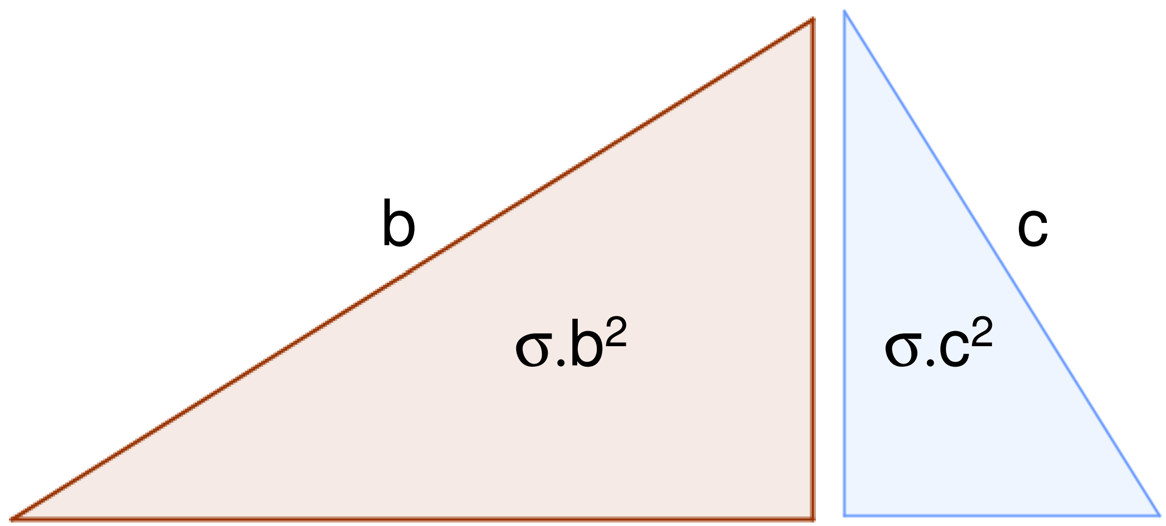
Théorème de Holditch

François Lavallou - KaféMath - 02/07/2020

Pythagore

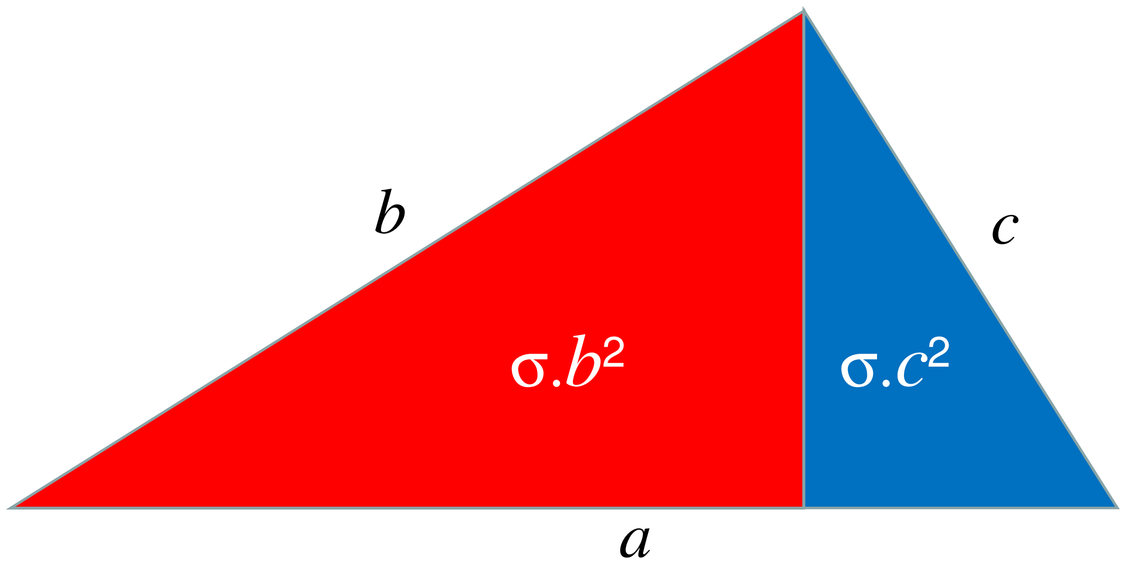


Des figures semblables
ont des surfaces proportionnelles
au carré d’une de leurs dimensions caractéristiques



Le matheux Pythagore est mort

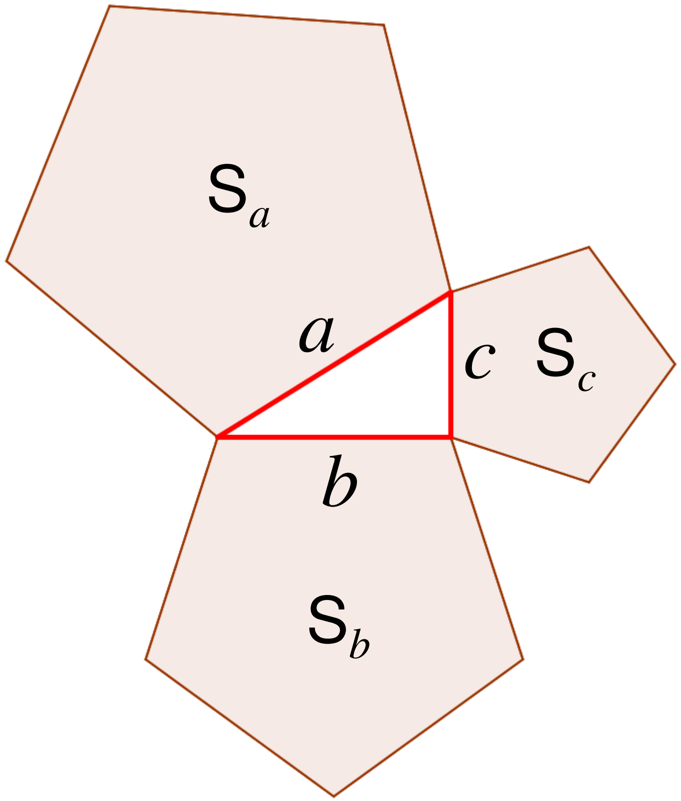
Un triangle rectangle est constitué de deux triangles rectangles semblables => Théorème de Pythagore



$$\sigma.a^2 = \sigma.b^2 + \sigma.c^2$$

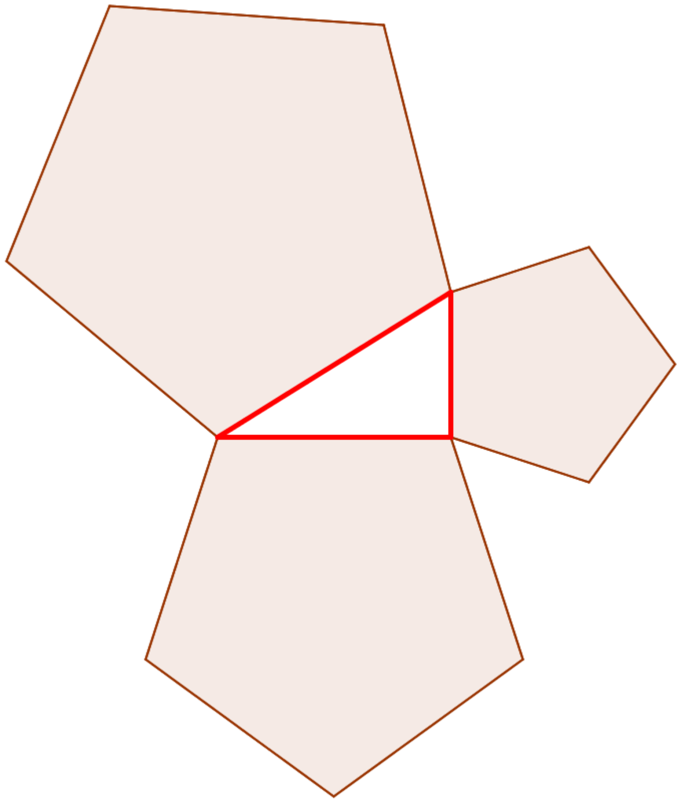
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Pythagore

