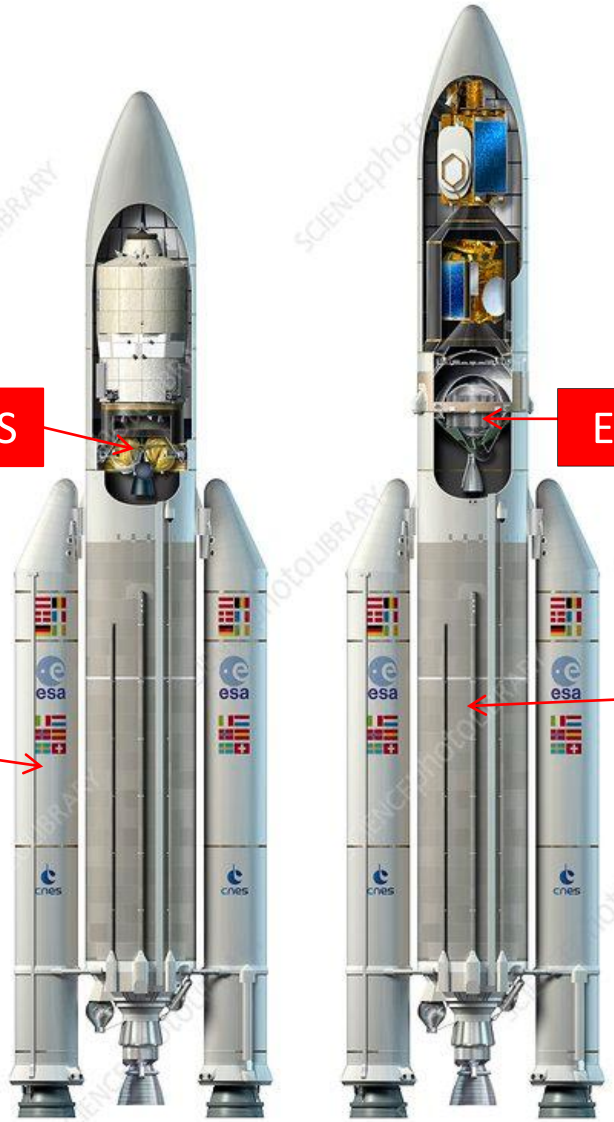
L'OPTIMISATION APPLIQUEE AU VOL DE LA FUSEE ARIANE

