

Du jeu de la vie de Conway aux schémas de Boltzmann sur réseau

François Dubois*

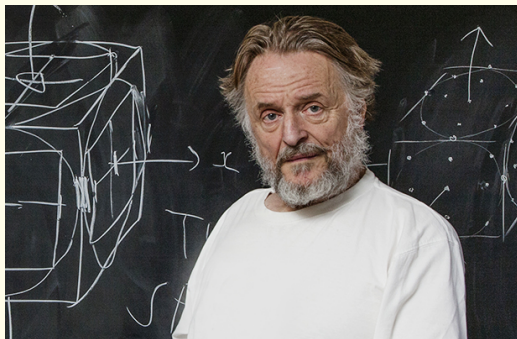
Salon Culture et Jeux Mathématiques
le salon se démathérialise
samedi 30 mai 2020

* co-animateur du Kafemath



John Conway (26 décembre 1937 – 11 avril 2020)

2



wikipedia

Théorie des nombres

Docteur (PhD) et professeur à l'Université de Cambridge (1964)

Prix Berwick (1971), prix Pólya (London Math. Society, 1987)

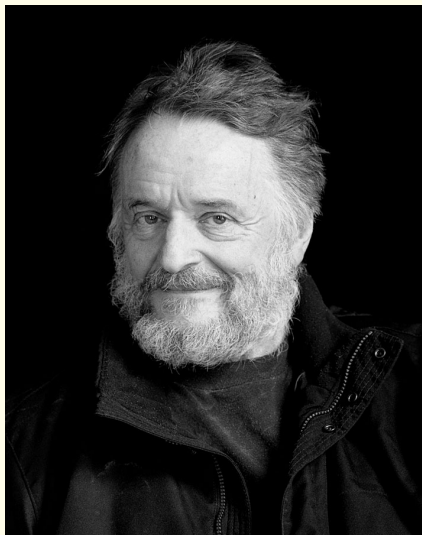
prix Nemmers (1998), prix Leroy P. Steele (AMS, 2000)

Membre de la Royal Society (1981)

Entretiens avec Brady Haran pour la chaîne Numberphile (2014)

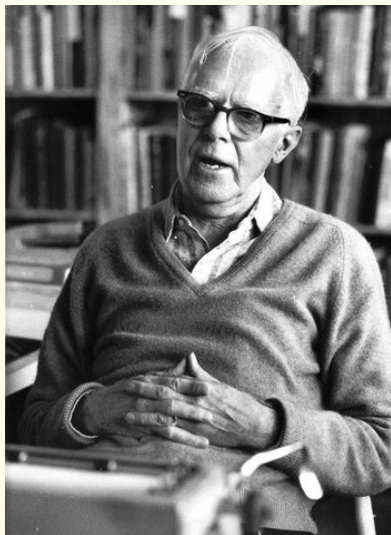
[joueur de backgammon](#), théorie des [jeux](#)

Jeu de la vie de Conway (1970)



John Conway (1937-2020)

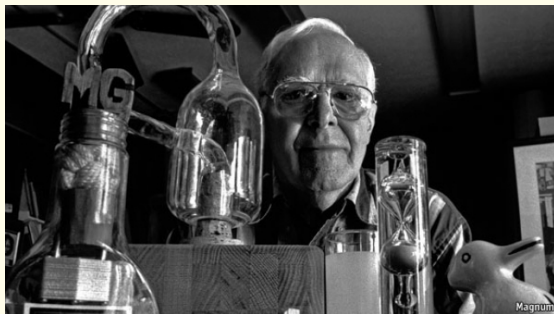
siobhanroberts.com



Martin Gardner (1914 - 2010)

andrewcusack.com

Un très célèbre article de Martin Gardner



www.economist.com

Martin Gardner, Mathematical Games, octobre 1970

The fantastic combinations of John Conway's
new solitaire game "Life"