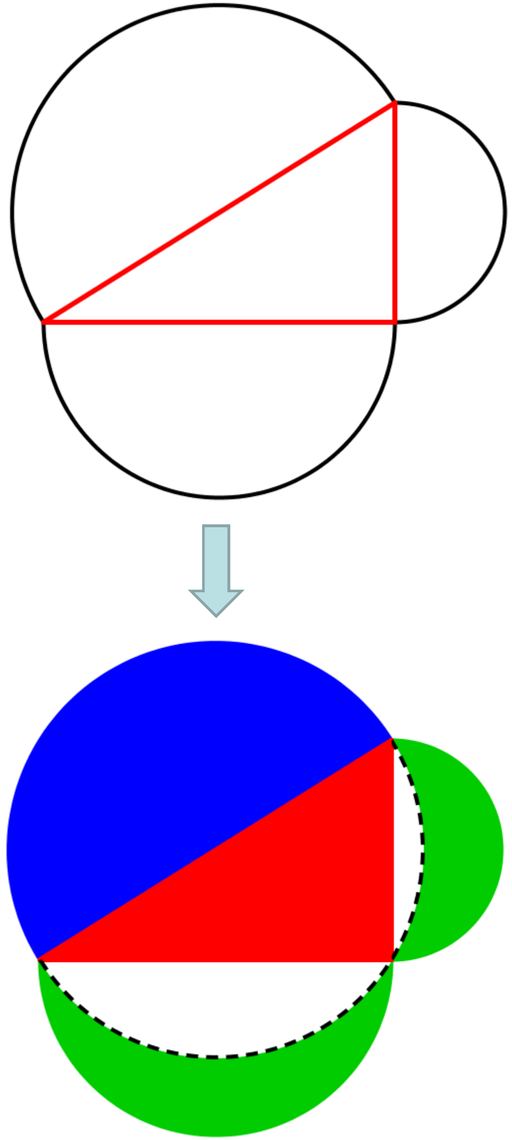


$$S_a = S_b + S_c$$

Pythagore



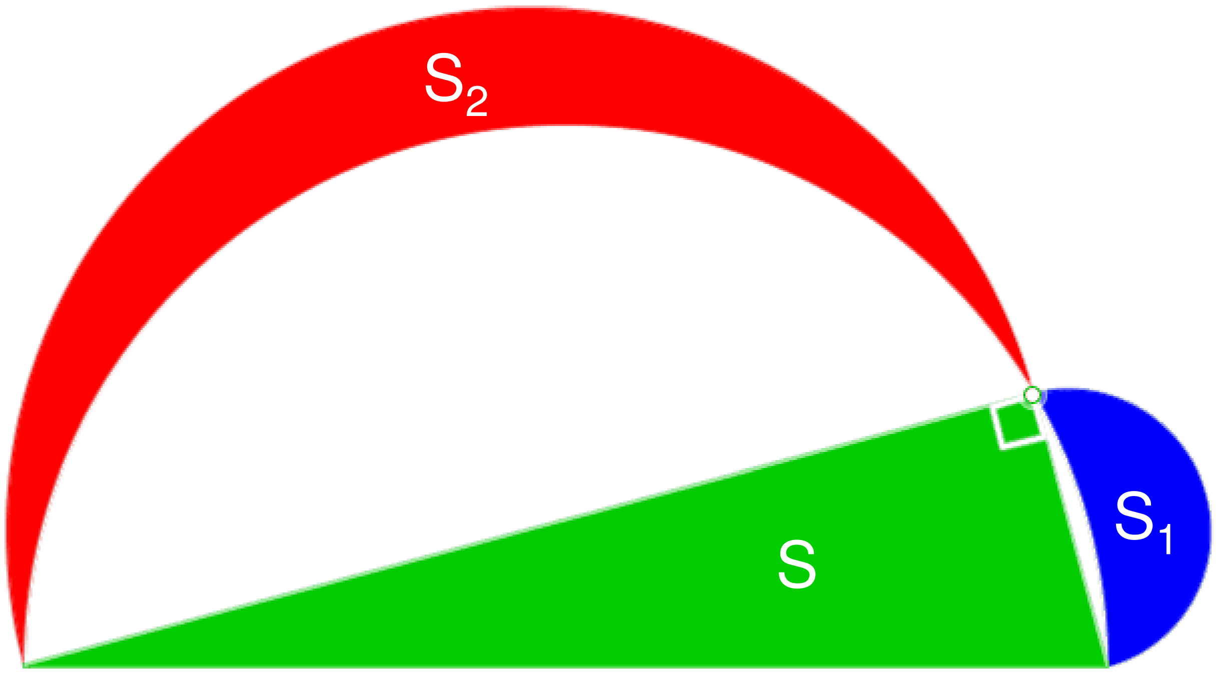
Enquête sur les lunules



Pythagore **Hippocrate de Chios** (milieu Vème s. av. JC)

Enquête sur les lunules

$$S = S_1 + S_2$$

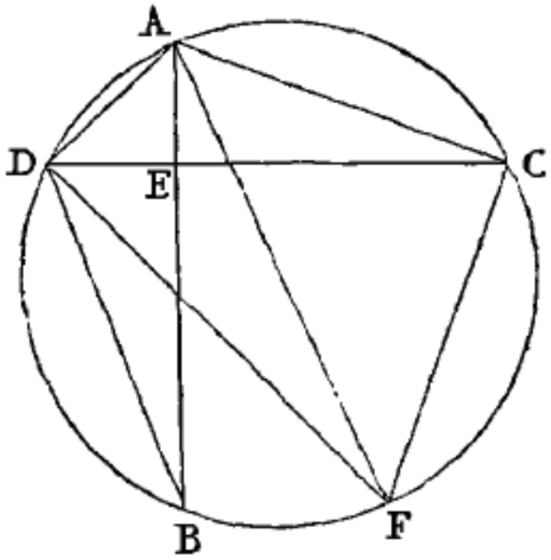


Pythagore

Archimède (-287, -212)

Livre des lemmes *Proposition XI*

Enquête sur les lunules



Si dans un cercle deux cordes AB et CD se coupent à angle droit en un point E différent du centre, la somme des carrés sur AE, BE, EC et ED est équivalente au carré sur le diamètre.

$$\boxed{EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2}$$

Pythagore

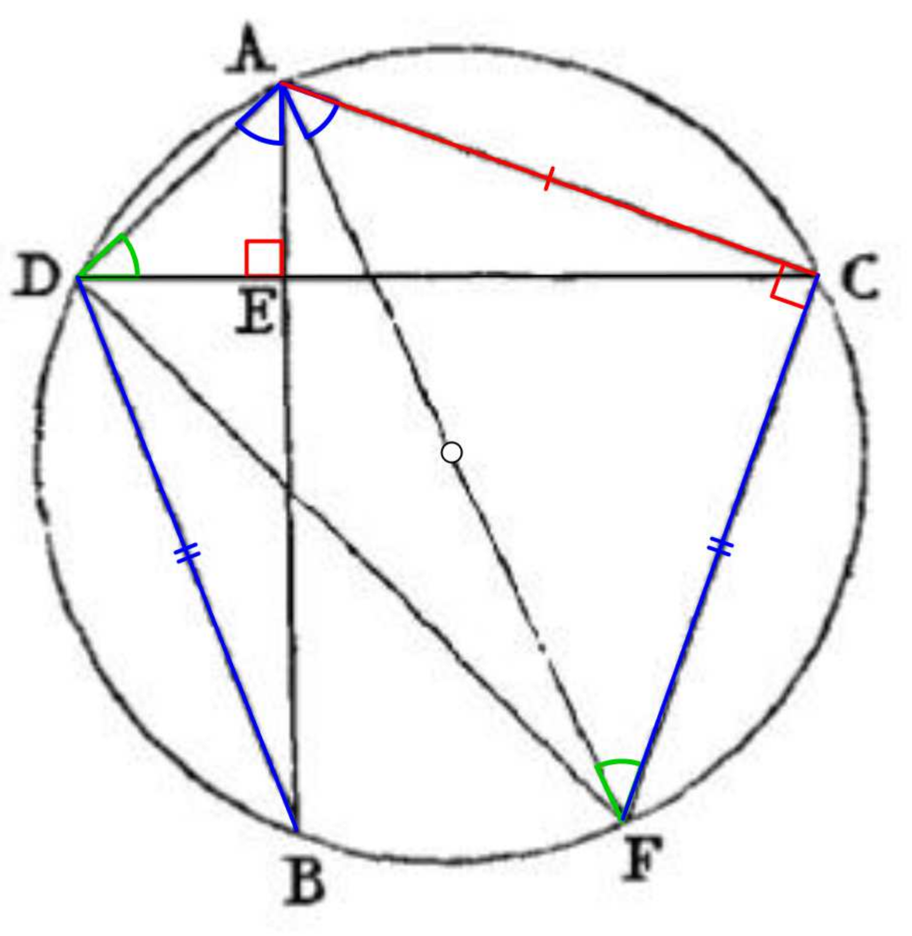
Livre des lemmes: *proposition XI*

Angles inscrits:
(ADC) = (AFC)

ΔADE et ΔAFC rectangles

=> (DAB) = (FAC)