FOCUS SUR LES TRAJECTOIRES, LA NAVIGATION, LE GUIDAGE ET LE PILOTAGE

Charles Vallet

ARIANE 5

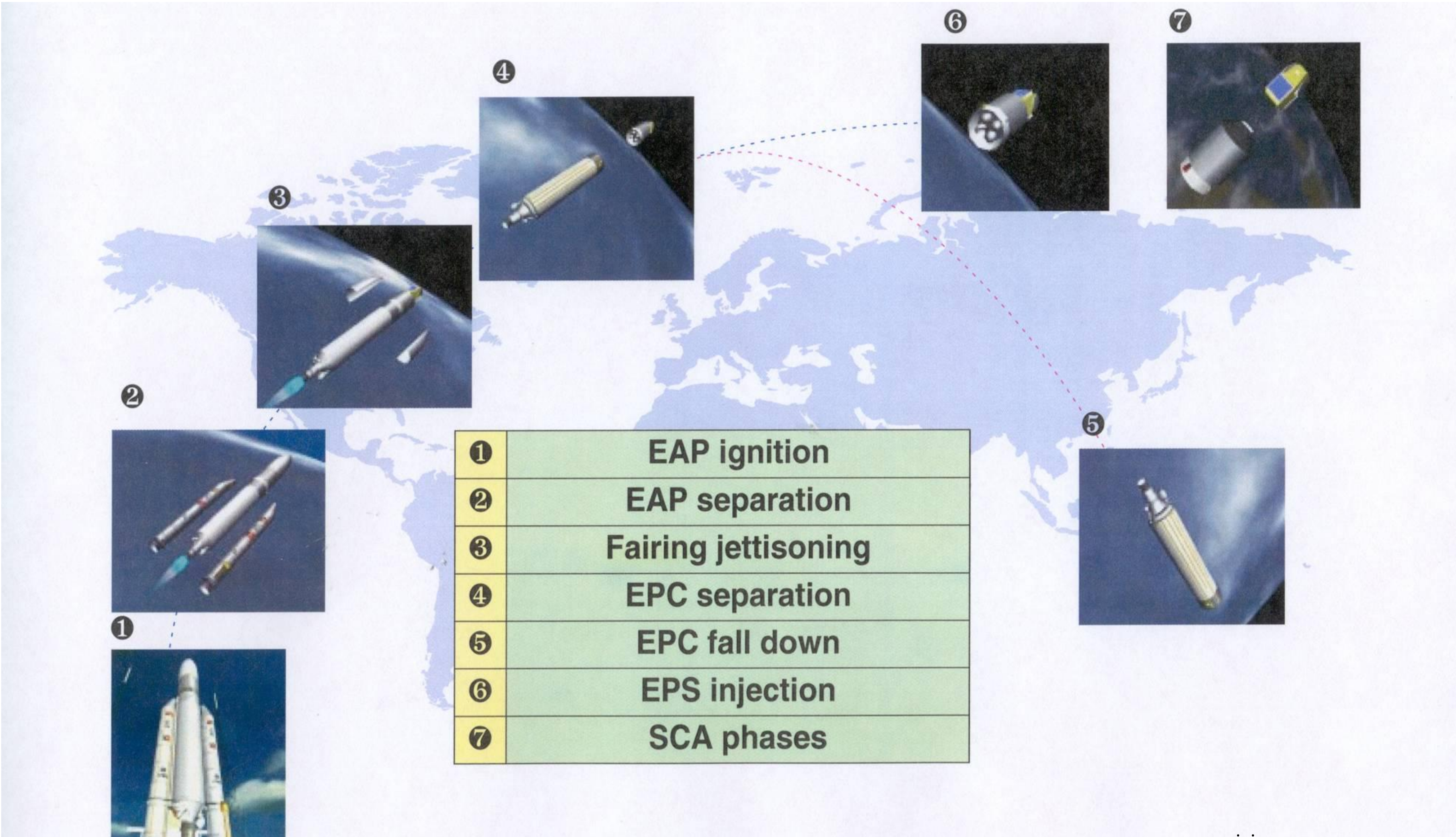


ARIANE 6

62

64

PHASES DE VOL

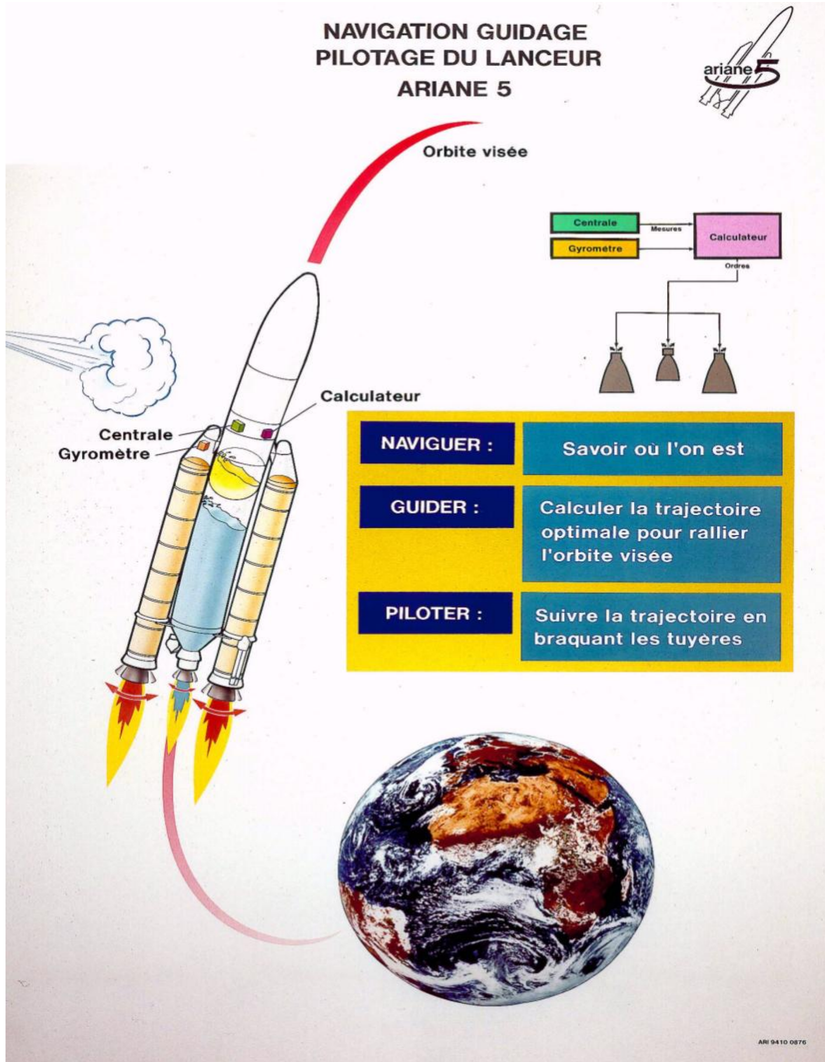


1	EAP ignition
2	EAP separation
3	Fairing jettisoning
4	EPC separation
5	EPC fall down
6	EPS injection
7	SCA phases

origine

arianeGROUP

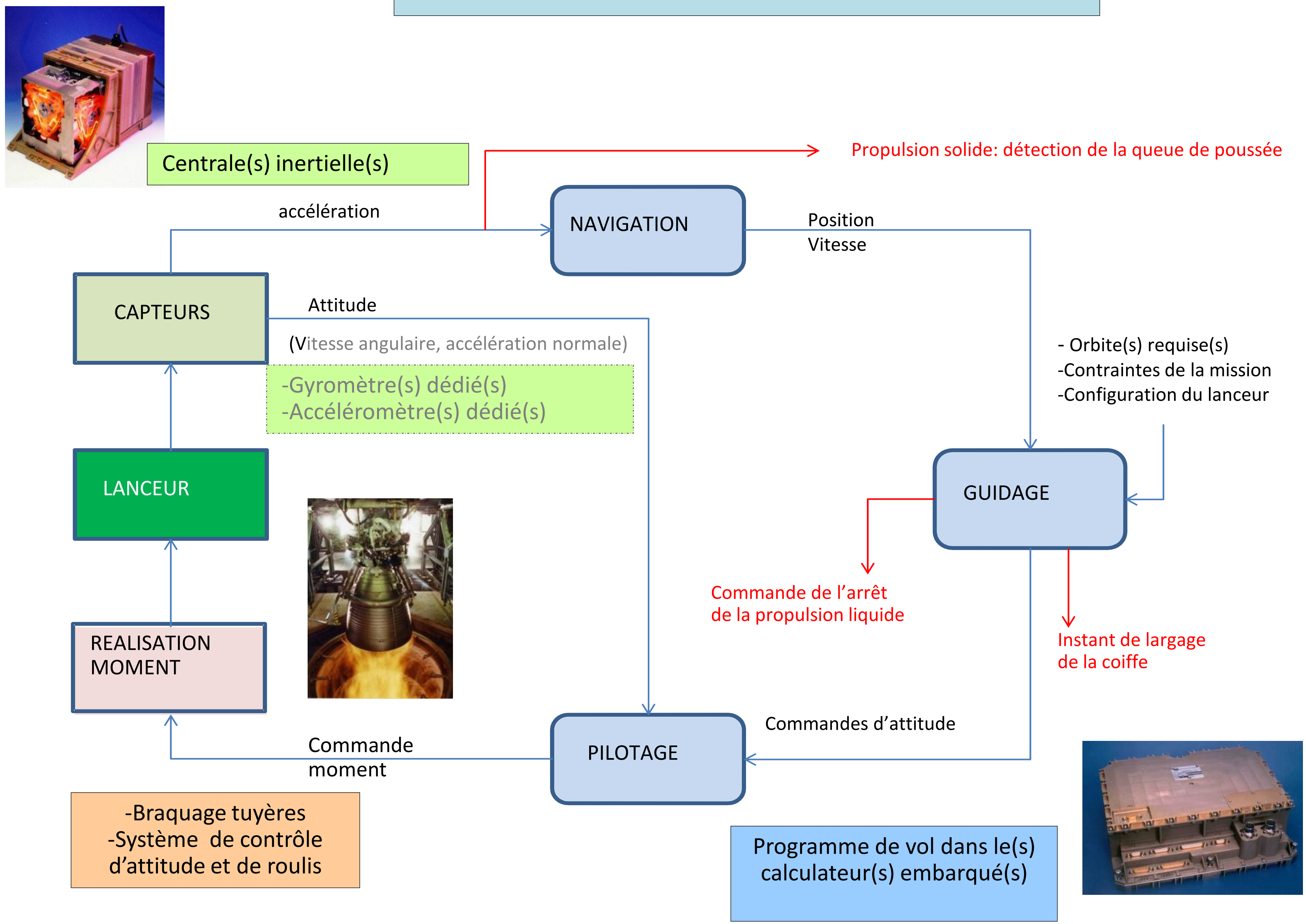
NAVIGATION GUIDAGE PILOTAGE DU LANCEUR ARIANE 5



origine

arianeGROUP

DIAGRAMME DU GNC



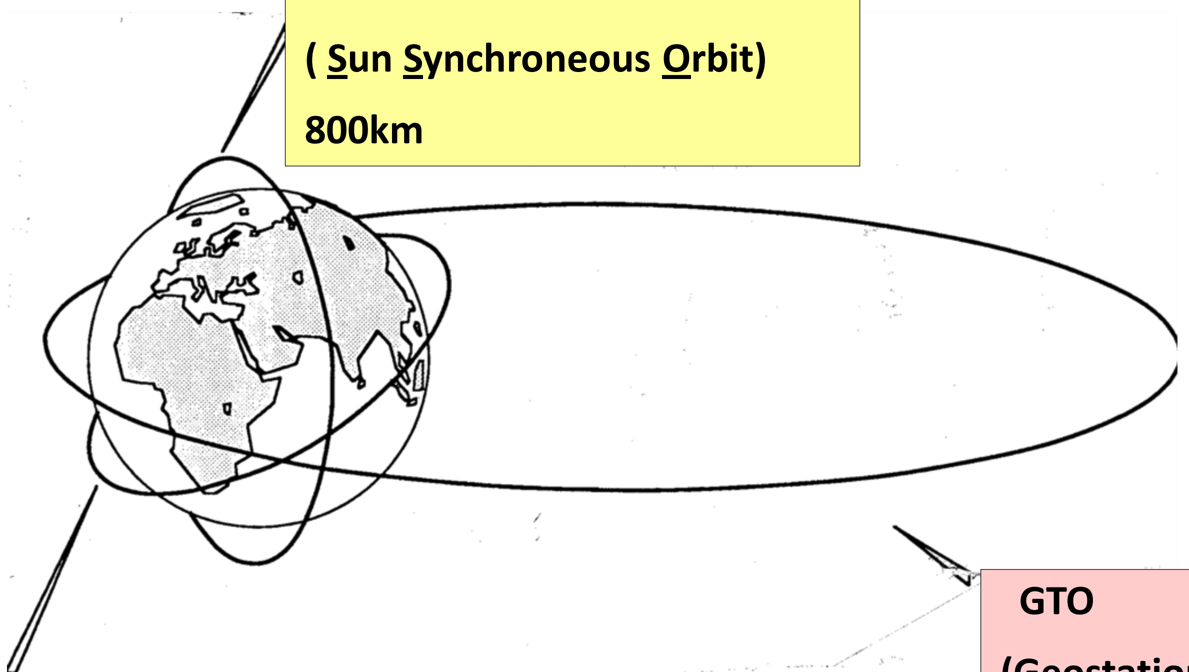
LES ORBITES

SSO

(Sun Synchroneous Orbit)

800km

Johannes Kepler 1571-1630



LEO

(Low Earth Orbit)

400km/1000km

GTO

(Geostationary Transfer Orbit)

200km/36000km

AUTRES ORBITES:

- **GEO Geostationary Earth Orbit 36000km (Télécommunications)**
- **HEO Escape (Science & Exploration)**
- **MEO 10000km/20000km (Navigation)**

Paramètres orbitaux

Une orbite est caractérisée par 6 paramètres orbitaux:

▪Le plan de l'orbite:

- i: l'inclinaison
- Ω: la longitude du nœud ascendant

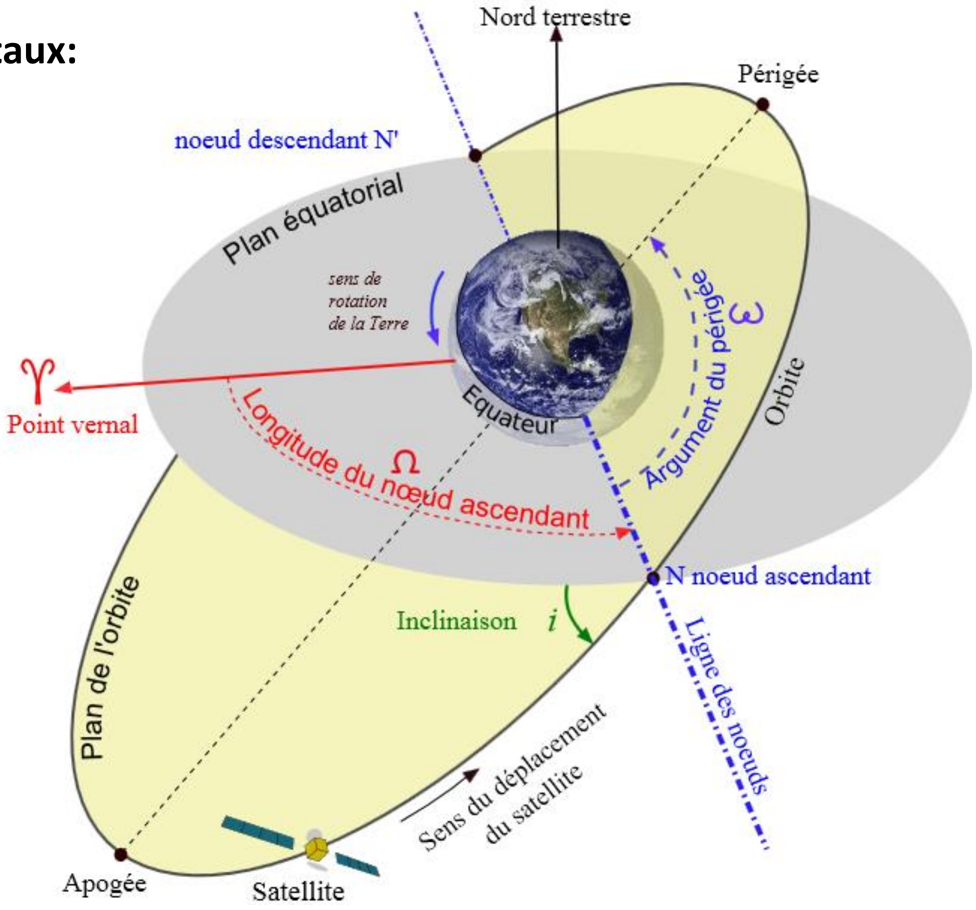
▪La forme de l'orbite:

- a: le demi grand axe
- e: l'excentricité

▪L'orientation de l'orbite et la position sur l'orbite:

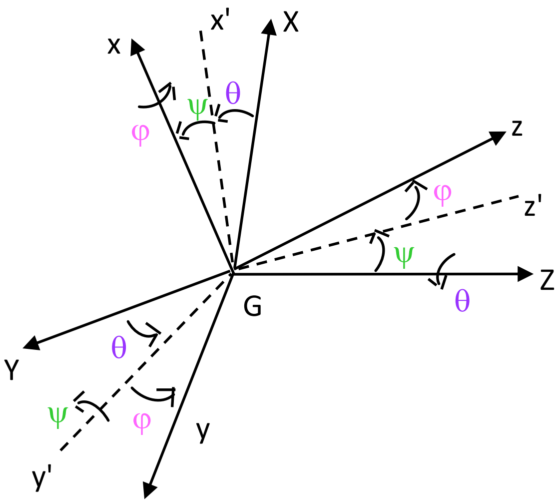
- ω: l'argument du périgée
- ν: l'anomalie vraie

Le point vernal est le point de l'écliptique qui correspond à la position du soleil à l'équinoxe du printemps en mars.
Le plan de l'écliptique est le plan de l'orbite terrestre.



Représentation d'une rotation

↳ Angles d'EULER (θ, ψ, φ)



G	:	Centre de gravité du lanceur
GXYZ	:	Repère inertiel fixe
Gxyz	:	Repère lié du lanceur

θ	:	Tangage (assiette)
ψ	:	Lacet (azimut ou cap)
φ	:	Roulis

↳ Relations cinématiques

Si $\vec{\Omega}$ est le vecteur vitesse angulaire de composantes p, q, r dans le repère Gxyz, alors:

$$
\begin{cases}
p = \dot{\varphi} - \dot{\theta}\sin\psi \\
q = \sin\varphi\cos\psi\,\dot{\theta} + \cos\varphi\,\dot{\Psi} \\
r = \cos\varphi\cos\Psi\,\dot{\theta} - \sin\varphi\,\dot{\Psi}
\end{cases}
$$

Représentation d'une rotation

➢ Le quaternion

- On passe du repère GXYZ au repère Gxyz par une rotation unique d'angle α et d'axe $\vec{\Delta}$ défini par les cosinus directeurs δ_1, δ_2, δ_3 (théorème d'EULER).
- Cette rotation est caractérisée par le quaternion Q, nombre hypercomplexe défini de la manière suivante :

$$Q = q_0 + i\, q_1 + j\, q_2 + k\, q_3$$

où q_0, q_1, q_2 et q_3 sont les composantes (nombres réels)
avec pour les produits les règles: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $i\,j = k$; $k\,i = j$; $j\,k = i$

$$q_0 = \cos\frac{\alpha}{2}\,;\; q_1 = \delta_1 \sin\frac{\alpha}{2}\,;\; q_2 = \delta_2 \sin\frac{\alpha}{2}\,;\; q_3 = \delta_3 \sin\frac{\alpha}{2}\,;$$

- On a les 2 propriétés suivantes :

$\rightarrow$ $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ relation d'unimodularité

$\rightarrow$ Il n'y a pas de singularité pour $\psi=\pi/2$

- Si on définit le quaternion Ω lié à la vitesse par :

$$\Omega = i\,p + j\,q + k\,r$$

on montre alors que :

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{1}{2}\,\Omega\, Q}$$

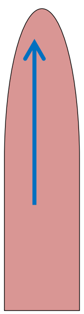
William Rowan Hamilton 1805-1865

VITESSE DELIVREE PAR UN ETAGE PROPULSIF: FORMULE DE TSIOLKOVSKY

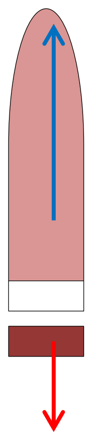
Constantin Edouardovitch Tsiolkovsky 1857-1935

- Il s'agit de calculer la vitesse délivrée par un étage de lanceur en fonction des caractéristiques de la propulsion, des masses d'ergols et des masses sèches.
- On se place dans le vide (pas d'aérodynamique).
- On ne tient pas compte de la gravité.
- On utilise la relation fondamentale de la dynamique: $\boxed{\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum \vec{F}}$

- On considère l'ensemble étage+gaz éjectés dans la tuyère. Avec les hypothèses considérées, c'est un système autonome, donc sa quantité de mouvement est constante.



<u>au temps t:</u>
masse m,
vitesse $\vec{V}$



<u>au temps t+dt:</u>
masse m-dm,
vitesse $\vec{V} + d\vec{V}$

gaz masse dm,
vitesse $\vec{V} + \vec{v}_e$
(vitesse d'éjection)

$$\Delta V = g_0 * ISP * \ln \frac{m_{initiale}}{m_{finale}}$$

- Quantité de mouvement en t: $\vec{Q}(t) = m\vec{V}$
- Quantité de mouvement en t+dt: $\vec{Q}(t+dt) = (m - dm)(\vec{V} + d\vec{V}) + dm(\vec{V} + \vec{v}_e)$
- Après réduction des termes, on obtient: $\vec{Q}(t+dt) - \vec{Q}(t) = md\vec{V} + dm\vec{v}_e = 0 \Rightarrow \boxed{m\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{dm}{dt}\vec{v}_e = \vec{P}}$ la poussée

- On écrit que P=q*g_0*ISP avec q le débit massique en kg/s, g_0=9.80665m/s² et ISP l'impulsion spécifique en s.
- Par intégration entre le temps initial et le temps final, on obtient l'accroissement de vitesse fourni par l'étage:

$$\boxed{\Delta V = g_0 * ISP * \ln \frac{m_{initiale}}{m_{finale}}}$$

Formule de Tsiolkovsky

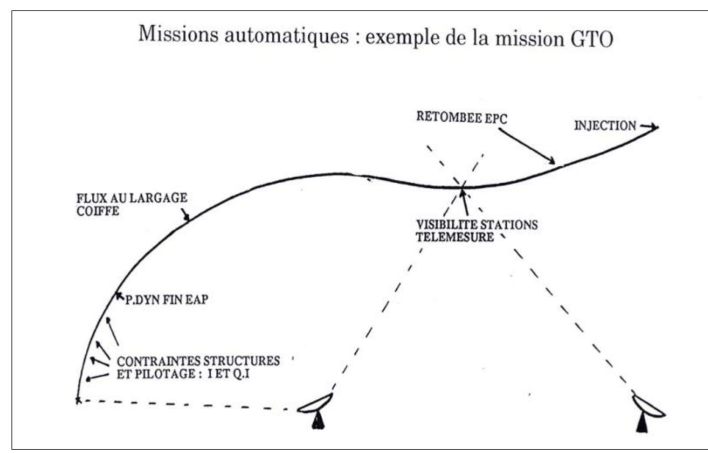
TRAJECTOIRE

L'application du principe fondamental de la dynamique fournit la position $\vec{R}$ et la vitesse $\vec{V}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{R}} \\ M\dot{\vec{V}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{V} \\ M\vec{g}(\vec{R}) + F_{aéro} + |F_{propu}|\vec{U} \end{pmatrix}$$

On a donc le système dynamique modélisé par $\boxed{\dot{x} = f(x,u,t)}$ avec $x = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{V} \end{pmatrix}$ pour lequel il faut calculer u optimal, à savoir la direction de la poussée $\vec{U}$, entre le temps initial t_0 et le temps final t_f

- critère de performance à optimiser (la charge utile en orbite, le temps de vol): $\boxed{J = \Phi(x(t_f), t_f)}$
- $\boxed{x(t_0) \text{ connu}}$
- des contraintes intermédiaires (pression dynamique, flux thermique, visibilité): $\boxed{C(x,u,t) \leq 0}$
- des conditions finales (paramètres de l'orbite d'injection): $\boxed{\Psi(x(t_f), t_f) = 0}$

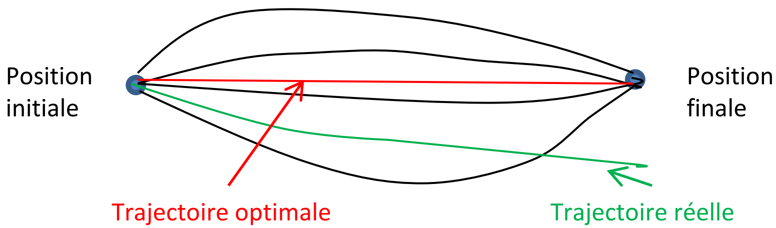


BOUCLE OUVERTE/BOUCLE FERMEE

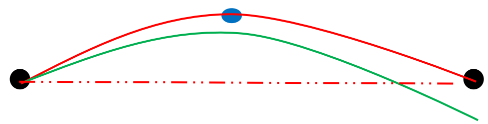
➢BOUCLE OUVERTE

La trajectoire et la commande sont pré-calculées sans tenir compte de ce qui se passe réellement en temps réel (incertitudes sur les paramètres, perturbations,…)