Scientific American, volume 223, pages 120–123

Règles du jeu de la vie



survie

si une cellule a **deux** ou **trois** voisines vivantes,
elle reste dans son état actuel à l'étape suivante



mort

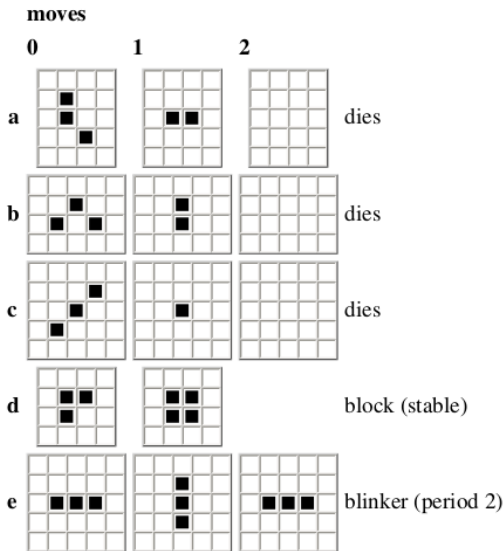
une cellule vivante meurt
si elle possède **zéro** ou **une** cellule voisine
ou **quatre** voisines ou plus (surpopulation)



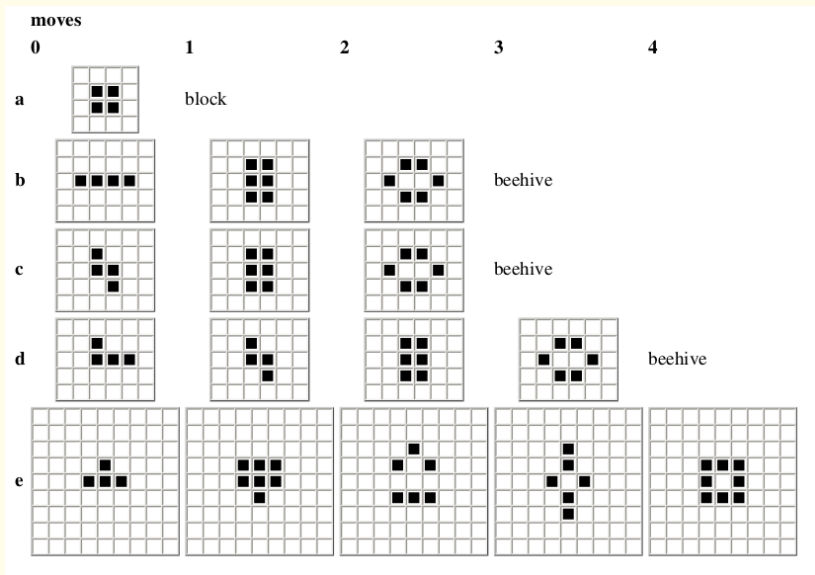
naissance

une cellule morte possédant exactement
trois voisines vivantes devient vivante

Illustrations extraites de l'article de Gardner

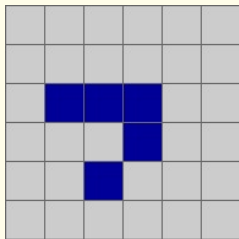


Illustrations extraites de l'article de Gardner (ii)



Planeur (glider)

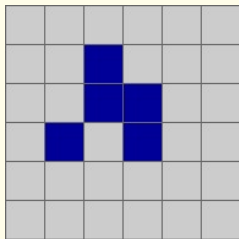
8



Alexander Schatten

www.schatten.info

Planeur (glider)

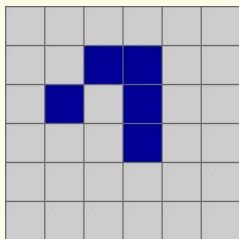


Alexander Schatten

www.schatten.info

Planeur (glider)

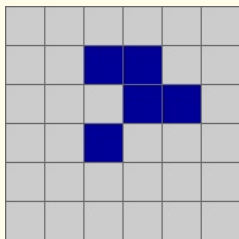
10



Alexander Schatten

www.schatten.info

Planeur (glider)

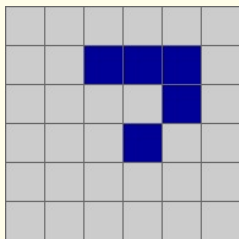


Alexander Schatten

www.schatten.info

Planeur (glider)