=> CF = DB



Pythagore

Livre des lemmes: *proposition XI*

Enquête sur les lunules

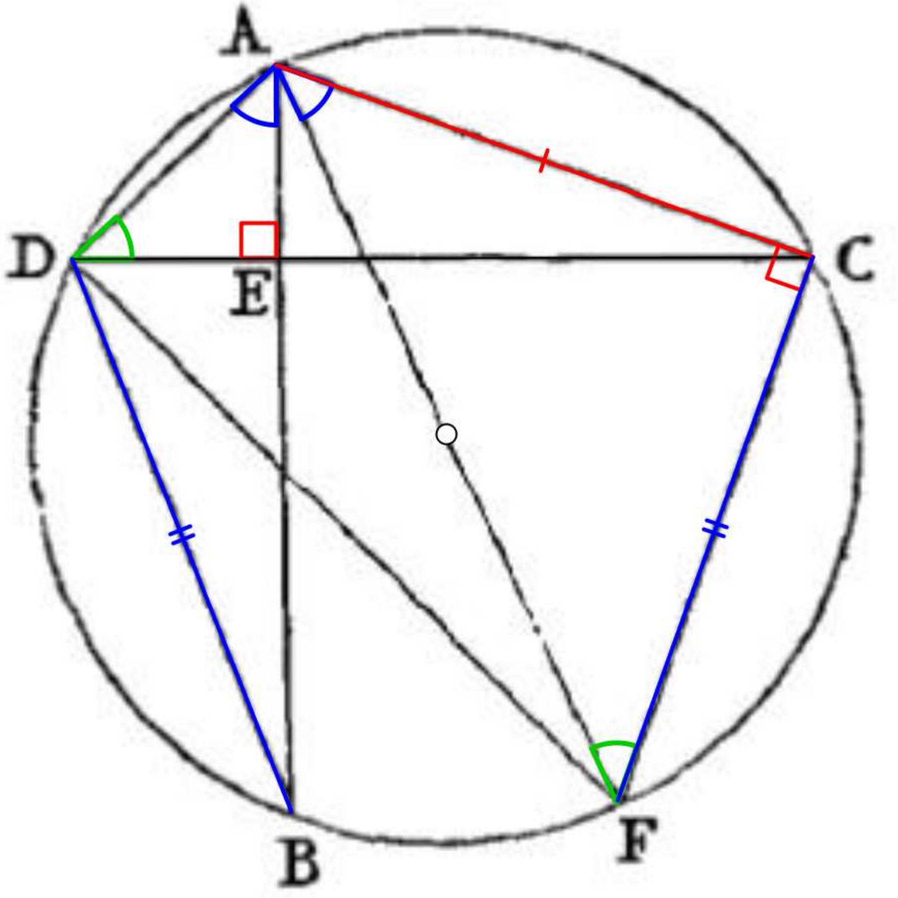
$$CF = DB$$

$$CF^2 = DB^2 = ED^2 + EB^2$$

$$AC^2 = EA^2 + EC^2$$

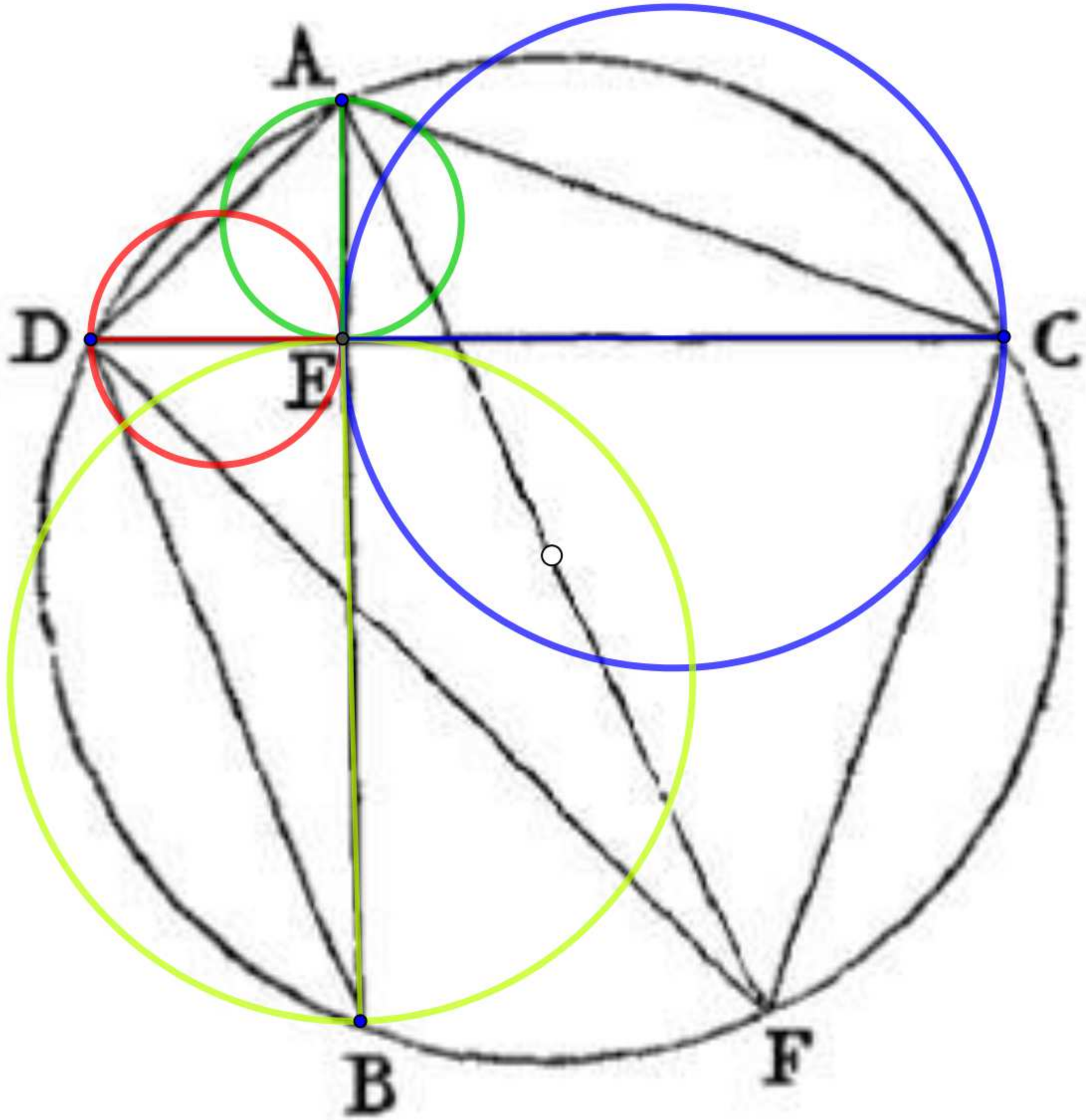
$$AF^2 = 4R^2 = AC^2 + CF^2$$

$$\boxed{EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2}$$



Pythagore

Enquête sur les lunules



$$\frac{\pi}{4}\cdot\left[EA^2+EB^2+EC^2+ED^2\right]=\pi R^2$$

F. Sammarcelli = FS

Pythagore

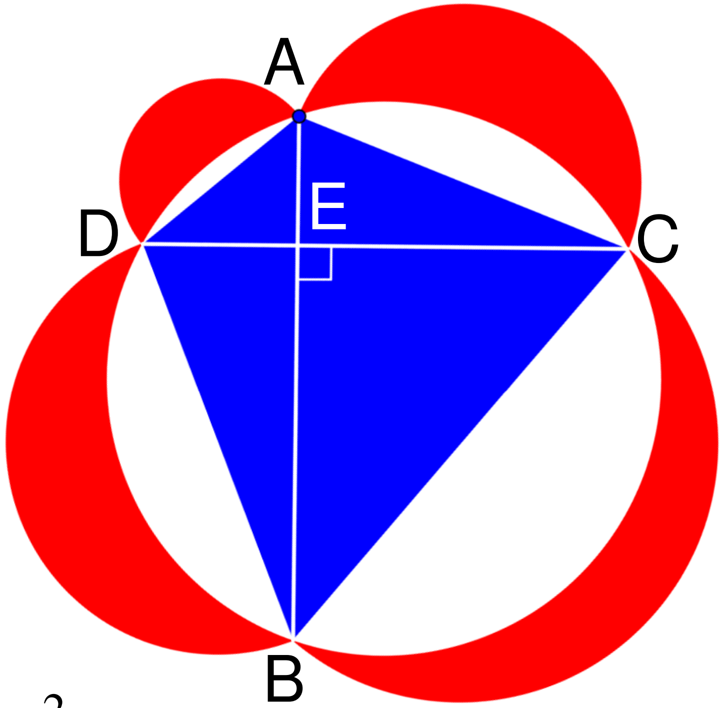
Livre des lemmes: proposition XI

Généralisation Hippocrate de Chios

Enquête sur les lunules

$$2EA^2 + 2EB^2 + 2EC^2 + 2ED^2 = 8R^2$$

$$(EA^2 + ED^2) + (ED^2 + EB^2) + (EB^2 + EC^2) + (EC^2 + ED^2) = 8R^2$$



$$AD^2 + DB^2 + BC^2 + CA^2 = 8R^2$$

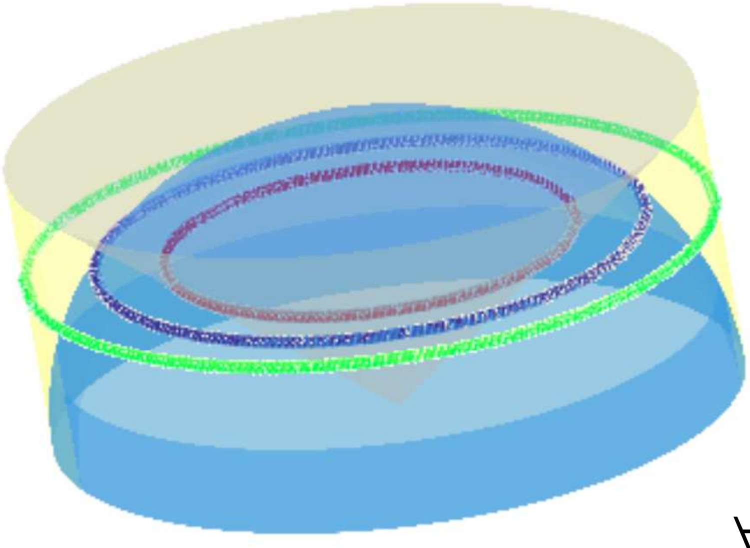
La surface des lunules est égale à celle du quadrilatère ADBC:

$$\frac{\pi}{8} \cdot \left[AD^2 + DB^2 + BC^2 + CA^2 \right] = \pi R^2$$

FS

Pythagore

Archimède (-287, -212)



3 surfaces de révolution:

- Sphère
- Cylindre
- Cône

Volumes

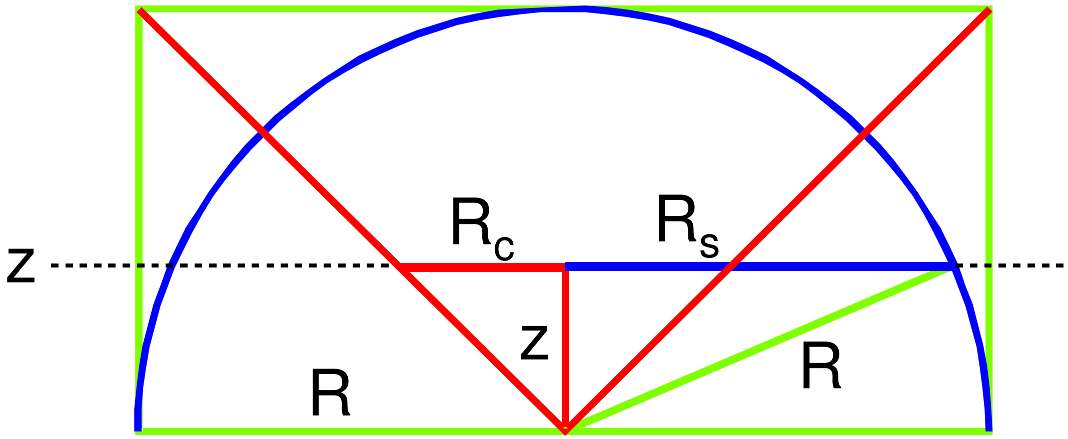
$$\forall z \qquad z = R_c$$

$$V_{cyl} = V_s + V_{cône} \Leftarrow R^2 = R_s^2 + z^2 = R_s^2 + R_c^2$$

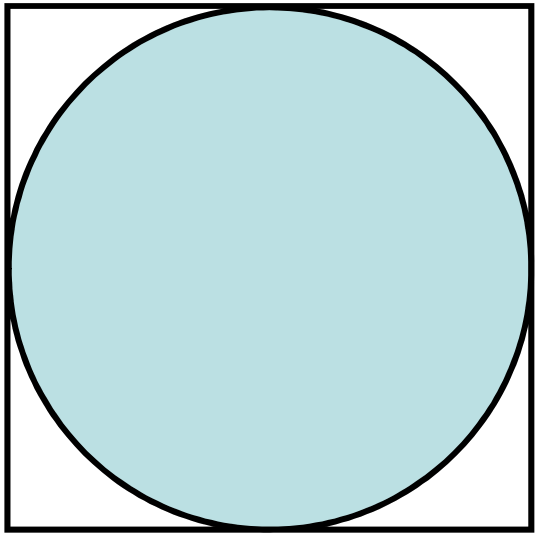
$$V_{cyl} = \pi R^3 = 3V_{cône}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{sphère} = 2V_s = \frac{4}{3}\pi R^3$$



Archimède — De la sphère et du cylindre



Volume :

$$V_{cyl} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot V_{sphère}$$

$$\pi R^2 \cdot 2R = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

Surface :

$$S_{cyl} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot S_{sphère}$$

$$\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot \left(4\pi R^2 \right)$$