Sans Contrainte

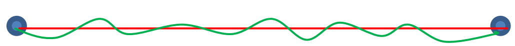


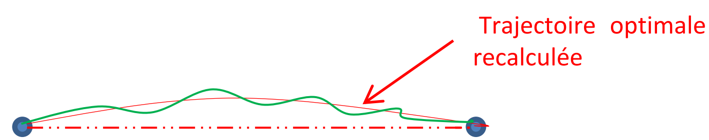
Avec contrainte



➢BOUCLE FERMEE

La trajectoire et la commande sont recalculées en temps réel pour tenir compte des écarts venant des incertitudes, perturbations,…





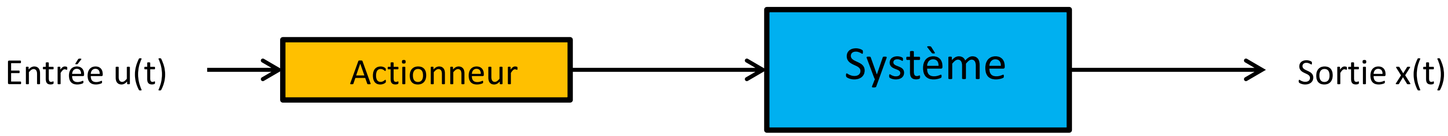
Sans contrainte

Trajectoire réelle avec asservissement sur la trajectoire optimale initiale

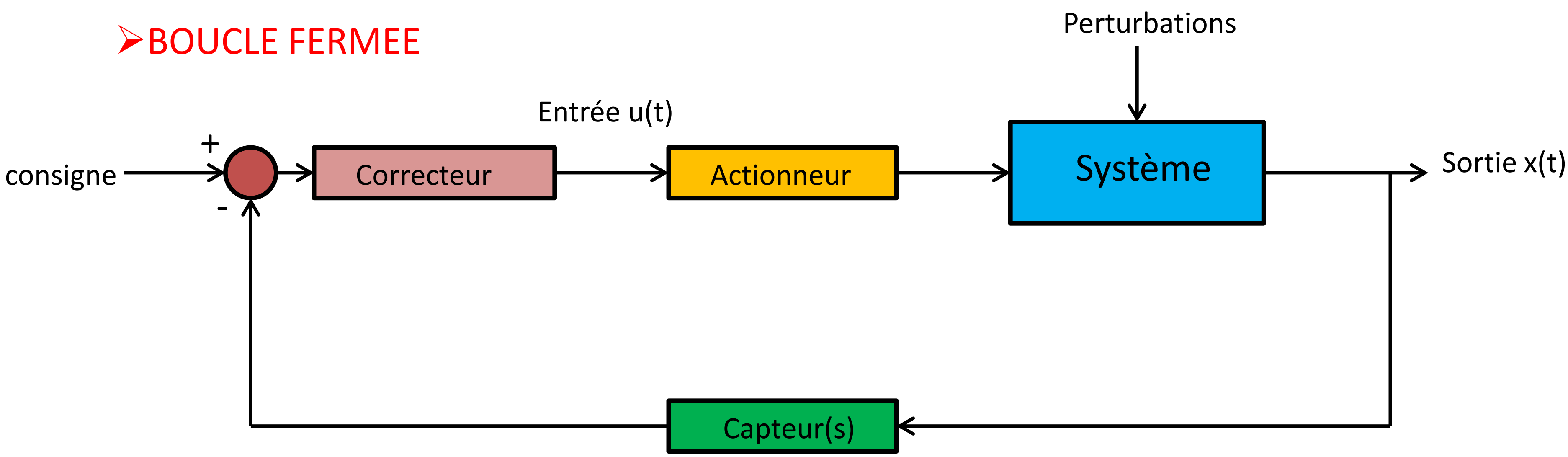
Trajectoire réelle avec asservissement sur la trajectoire optimale recalculée en temps réel

BOUCLE OUVERTE/BOUCLE FERMEE

➢BOUCLE OUVERTE

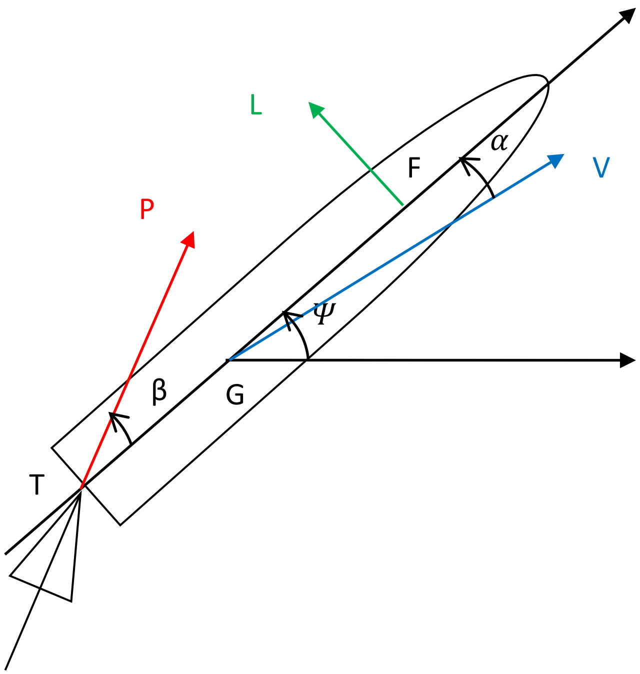


➢BOUCLE FERMEE



Le correcteur PID (Proportionnel, Intégral, Dérivé): $u=kx+\sigma dx/dt+\mu\int xdt$

EQUATION EN ROTATION DU LANCEUR (AXE DE LACET)



G: centre de gravité
T: point d'articulation de la tuyère
F: foyer aérodynamique
Ψ: angle de lacet
P: poussée
L: force normale ($L = QSC_N = QSC_{N_\alpha}\alpha$)
β: braquage de la tuyère
α: angle d'incidence
V: vitesse relative par rapport à l'air
Q: pression dynamique (Q=1/2ρV²)
S: surface de référence
I: moment d'inertie en lacet
GT= distance centre de gravité-point articulation tuyère(l_T)
GF= distance centre de gravité – centre de poussée (l_F)

$$\ddot{\Psi} = A\alpha + K\beta$$

$$K = \frac{Pl_T}{I} \qquad A = \frac{QSC_{N_\alpha} l_F}{I}$$

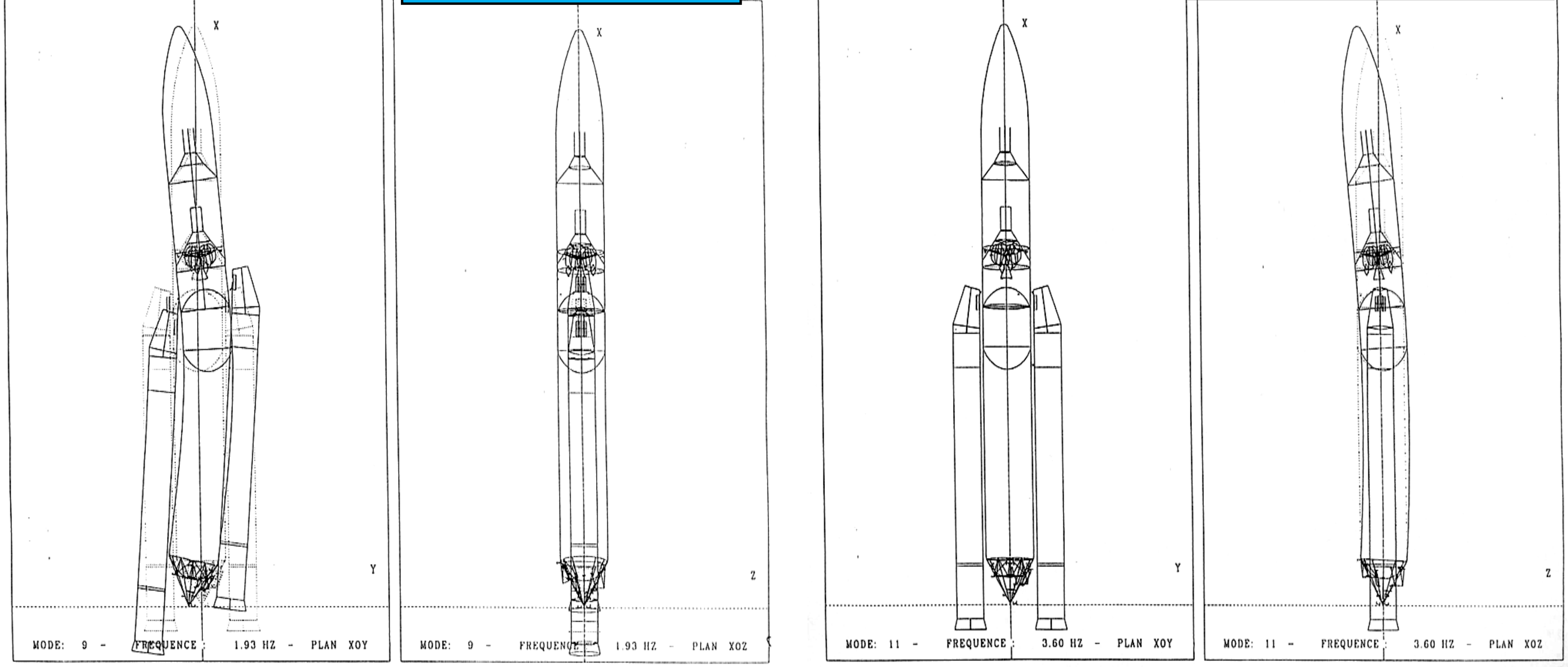
- K<0
- A<0, F est en-dessous de G: stabilité en boucle ouverte
- A>0, F est au-dessus de G: instabilité en boucle ouverte (le cas pour ARIANE actuel)