12

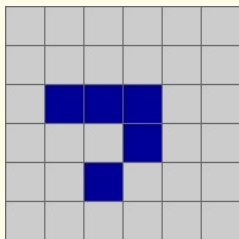


Alexander Schatten

www.schatten.info

Planeur (glider)

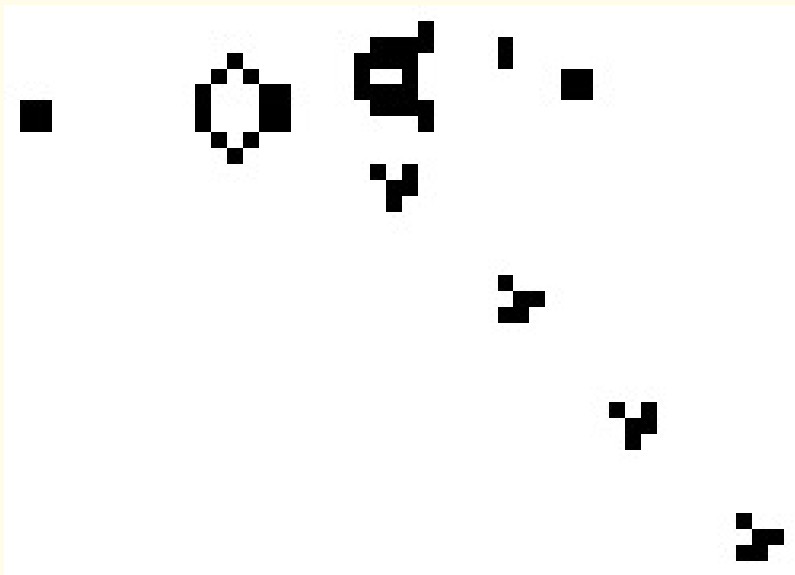
13



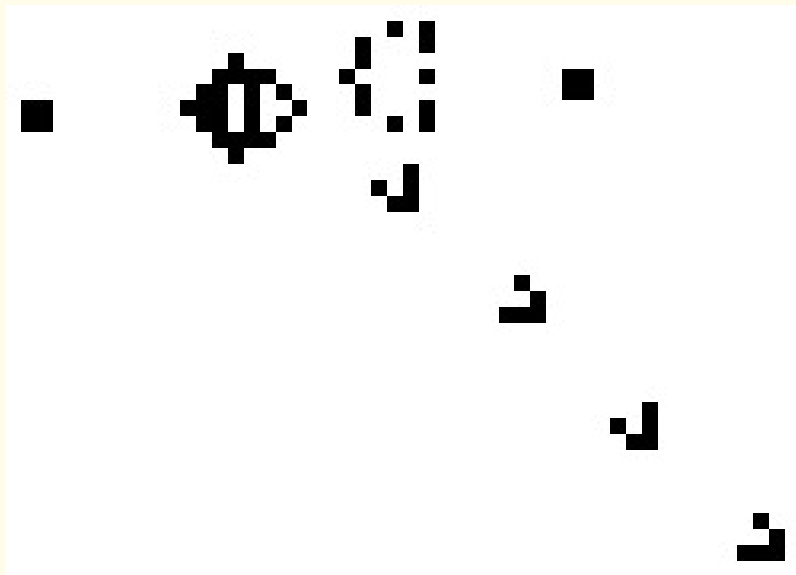
Alexander Schatten

www.schatten.info

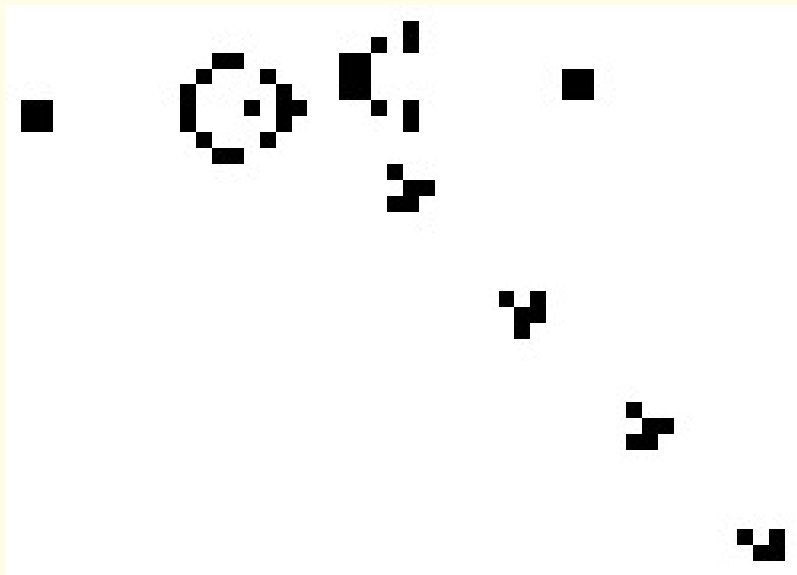