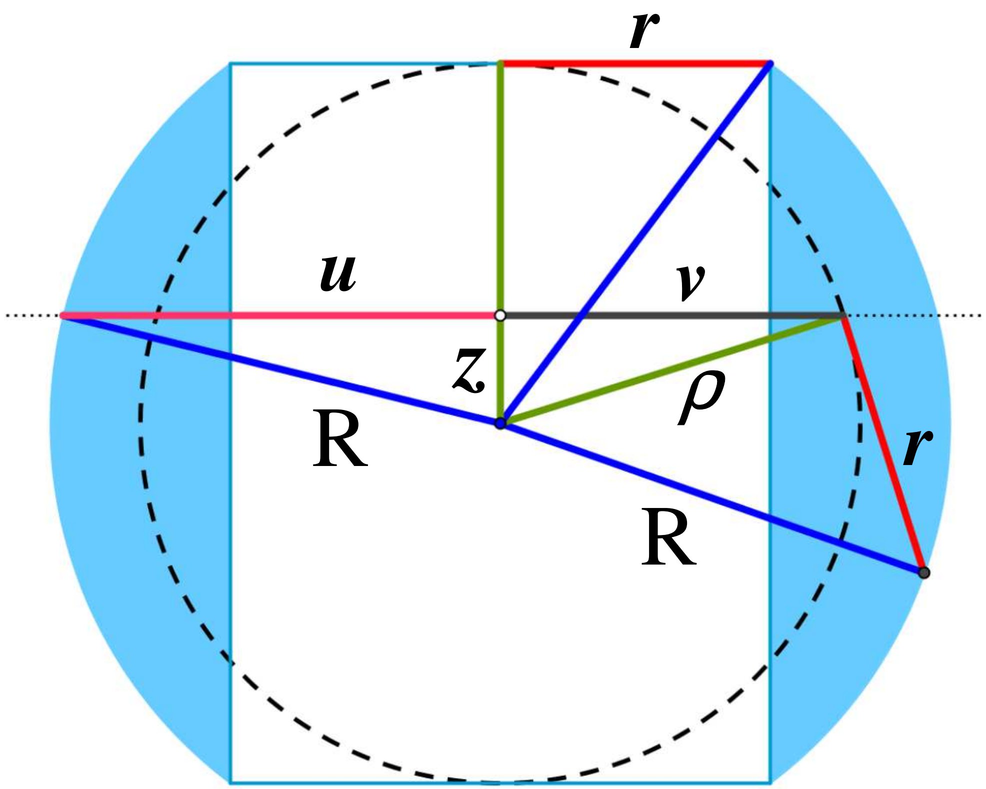
«*Il est clair que tout cylindre, ayant comme base le grand cercle de la sphère, vaut une fois et demie cette sphère*»

Pythagore

Rond de serviette

Volumes

Pythagore



$$R^2 = u^2 + z^2 = r^2 + \rho^2 = r^2 + v^2 + z^2$$

$$u^2 = r^2 + v^2$$

$$\pi u^2 - \pi r^2 = \pi v^2$$

$$\mathbf{V}_{rond} = \mathbf{V}_S - \mathbf{V}_{cyl} = \mathbf{V}_s$$

Volumes

Additivité

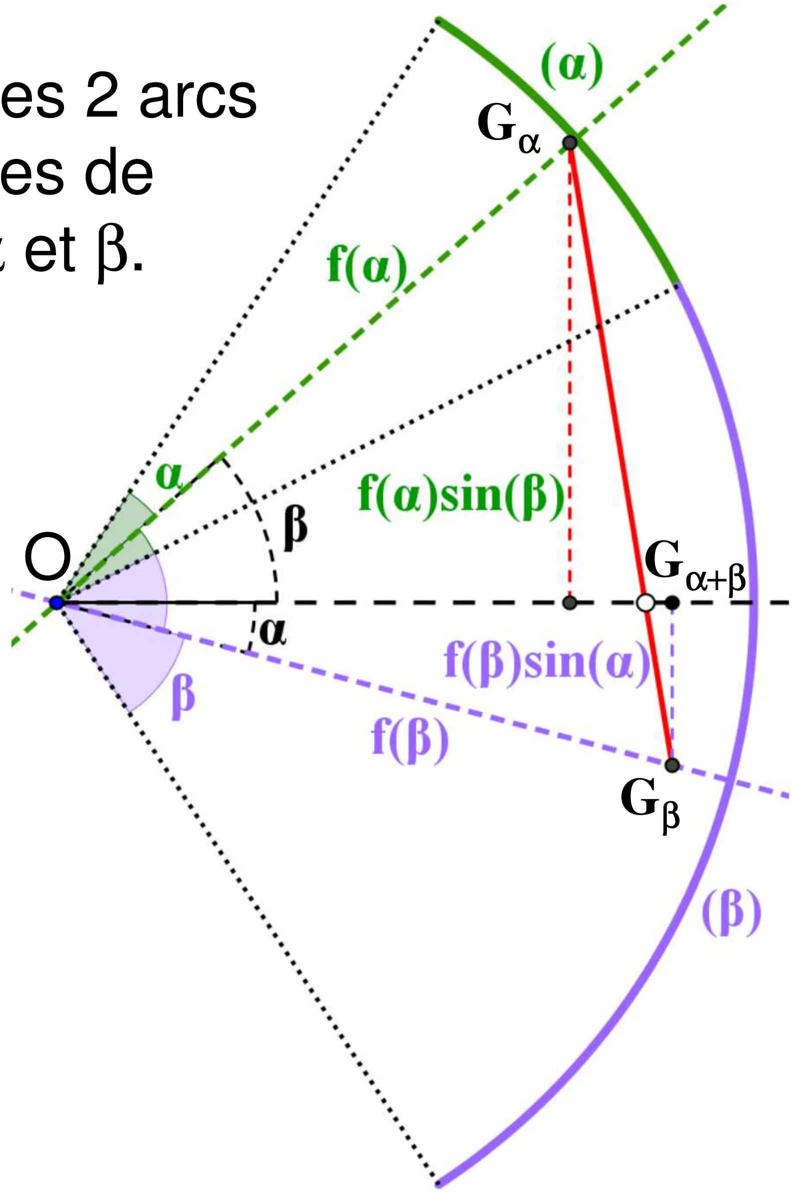
Centre de gravité d'un arc de cercle

Le centre de gravité de l'ensemble des 2 arcs de cercle est le barycentre des centres de gravité G_α et G_β affectés des poids α et β.

$$\alpha \cdot f(\alpha)\sin(\beta) = \beta \cdot f(\beta)\sin(\alpha)$$

$$\frac{\alpha \cdot f(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\beta \cdot f(\beta)}{\sin(\beta)} = f(0) = \mathrm{R}$$

$$\boxed{f(\alpha) = \mathrm{R} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}}$$



GULDIN, l'après PAPPUS

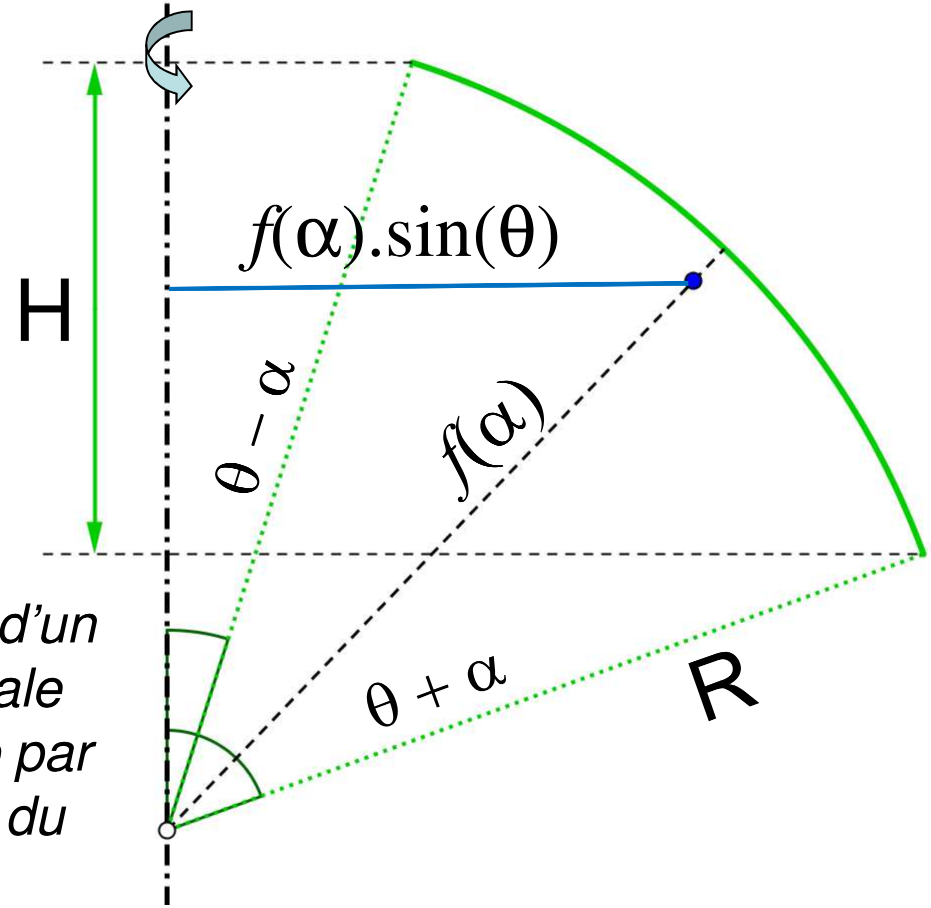
(1577-1643) (IV[ème] ap. JC)

$$S(\alpha) = 2\pi \cdot f(\alpha)\sin(\theta) \cdot 2R\alpha$$

$$S(\alpha) = 4\pi R^2 \sin(\theta)\sin(\alpha)$$
$$= 2\pi R\left[R\cos(\theta-\alpha) - R\cos(\theta+\alpha)\right]$$

Additivité

$$\boxed{S(\alpha) = 2\pi R \cdot H}$$



Théorème de GULDIN(-PAPPUS):
La surface engendrée par la rotation d'un arc de courbe autour d'un axe est égale au produit de la circonférence décrite par son centre de gravité par la longueur du segment.

Totos logis

Toto logis

Antonio Griffo Focas Flavio Angelo Ducas Comneno Porfirogenito Gagliardi De Curtis di Bisanzio *

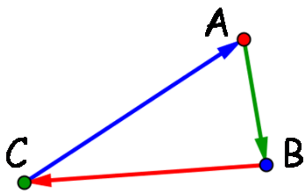
Maison natale de Toto, Naples

* Antonio de Curtis (1898-1967), dit **Toto**, acteur italien.

$$0+0=0$$ → Théorème de Holditch

Tautologies

$$(c-b)+(a-c)+(b-a)=0$$



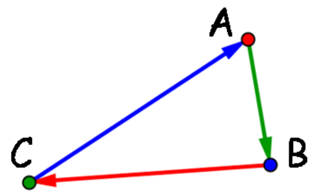
Chasles $\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BB}}=\vec{0}$

Tautologie: proposition toujours vraie, donc apparemment stérile.

Et pourtant….