<u>Remarque</u>: le poids et la force axiale peuvent être négligés pour le pilotage

MODELE LANCEUR SOUPLE ARIANE 5

Lacet mode de flexion 1

Tangage mode de flexion1



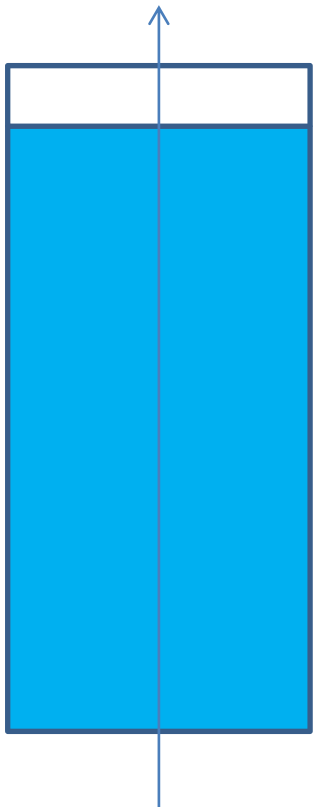
origine

arianeGROUP

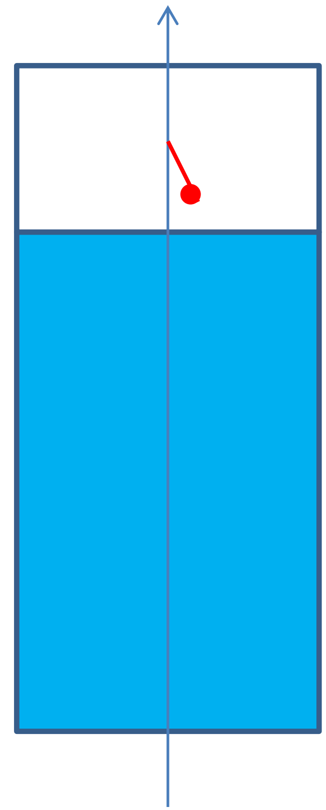
$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -\omega_i^2 Ph_T(i)\beta$$

<u>Modèle équivalent à un système masse-ressort avec amortissement pour chaque mode i</u>

MODELE BALLOTTEMENT ARIANE 5



Le mouvement du liquide dans le réservoir est équivalent à celui d'un pendule oscillant



<u>Masse du pendule:</u>

- quelques centaines de kg pour le réservoir d'hydrogène liquide
- 35 tonnes pour le réservoir d'oxygène liquide

Optimisation

Cas monovariable

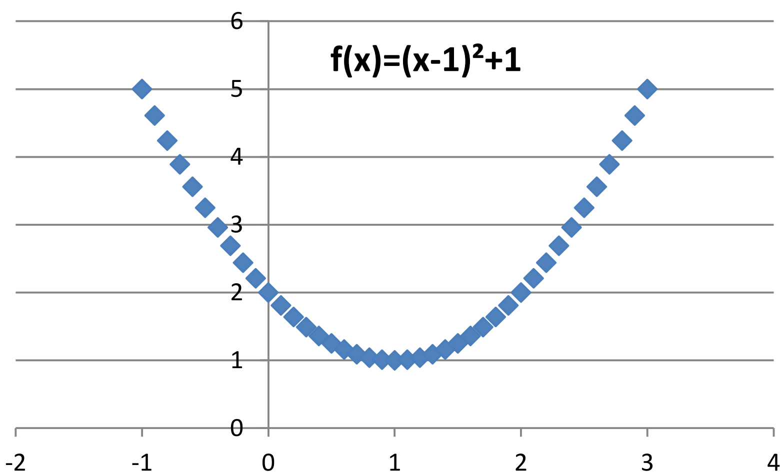
On considère la fonction f(x) définie sur un intervalle donné.

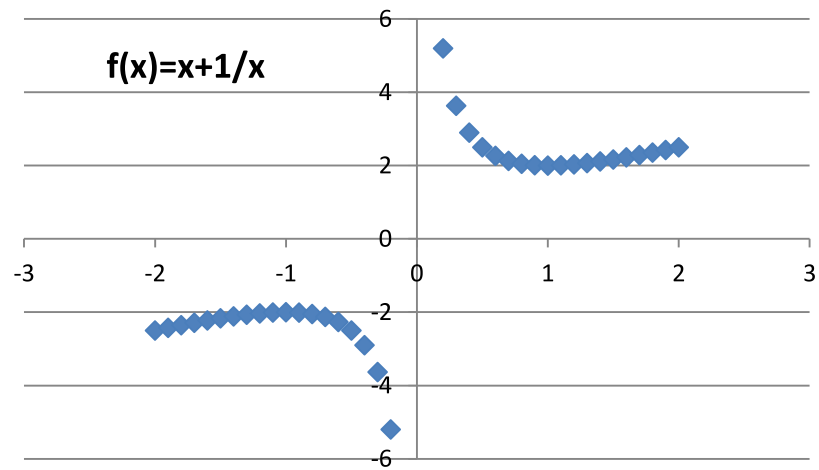
Les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir un minimum local en x^* sont:

- la dérivée première est nulle en ce point: $f'(x^*)=0$
- La dérivée seconde est strictement positive en ce point: $f''(x^*)>0$

On a un maximum local en x^* si la dérivée seconde est strictement négative en ce point: $f''(x^*)<0$.

Le minimum local est global si f(x) est convexe: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.





Cas multivariable sans contrainte

On considère la fonction à minimiser $f(\underline{x})$, $\underline{x} \in R^n$, définie sur un hyperplan donné Ω.
Les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir un minimum local de f en $\underline{x}^*$ sont:

- le vecteur gradient $\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}$ est nul en $\underline{x}^*$
- Le hessien $\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{x}^2}$ est une matrice définie positive

Le minimum local est global sous réserve de la convexité de $f(\underline{x})$ sur Ω.

Cas multivariable avec des contraintes égalité

On considère la fonction à minimiser $f(\underline{x})$, $\underline{x} \in R^n$, définie sur un hyperplan donné Ω.
Il y a p contraintes égalité: h(x) = 0 sur Ω.
On définit le lagrangien $L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) + \underline{\lambda}^T \underline{h}(\underline{x})$ où $\underline{\lambda}$ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. On est ramené au cas sans contrainte en considérant L au lieu de f.
Si $\underline{x}^*$ est un minimum local de f, alors il existe $\underline{\lambda}^*$ tel que:

- $\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} + \underline{\lambda}^T \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} = \underline{h} = 0$, ce qui équivaut à $\underline{h}(\underline{x}^*) = 0$

Le minimum local est global sous réserve de la convexité de $L(\underline{x})$ sur Ω.

Exemple 1: quel est le rectangle de périmètre minimal et de surface donnée?
Exemple 2: quel est le rectangle de plus grande surface inscriptible dans une ellipse?

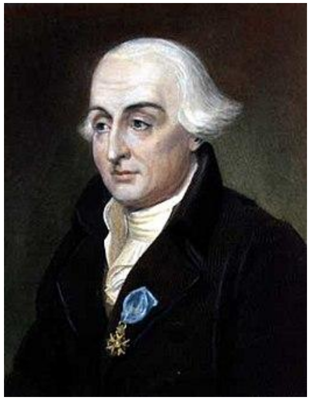
Cas multivariable avec des contraintes égalité et inégalité

On considère la fonction à minimiser f($\underline{x}$), $\underline{x} \in R^n$, définie sur un hyperplan donné Ω.
Il y a p contraintes égalité: $\underline{h}(\underline{x}) = 0$ sur Ω.
Il y a q contraintes inégalité: $\underline{g}(\underline{x}) \leq 0$ sur Ω.
On définit le lagrangien L ($\underline{x}$, $\underline{\lambda}$) = f($\underline{x}$)+ $\underline{\lambda}^T$ $\underline{h}(\underline{x})$ +$\underline{\mu}^T$ $\underline{g}(\underline{x})$ où $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ sont 2 vecteurs de multiplicateurs de Lagrange.
<u>Conditions de Karush-Kuhn-Tucker</u>
Si $\underline{x}$* est un minimum local de f, alors il existe $\underline{\lambda}$* et $\underline{\mu}$* tel que:

- $\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} + \underline{\lambda}^T \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} + \underline{\mu}^T \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} = \underline{h} = 0$, ce qui équivaut à $\underline{h}(\underline{x^*}) = 0$
- $\mu_j g_j(\underline{x}^*) = 0$ pour j allant de 1 à q. Le multiplicateur μ_j est nul si la contrainte correspondante g_j est inactive (non saturée); lorsque qu'une contrainte est active (saturée), le multiplicateur est ≥ 0

En cas de convexité, ces conditions deviennent nécessaires et suffisantes pour avoir un minimum.