Tautologies

$$P_0(a,b,c) = (c-b) + (a-c) + (b-a) = 0$$



Chasles $\qquad \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BB}} = \vec{0}$

Généralisation (FS): $\mathrm{P}_n(a,b,c) = a^n \cdot (c-b) + b^n \cdot (a-c) + c^n \cdot (b-a)$

Propriétés: $\mathrm{P}_n(b,a,c) = -\mathrm{P}_n(a,b,c) \Longrightarrow \mathrm{P}_n(a,a,c) = -\mathrm{P}_n(a,a,c) = 0$

$\Longrightarrow \mathrm{P}_n(a,b,c) = (a-b)(b-c)(c-a)\mathrm{R}_n(a,b,c)$

$\Longrightarrow \mathrm{R}_n(a,b,c)$ Polynôme de degré n - 2 invariant par transposition

$\Longrightarrow \mathrm{R}_n(a,b,c) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Polynômes symétriques des racines: $\sigma_1 = a+b+c \qquad \sigma_2 = ab+bc+ca \qquad \sigma_3 = abc$

Tautologies $$\mathrm{P}_n(a,b,c) = a^n \cdot (c-b) + b^n \cdot (a-c) + c^n \cdot (b-a)$$

$$\mathrm{P}_n(a,b,c) = (a-b)(b-c)(c-a)\mathrm{R}_n(a,b,c)$$

$$d^\circ \mathrm{R}_n = d^\circ \mathrm{P}_n - 3 = n-2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{R}_0 \equiv 0 \equiv \mathrm{R}_1$$

$$\mathrm{R}_2 = -1 \qquad \mathrm{R}_3 = -\sigma_1 \qquad \mathrm{R}_4 = -\sigma_1^2 + \sigma_2 \qquad \mathrm{R}_5 = -\sigma_1^3 + 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$$

Applications: $$x \cdot \mathrm{P}_0(a,b,c) - \mathrm{P}_1(a,b,c) = 0 \qquad (x.0 - 0 = 0)$$

$$(x-a)\cdot(c-b) + (x-b)\cdot(a-c) + (x-c)\cdot(b-a) = 0$$

$$(a,b,c,x) \Longleftrightarrow \left(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{H}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{HB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{HC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

1ère relation de Stewart (1746)

Tautologies $\mathrm{P}_n(a,b,c) = a^n \cdot (c-b) + b^n \cdot (a-c) + c^n \cdot (b-a)$

$$\mathrm{P}_n(a,b,c) = (a-b)(b-c)(c-a)\mathrm{R}_n(a,b,c)$$

$$d^\circ \mathrm{R}_n = d^\circ \mathrm{P}_n - 3 = n-2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{R}_0 \equiv 0 \equiv \mathrm{R}_1$$

$$\mathrm{R}_2 = -1 \qquad \mathrm{R}_3 = -\sigma_1 \qquad \mathrm{R}_4 = -\sigma_1^2 + \sigma_2 \qquad \mathrm{R}_5 = -\sigma_1^3 + 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$$

Applications: $x \cdot \mathrm{P}_0(a,b,c) - \mathrm{P}_1(a,b,c) = 0$ $\quad (x.0 - 0 = 0)$

$$(x-a)\cdot(c-b) + (x-b)\cdot(a-c) + (x-c)\cdot(b-a) = 0$$

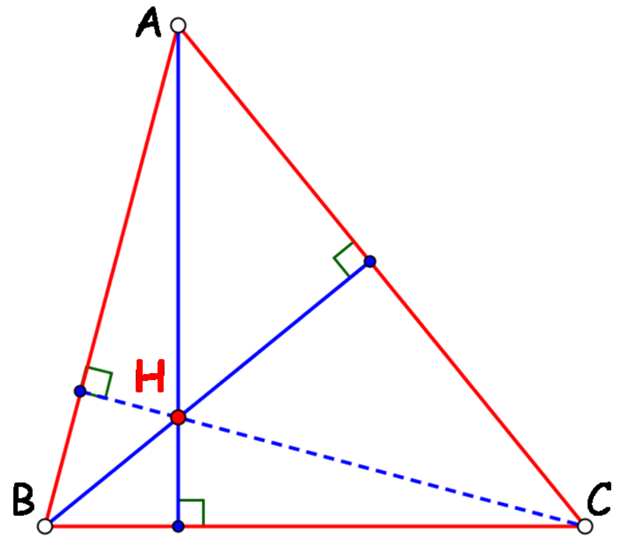
$$(a,b,c,x) \Longleftrightarrow \left(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{H}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

1ère relation de Stewart (1746)

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

=> hauteurs concourantes



Tautologies **2^{nde} relation de Stewart** (1717-1785)

Applications: $R_2 = -1$ $P_2(a,b,c) = -(c-b)\cdot(a-c)\cdot(b-a)$

$$x^2 \cdot P_0(a,b,c) - 2x \cdot P_1(a,b,c) + P_2(a,b,c) \qquad (x^2 \cdot 0 - 2x \cdot 0 + P_2)$$

$$(x-a)^2 \cdot (c-b) + (x-b)^2 \cdot (a-c) + (x-c)^2 \cdot (b-a) = -(c-b)\cdot(a-c)\cdot(b-a)$$

$$(a,b,c,x) \Longleftrightarrow \left(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{O}\right)$$

$$\mathrm{OA}^2 \cdot \overline{\mathrm{BC}} + \mathrm{OB}^2 \cdot \overline{\mathrm{CA}} + \mathrm{OC}^2 \cdot \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{BC}} \cdot \overline{\mathrm{CA}} = 0$$

Relation utilisée par Estève (1922) pour son «théorème d'Holditch»

$$\boxed{\alpha \cdot \overline{\mathrm{BC}} \cdot S_{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{CA}} \cdot S_{\mathrm{B}} + \overline{\mathrm{AB}} \cdot S_{\mathrm{C}} + k\pi \overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{BC}} \cdot \overline{\mathrm{CA}} = 0}$$

α = nombre de tours, k = « sens » des tours

Holditch

Théorème de Holditch (1800 - 1867)

THE

QUARTERLY JOURNAL

OF

PURE AND APPLIED

MATHEMATICS.

EDITED BY

J. J. SYLVESTER, M.A., F.R.S.,

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE ROYAL MILITARY ACADEMY, WOOLWICH; AND

N. M. FERRERS, M.A.,

FELLOW OF GONVILLE AND CAIUS COLLEGE, CAMBRIDGE:

ASSISTED BY

G. G. STOKES, M.A., F.R.S.,

LUCASIAN PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE;

A. CAYLEY, M.A., F.R.S.,

LATE FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE; AND

M. HERMITE,

CORRESPONDING EDITOR IN PARIS.

VOL. II.

ὅ τι οὐσία πρὸς γένεσιν, ἐπιστήμη πρὸς πίστιν καὶ διάνοια πρὸς εἰκασίαν ἐστι.

LONDON:

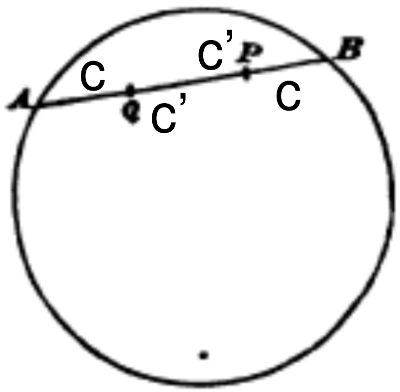
JOHN W. PARKER AND SON, WEST STRAND.

1858.

GEOMETRICAL THEOREM.

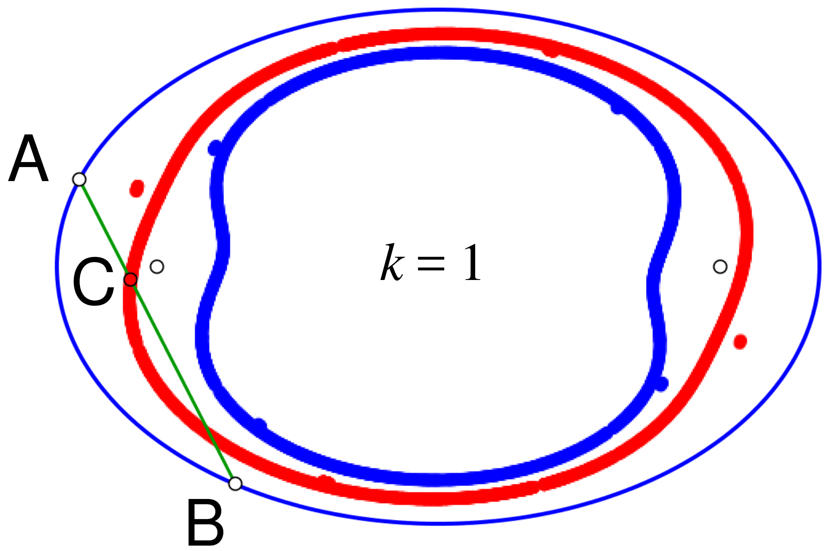
By Rev. HAMNET HOLDITCH.

If a chord of a closed curve, of constant length $c+c'$, be divided into two parts of lengths c, c' respectively, the difference between the areas of the closed curve, and of the locus of the dividing point, will be $\pi cc'$.



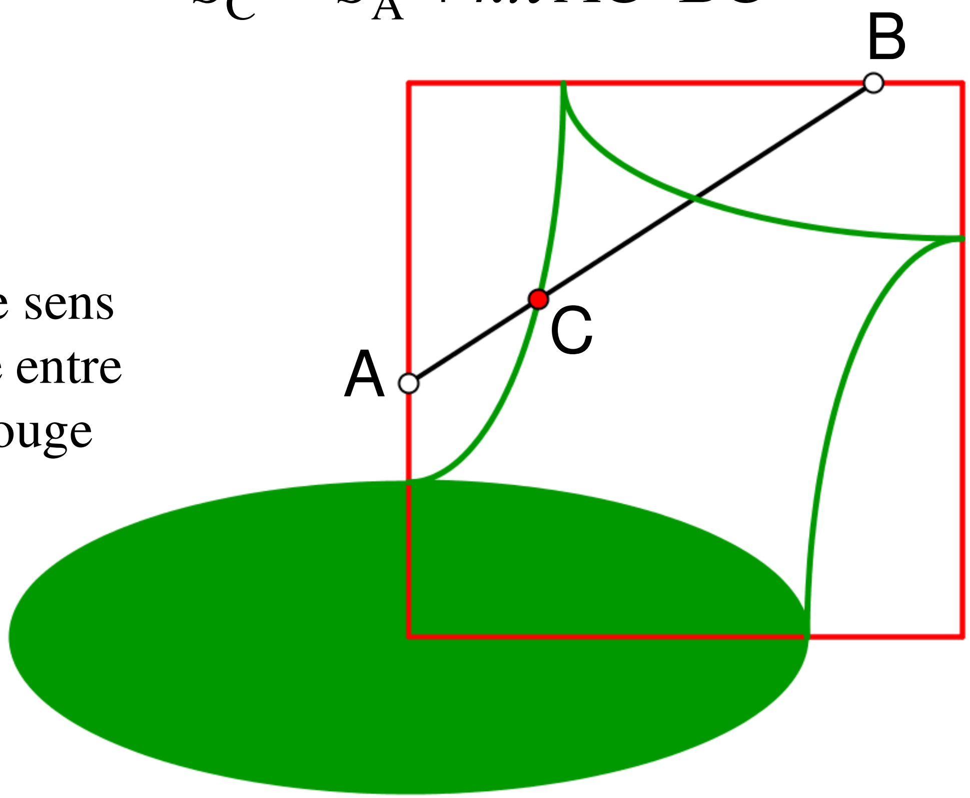
$$S_Q = S_P = S_A - \pi.c.c'$$

Holditch **Théorème de Holditch**



Lorsque la corde AB se « promène » sur une courbe fermée (ici une ellipse) de surface S_A, un point C de la corde AB décrit une courbe fermée de surface S_C:

$$S_C = S_A + k\pi \overline{AC} \cdot \overline{BC}$$



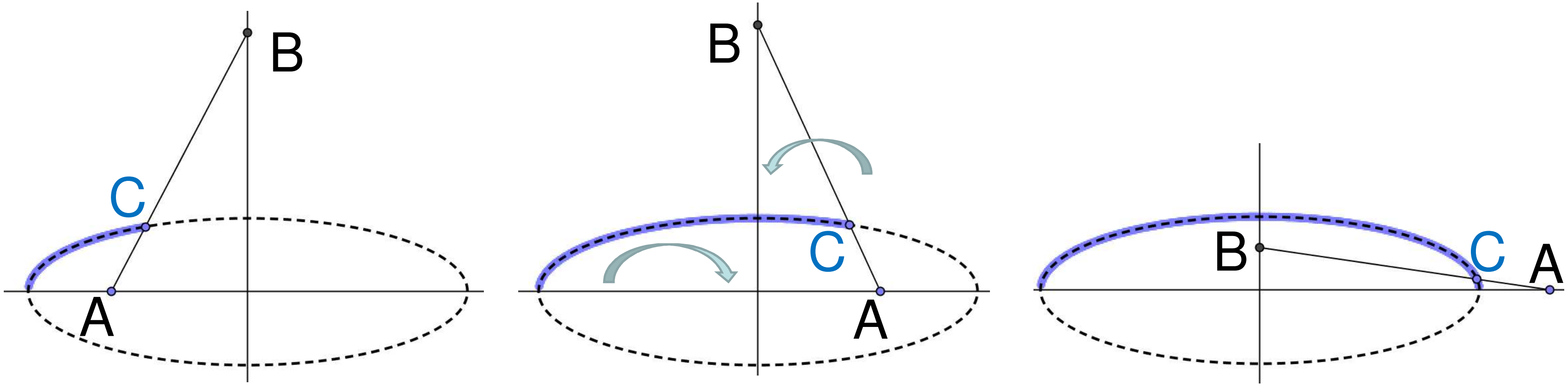
Ici, k=1 (A et C circulent dans le même sens (sinon k=-1)) et donc l'écart de surface entre l'ellipse parcourue par A et la courbe rouge décrite par C est égale à la surface de l'ellipse de demi-axes AC et CB, donc:

π.AC.CB

Estève

Généralisation d'Estève

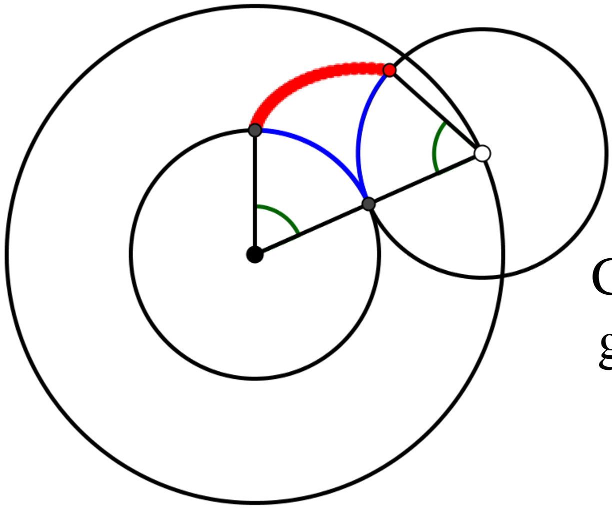
$$\alpha \cdot \overline{\mathrm{BC}} \cdot \underbrace{S_{\mathrm{A}}}_{0} + \overline{\mathrm{CA}} \cdot \underbrace{S_{\mathrm{B}}}_{0} + \overline{\mathrm{AB}} \cdot S_{\mathrm{C}} + \underbrace{k}_{-1} \pi \overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{BC}} \cdot \overline{\mathrm{CA}} = 0$$



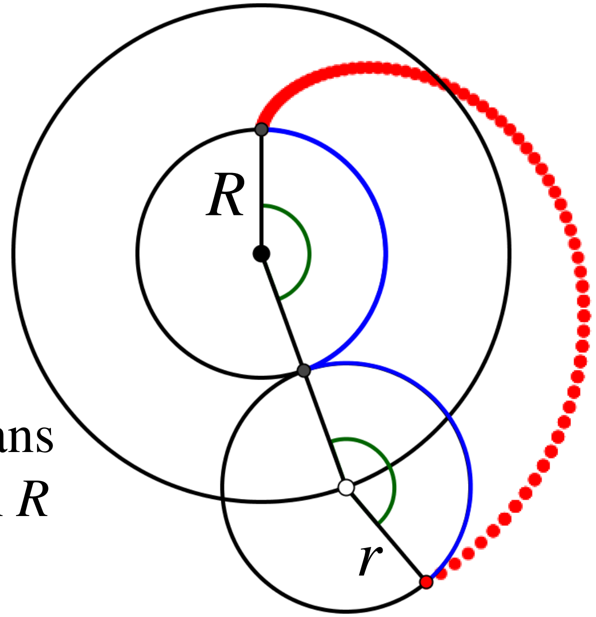
A et B ayant des trajectoires rectilignes, $S_{\mathrm{A}} = S_{\mathrm{B}} = 0$
La corde AB tourne dans le sens contraire de C => k = -1

$$\Rightarrow \quad S_{\mathrm{C}} = \pi \overline{\mathrm{BC}} \cdot \overline{\mathrm{CA}}$$