Calcul des variations



Jean-Louis Lagrange 1736-1813

Le problème considéré est le suivant: étant donné les points (x_1,y_1) et (x_2,y_2), ainsi que la fonction F, trouver la courbe y=y(x) passant par ces points et minimisant l'intégrale:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

La solution à ce problème est fournie par l'équation d'Euler-Lagrange: $\frac{d}{dx}(\frac{\delta F}{\delta y'}) - \frac{\delta F}{\delta y} = 0$

<u>Remarque</u>: cette équation est la même que celle utilisée pour déterminer la dynamique d'un système où F est le lagrangien égal à T-V avec T l'énergie cinétique et V le potentiel. T et V dépendent des coordonnées généralisées q et des dérivées $\dot{q}$ *. Lorsqu'il y a des forces appliquées , le 0 est remplacé par les forces généralisées.*

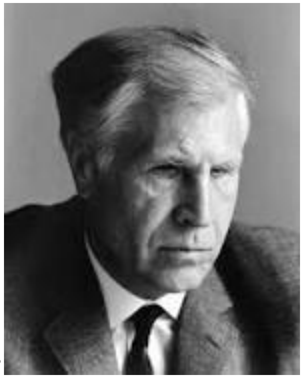
<u>Exemple 1</u>: trouver la distance minimale entre 2 points où $F = \sqrt{1 + y'^2}$

<u>Exemple 2</u>: trouver la courbe assurant le passage minimal entre 2 points dans le plan vertical d'un mobile seulement soumis à la force de gravité g et glissant sans frottement sur la courbe (problème brachistochrone). Dans ce cas, $F = \sqrt{1 + y'^2} / \sqrt{2gx}$

S'il y a une contrainte intégrale J = $\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')dx$ égale à une constante, alors la minimisation (ou la maximisation) de I revient à prendre F+λG dans l'équation d'Euler-Lagrange, λ étant un multiplicateur de Lagrange constant. On rencontre ceci dans les problèmes iso-périmétriques: parmi les courbes planes fermées de périmètre donné, trouver la courbe correspondant à la surface maximale.

<u>Remarque:</u> les équations d'E-L sont valables si <u>y</u> et <u>y</u>' sont des vecteurs

La commande optimale des systèmes dynamiques
Le principe du maximum de Pontryagin



Lev Demionovitch Pontryagin
1908-1988

Le système à contrôler est modélisé par:

$$\dot{x} = f(x,u,t)$$

x est le vecteur d'état à n composantes, u le vecteur de commande à m composantes et t le temps.
Le vecteur d'état à l'instant initial est $x(t_0)$ et à l'instant final $x(t_1)$.
Le temps final t_1 peut être soit imposé soit libre.
Le vecteur d'état final peut être contraint par p relations $h(x(t_1))=0$ $(p \leq n)$
Le vecteur de commande u appartient à un ensemble U restreint ou non.
On considère un critère de performance à optimiser:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt + S(x(t_1),t_1)$$

Il s'agit de trouver le contrôle optimal u(t) fonction de x(t) et de t pour aller de $x(t_0)$ à $x(t_1)$ en minimisant le critère J et en respectant les contraintes.
On définit l'hamiltonien H par: $H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$ où λ est le vecteur adjoint défini par: $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$
La commande optimale u* est celle qui minimise l'hamiltonien. Si l'hamiltonien est dérivable par rapport à u, la commande optimale est obtenue par $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

On retrouve le modèle du système à contrôler par: $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$

L'hamiltonien optimal H*(x,λ,t) est égal à H(x, u*(x, λ, t), λ,t). A l'instant final, on doit respecter les contraintes dites de transversalité au temps final t_1:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda\right)^T dx + \left[H^*(x,\lambda,t) + \frac{\partial S}{\partial t}\right]dt = 0$$

Minimiser le temps pour aller en orbite

On considère la phase exo-atmosphérique (pas d'aérodynamique).

Le critère est min J= $\int_{t_0}^{t_1} dt$ avec $[\vec{r}(t_1)\vec{V}(t_1)]$ imposés (orbite finale) et $m(t_1)$ imposée.

Les équations du mouvement sont:
$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{V} \\ \dot{\vec{V}} = \vec{g}(\vec{r}) + \dfrac{F\vec{u}}{m} \\ \dot{m} = -\dfrac{F}{g_0 ISP} \end{cases}$$

Le vecteur d'état est $\vec{x} = [\vec{r}, \vec{V}, m]$ connu au temps initial t_0

L'hamiltonien est: $H = 1 + \vec{\lambda}_{\vec{r}}.\vec{V} + \vec{\lambda}_{\vec{V}}.(\vec{g}(\vec{r}) + \dfrac{F\vec{u}}{m}) + \lambda_m(-\dfrac{F}{g_0 ISP})$

Le système adjoint est donné par: $\dot{\vec{\lambda}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \vec{x}} = \left[-\vec{\lambda}_{\vec{V}}.\dfrac{\partial \vec{g}(\vec{r})}{\partial \vec{r}}, -\vec{\lambda}_{\vec{r}}, \dfrac{F}{m^2}\vec{\lambda}_{\vec{V}}.\vec{u}\right]$

L'hamiltonien est minimal si la direction $\vec{u}$ de la poussée est alignée avec $\vec{\lambda}_{\vec{V}}$

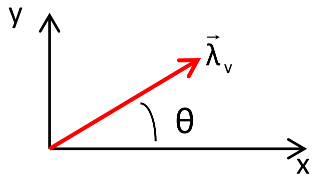
Les conditions de transversalité sont: $H^*(x(t_1), \lambda(t_1), t_1)=0$

Cas simplifié

Si on considère que la gravité est constante, alors $\dfrac{\partial \vec{g}(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = 0$, ce qui entraîne $\dot{\vec{\lambda}}_{\vec{r}} = \vec{0}$, donc $\vec{\lambda}_{\vec{r}} = \vec{c}_1$, et comme $\dot{\vec{\lambda}}_{\vec{V}} = -\vec{\lambda}_{\vec{r}}$

on en déduit que $\vec{\lambda}_{\vec{V}} = \vec{c}_2 - \vec{c}_1 t$, ce qui donne la direction optimale $\vec{u}^*$ de la poussée.

Si on se place dans le cas d'une trajectoire plane, alors:



$$\boxed{tg\theta = \frac{c_{2y} - c_{1y}t}{c_{2x} - c_{1x}t}}$$ (loi tangente bilinéaire)

Le pilotage en temps minimal

On considère le modèle $\ddot{\theta} = u$ avec $|u| \leq 1$. Ceci correspond au lanceur rigide en tangage hors atmosphère pendant la mise à poste des satellites.
On souhaite déterminer la commande minimisant le temps pour aller de θ_0 à t_0 à θ_1 à t_1, les vitesses angulaires étant nulles. Le critère à minimiser est donc $J=\int dt = t_1-t_0$.
En posant $x_1=\theta$ et $x_2=d\theta/dt$, la représentation d'état est:

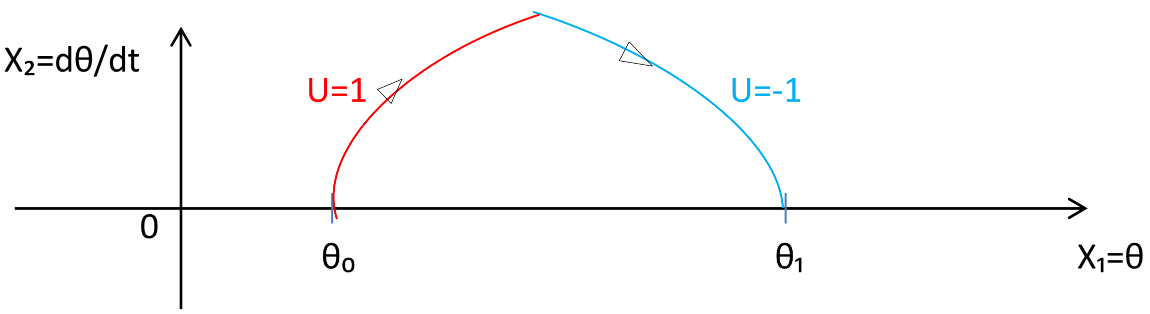
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

L'hamiltonien est égal à $H = 1+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$
La commande qui minimise H est $u=-\text{signe}(\lambda_2)$
Le vecteur adjoint est donné par:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = c_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = -c_1 t + c_2$$

Les conditions de transversalité en t_1 sont: $-\lambda_1 dx_1 - \lambda_2 dx_2 + H^* dt = 0$
dx_1 et dx_2 sont nuls en t_1 car $x(t_1)$ et $x(t_2)$ sont imposés; $dt \neq 0$ (le temps final libre), donc $H^*(t_1)=1+\lambda_2(t_1)u(t_1)=0$
$\lambda_2(t)$ change 1 fois de signe au maximum, on a donc u=1 puis u=-1 (ou l'inverse selon les conditions initiales).
Dans le plan (x_1, x_2) les trajectoires sont des paraboles.