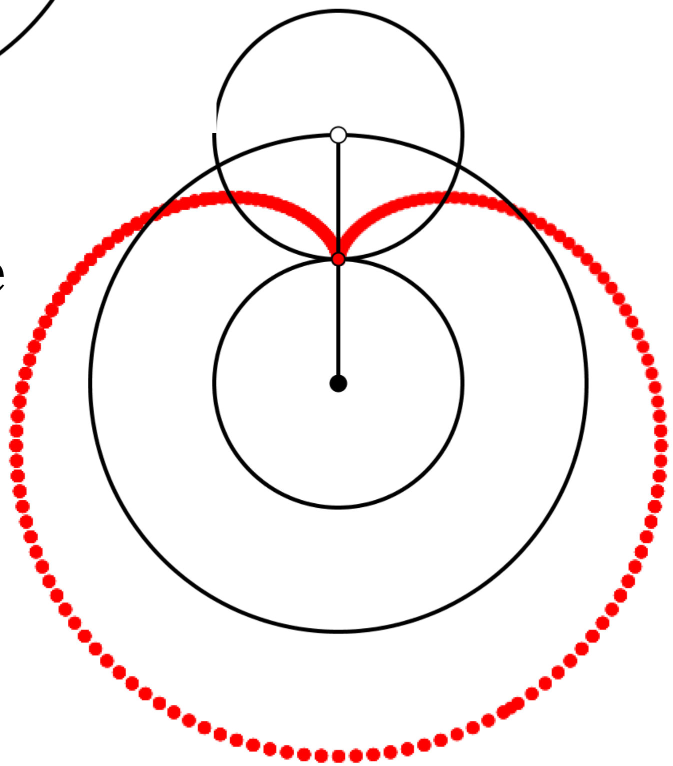
Cardioïde = Epicycloïde

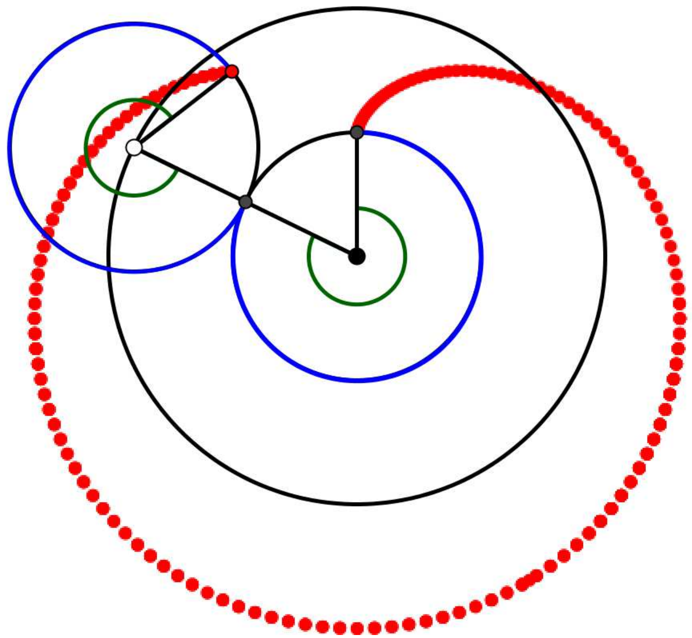


Epicycloïde:
Cercle de rayon r qui roule sans glisser sur un cercle de rayon R

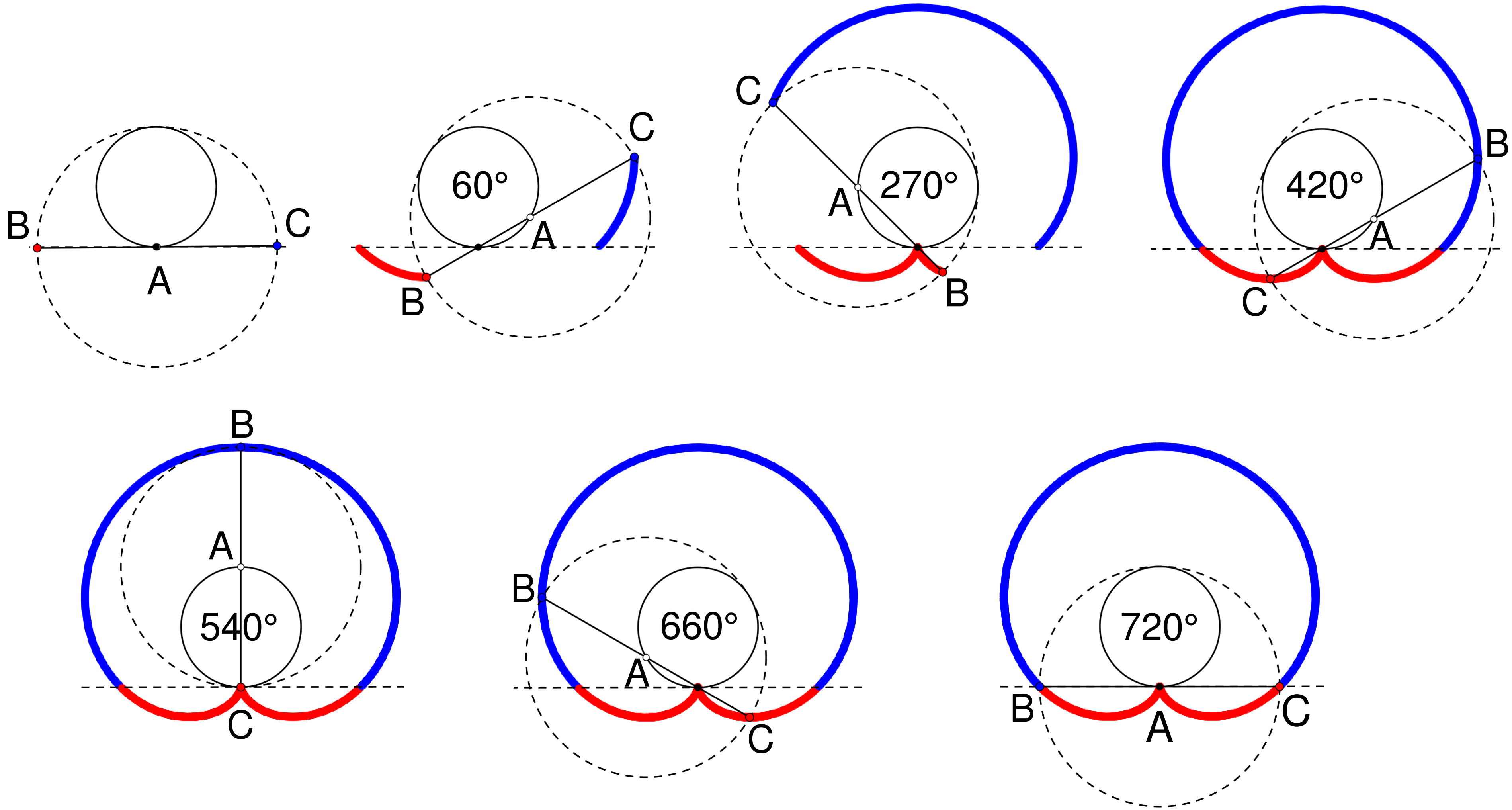


Ici $r = R$
=> **Cardioïde**





Cardioïde = Conchoïde



Le point A effectue deux tours quand B et C n'en font qu'un ⇨ $\alpha = 2$.

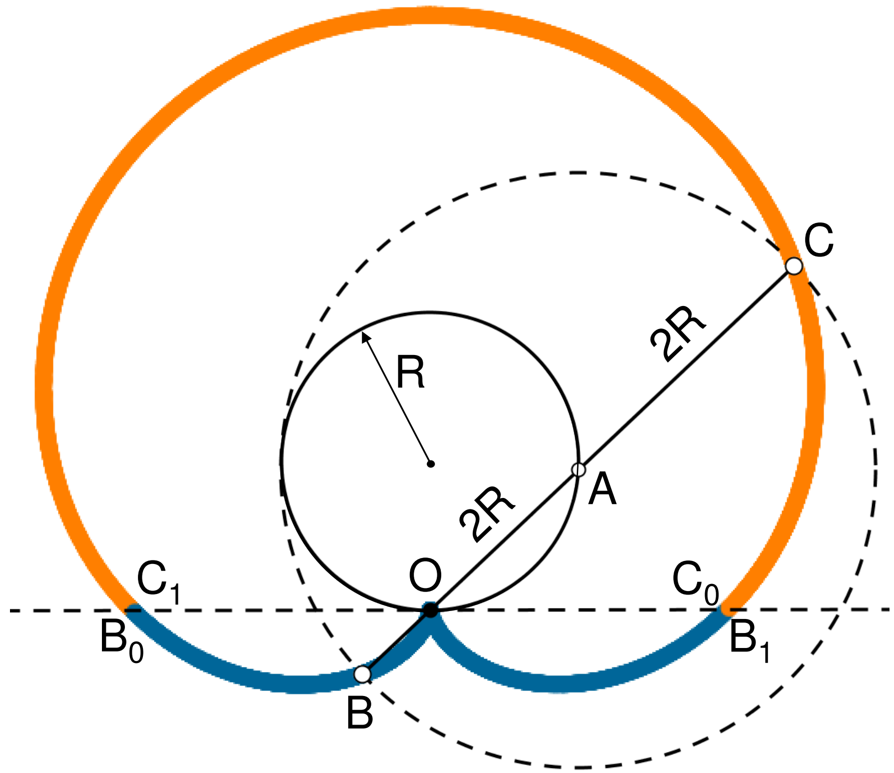
Cardioïde = Conchoïde

Estève $$\alpha \cdot \overline{BC} \cdot S_A + \overline{CA} \cdot S_B + \overline{AB} \cdot S_C + k\pi \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0$$

$k = 1 \qquad \alpha = 2 \qquad S_B = S_C = S \qquad S_A = \pi R^2$

Surface de la cardioïde

$$\boxed{S = 6\pi R^2}$$

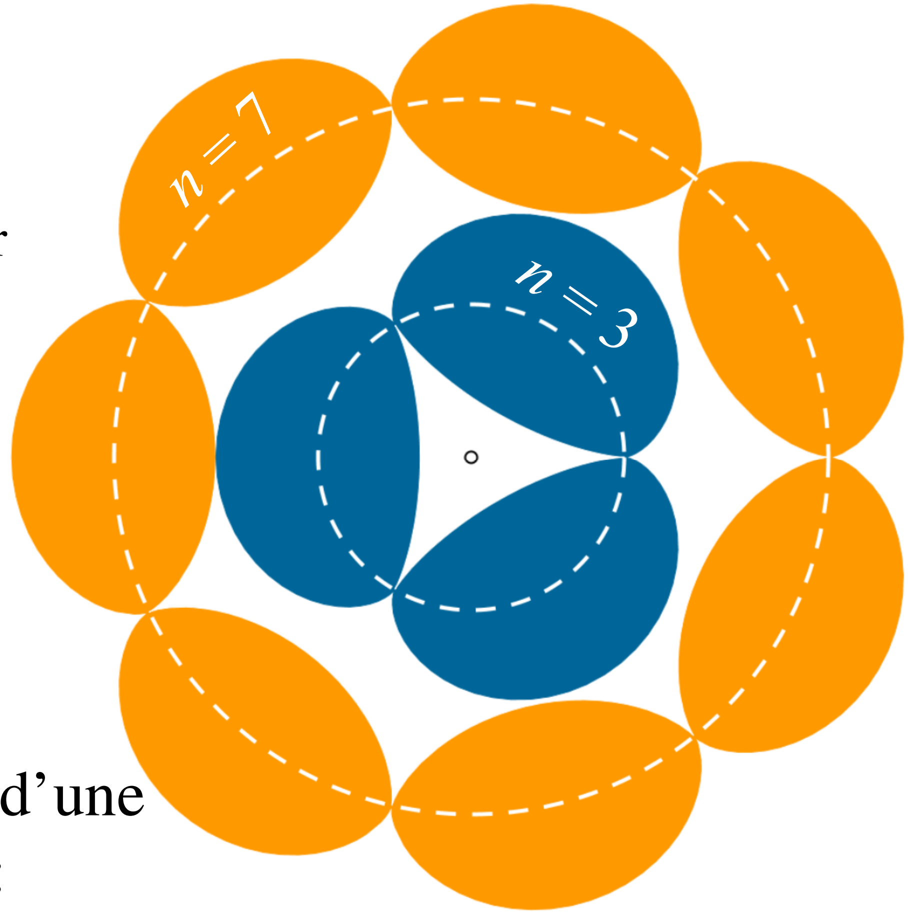


Epicycloïdes, Hypocycloïdes

Un point de la circonférence d'un cercle de rayon R (roulette) qui roule sans glisser sur un cercle de rayon nR décrit une:

- Épicycloïde (roulette extérieure)
- Hypocycloïde (roulette intérieure)

n arches d'épi-hypo-cycloïdes constituent n « saucisses ».

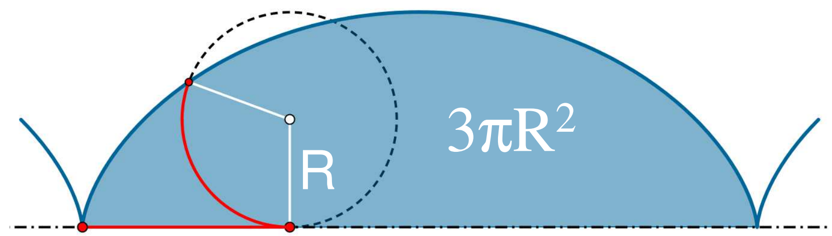


Par un calcul similaire à celui de la cardioïde, on trouve que la surface d'une « saucisse » est indépendante de n :

$$S_{e+h} = 6\pi \mathrm{R}^2$$

$n = 1$: Cardioïde

$n = \infty$: Cycloïde

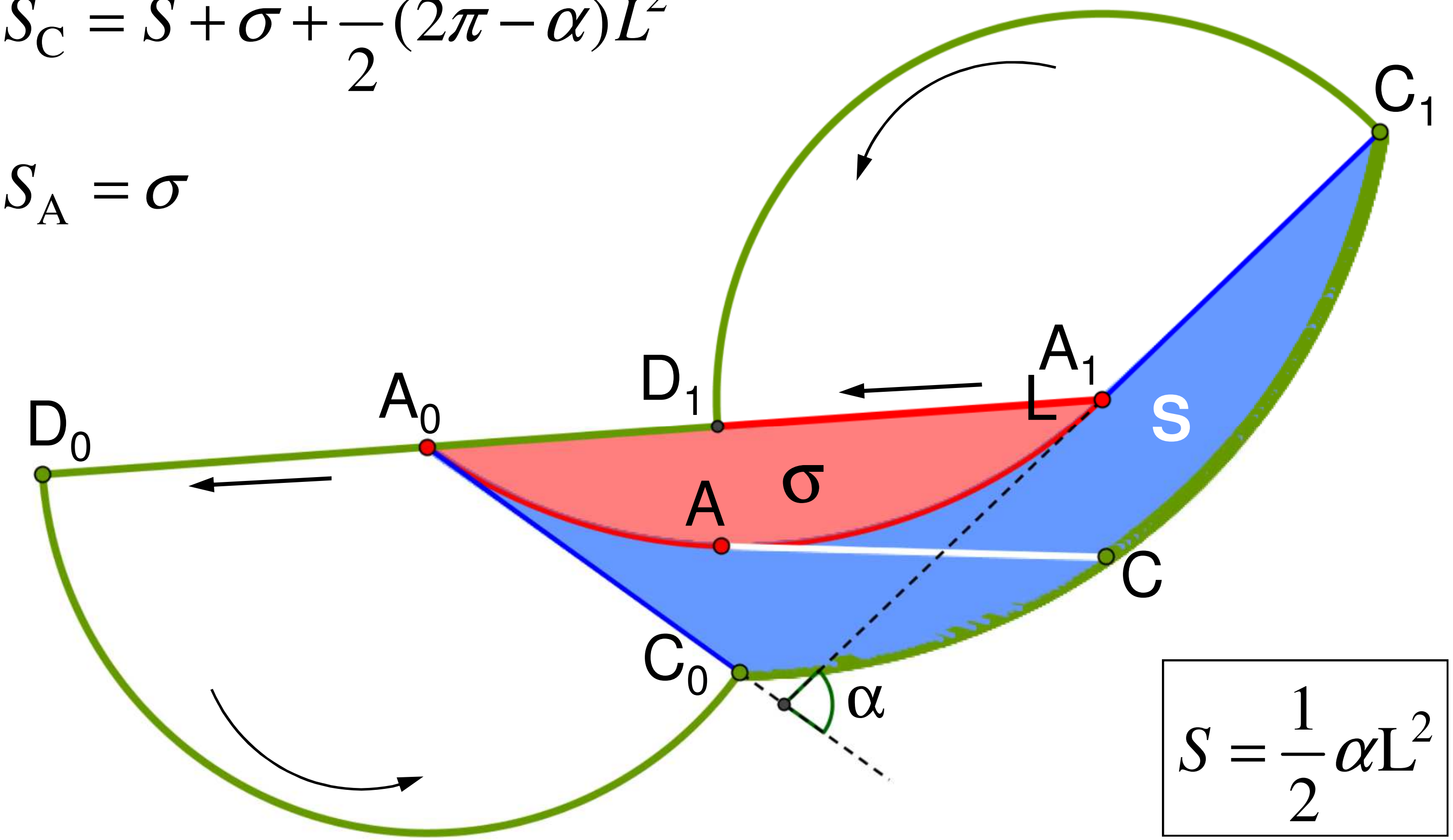


Principe d'Estève $S_C = S_A + k\pi \overline{AC}\cdot\overline{BC}$

$\mathrm{A} = \mathrm{B},\ k = 1 \Longrightarrow$ *corde* AC *tangente* $\Longrightarrow S_C = S_A + \pi \mathrm{AC}^2 = S_A + \pi \mathrm{L}^2$

$$S_C = S + \sigma + \frac{1}{2}(2\pi - \alpha)L^2$$

$$S_A = \sigma$$



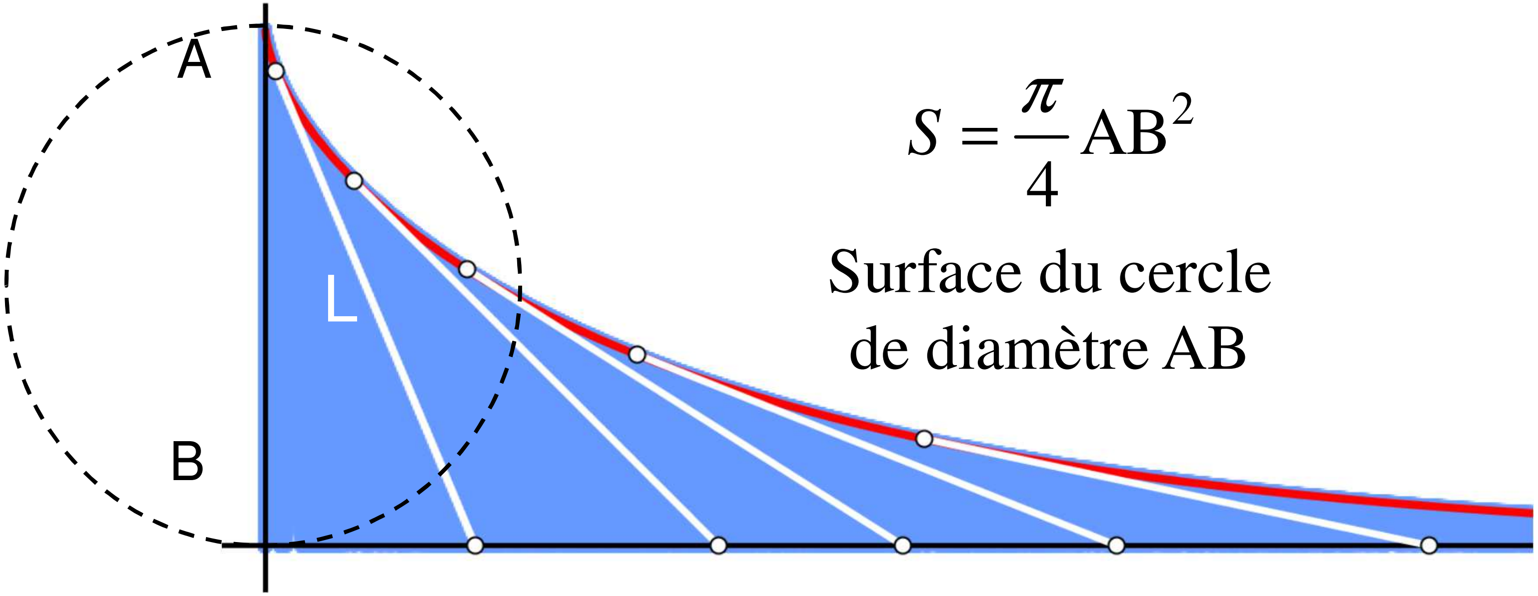
$$S = \frac{1}{2}\alpha \mathrm{L}^2$$

Tractrice (cas particulier de courbe du chien)

Problème posé par l'architecte Claude Perrault, frère du conteur Charles, à Leibniz:
Courbe décrite par une montre à gousset quand le bout de la chaîne décrit une droite?

La chaîne a pour longueur L et est tangente à la trajectoire.
Comme vu précédemment, pour une rotation d'angle α, la surface

balayée est : $S = \frac{1}{2}\alpha L^2$ Ici : $\alpha = \frac{\pi}{2}$



$$S = \frac{\pi}{4} AB^2$$

Surface du cercle
de diamètre AB

Théorème de Holditch

De 1858,

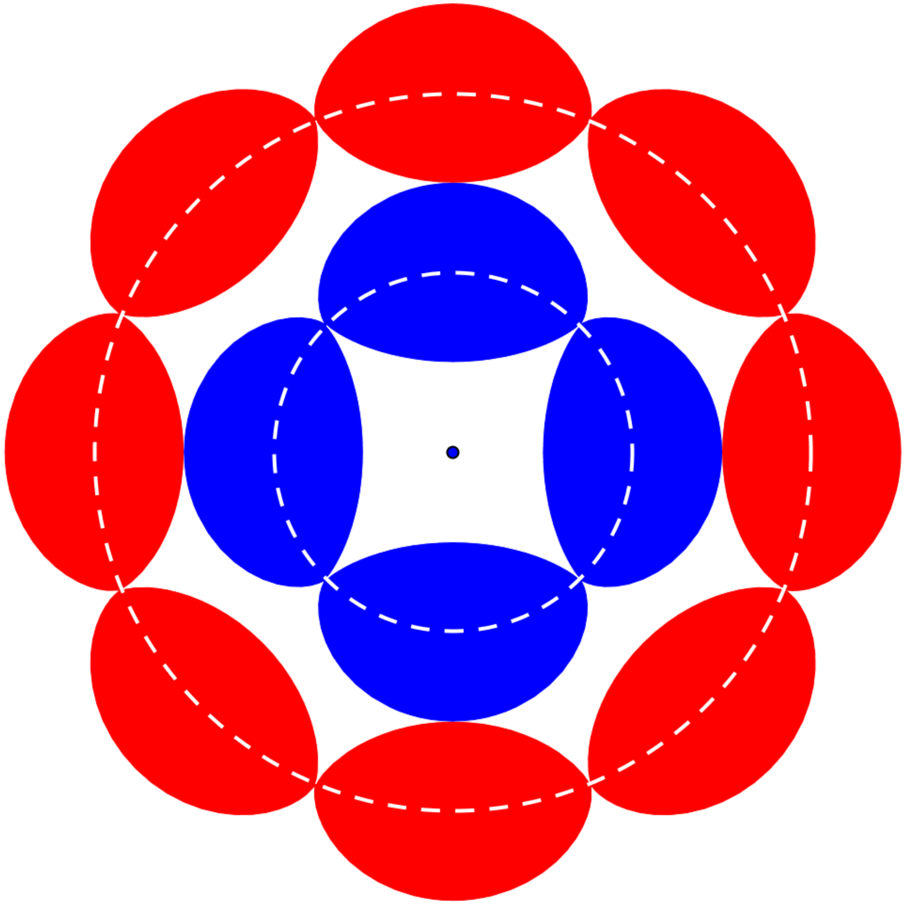
RAYMOND ESTÈVE

Sur la formule d'Holditch et les applications qu'on peut en déduire

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 284-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__284_1>

1922,



Epitrochoïdes (épicycloïdes)
Hypotrochoïdes
Trochoïdes
Conchoïdes
Cycloïdes

$$S = 3\pi R^2$$

…

jusqu'à nos jours (2018)…

Holditch-Type Theorem for Non-Linear Points in Generalized Complex Plane $\mathbb{C}_p$

Tülay Erişir[a*] and Mehmet Ali Güngör[b]

[a]*Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, Erzincan Binali Yildirim University, Erzincan, Turkey*
[b]*Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, Sakarya University, Sakarya, Turkey*
[*]*Corresponding author*