Le régulateur quadratique linéaire (LQR)

Système à réguler: $\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad x \in R^n \quad u \in R^m$

Objectif: on veut aller de $x(t_0)$ à $x(t_1)$ proche de 0 en un temps t_1 fixé, avec un niveau de commande $u(t)$ acceptable et en ne dépassant pas trop 0 pour $x(t)$. On considère l'objectif quadratique J suivant:

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_1)S_1x(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt$$

S_1 et $Q(t)$ sont des matrices symétrique semi-définies-positives; $R(t)$ est une matrice symétrique définie-positive.

Application du principe du maximum:

1. On forme l'hamiltonien: $H = \frac{1}{2}x^TQ(t)x + \frac{1}{2}u^TR(t)u + \lambda^T\left[A(t)x + B(t)u\right]$
2. On annule la dérivée partielle de H par rapport à u pour obtenir u*: $\frac{\partial H}{\partial u} = R(t)u + B^T(t)\lambda = 0 \Rightarrow u = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda$
3. On détermine le système adjoint λ: $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Q(t) - A^T\lambda$
4. On retrouve la dynamique du système $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = A(t)x + B(t)u = \dot{x}(t)$
5. Comme dt=0 et dx≠0, les conditions de transversalité imposent: $\lambda(t_1)=S_1x(t_1)$

Pour trouver la commande optimale, on doit résoudre avec des conditions initiales connues $x(t_0)$ et des conditions finales connues $\lambda(t_1)$ (problème dit aux 2 bouts):

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\lambda}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\\ -Q(t) & -A(t)\end{bmatrix}}_{\text{Matrice de Hamilton}}\begin{pmatrix}x\\ \lambda\end{pmatrix}$$

Le régulateur quadratique linéaire (LQR) (suite)

On peut montrer que $u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)S(t)x(t)$ où la matrice symétrique S(t) est la solution de l'équation différentielle de Riccati $\dot{S}(t) + Q(t) + SA(t) + A^T(t)S - SB(t)R^{-1}(t)B^T(t)S = 0$ avec la valeur finale $S(t_1)=S_1$
Cette équation différentielle est intégrée en remontant le temps.

__Remarque:__ si t devient significativement grand devant le temps de réponse du système et si les matrices A, B, Q, R ne dépendent pas du temps, alors il existe une solution stationnaire de l'équation de Ricatti avec S matrice constante

__Exemple__

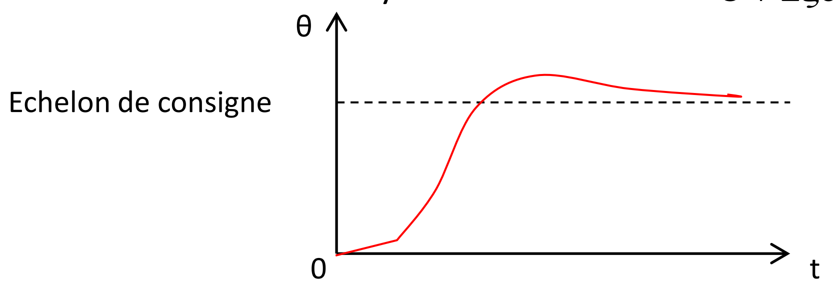
On considère le modèle $\ddot{\theta} = \beta$ qui correspond au lanceur rigide en tangage hors atmosphère; β est le braquage de la tuyère .
En posant $x_1=\theta$ et $x_2=d\theta/dt$, on a le modèle d'état suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \beta$$

On souhaite calculer la commande optimale minimisant le critère quadratique: $J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (q x_1^2 + \beta^2)dt$

Les matrices ne dépendent pas du temps. Il existe une solution stationnaire. La commande de braquage est alors égale à:
$\beta = b_1(\theta - \theta_c) + b_2\dot{\theta}$ avec $b_1 = -\sqrt{q}$ et $b_2 = -\sqrt{2}q^{1/4}$

On obtient finalement en boucle fermée un système du 2ème ordre $\ddot{\theta} + 2\xi\omega\dot{\theta} + \omega^2\theta = \omega^2\theta_c$ avec $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$



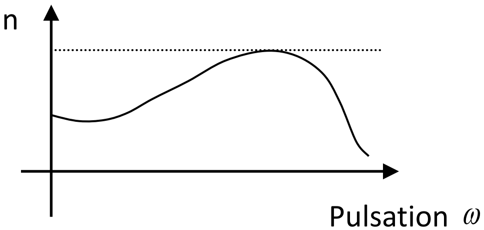
Si on ajoute un filtre de Kalman pour estimer le vecteur d'état à partir des mesures de la centrale inertielle, on obtient la commande LQG (Linéaire, Quadratique, Gaussien)

Pilotage avec la méthode H∞

Définitions:

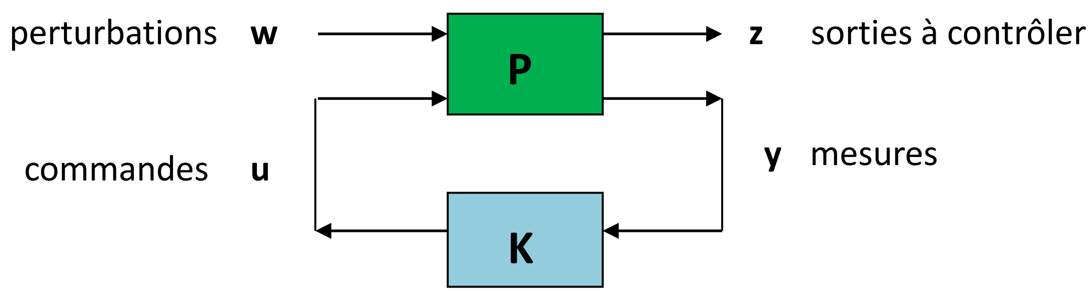
- La norme ∞ du vecteur X à n composantes est: $\|X\|_\infty = \max(|x_i|, i = 1,\ldots,n)$
- La norme ∞ de la fonction f(t) définie sur[a,b] est: $\|f(t)\|_\infty = \sup_t |f(t)|$

- Pour un système linéaire SISO (Single Input Single Output) de fonction de transfert G(jω), la norme H∞ est définie par: $\|G(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)|$



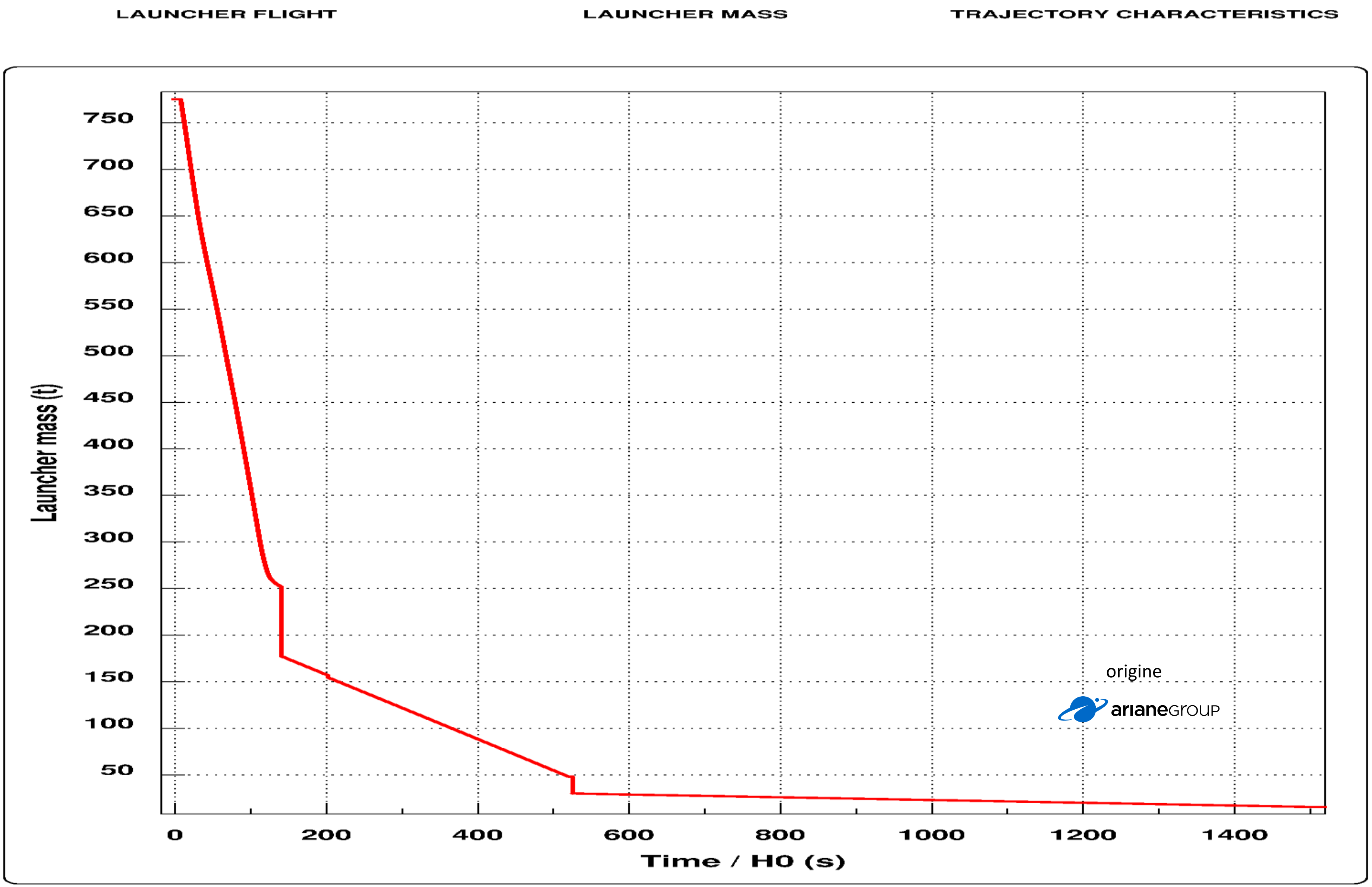
- Pour un système linéaire MIMO (Multi Input Multi Output) de matrice de transfert G(jω), la norme H∞ est définie par: $\|G(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max}(G(j\omega))$ où $\sigma_{\max}(M)$ est la plus grande valeur singulière de la matrice M. Les valeurs singulières d'une matrice M sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice hermitienne M*M, où M*est la matrice trans-conjuguée de M.

Schéma standard :

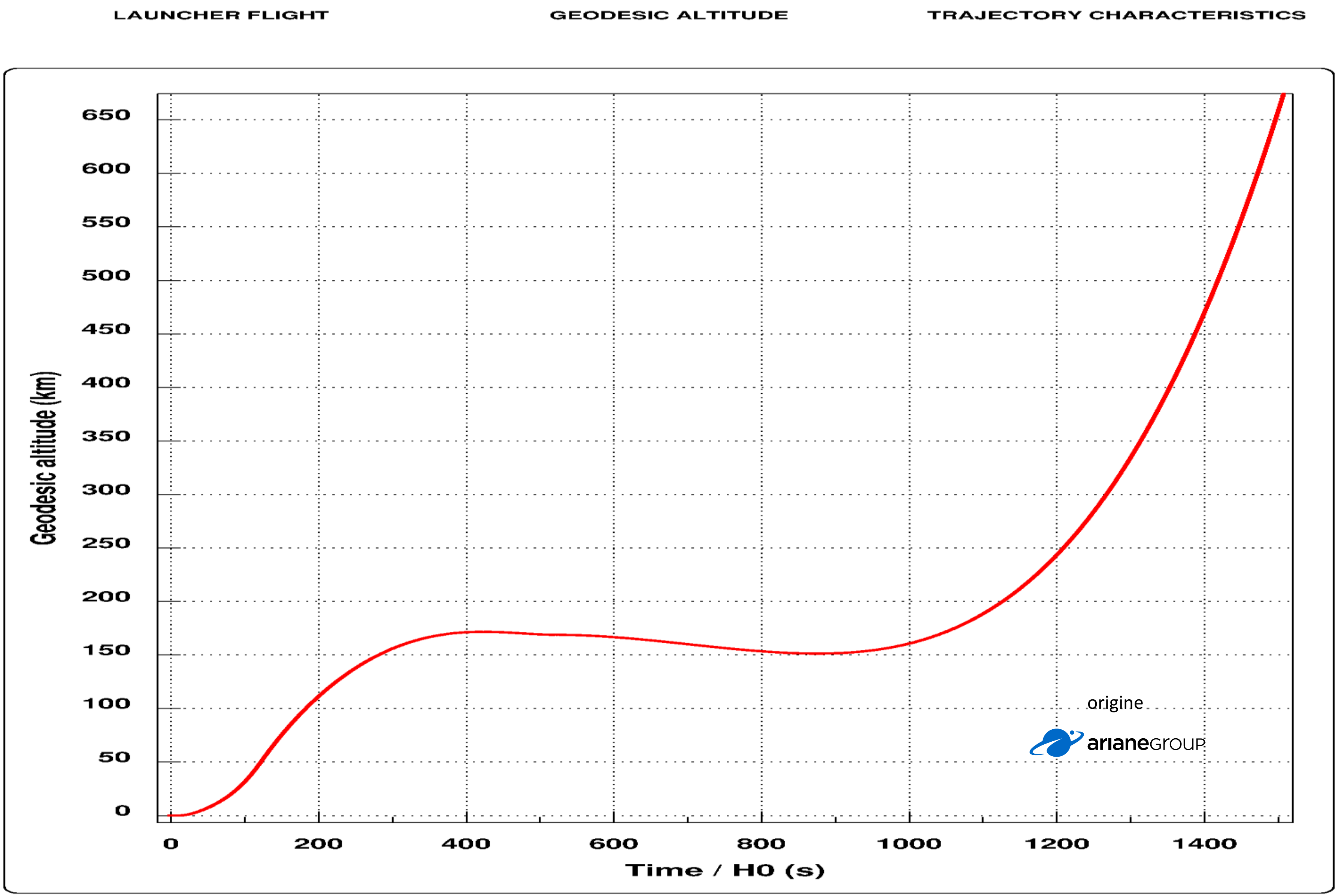


Le principe de la commande H∞ est de déterminer le correcteur K de façon à minimiser le « gain » maximal $\|P(j\omega)\|_\infty$ du transfert global (P) entre tout ce qui perturbe le système (w) et tout ce que l'on veut contrôler (z), chacun des transferts concernés dans P étant affecté de pondérations fréquentielles.

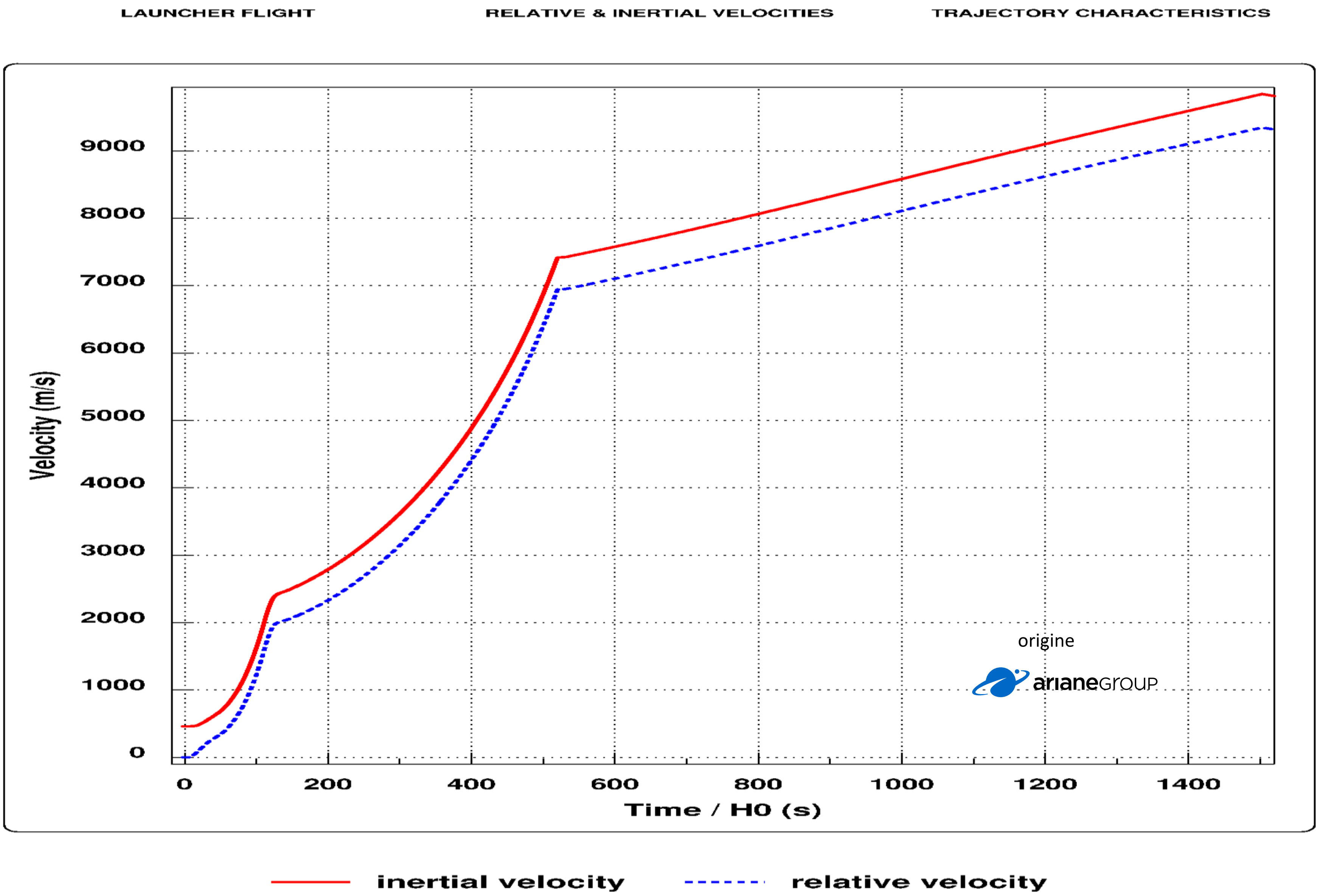
ARIANE 5: MASSE LANCEUR



ARIANE 5: ALTITUDE VS TEMPS



ARIANE 5: VITESSE VS TEMPS



ARIANE 5: VISIBILITE RADARS