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



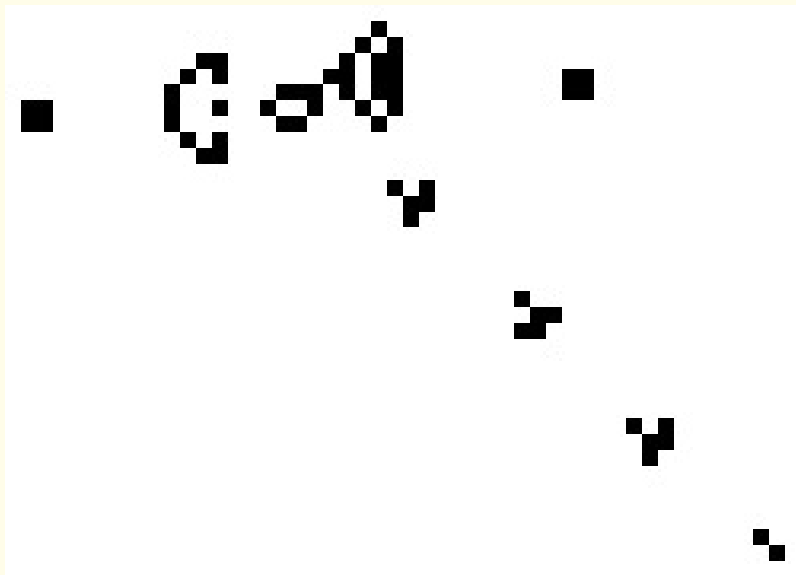
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



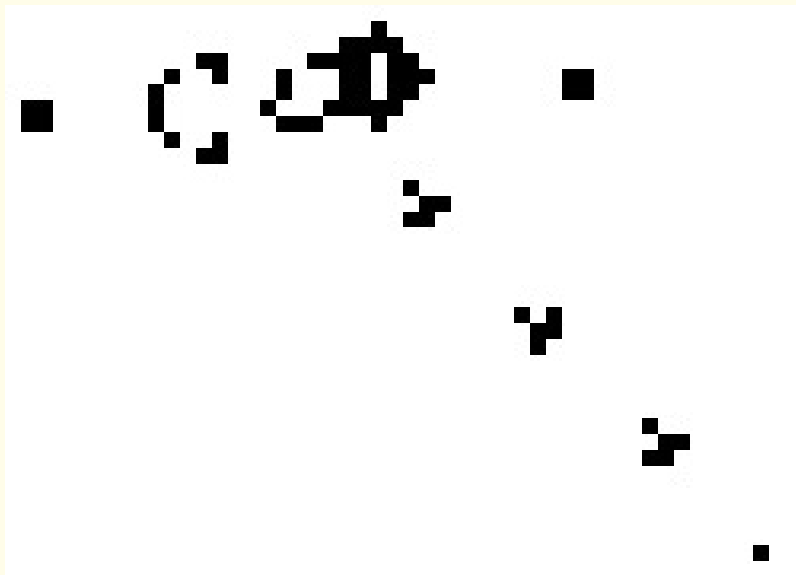
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



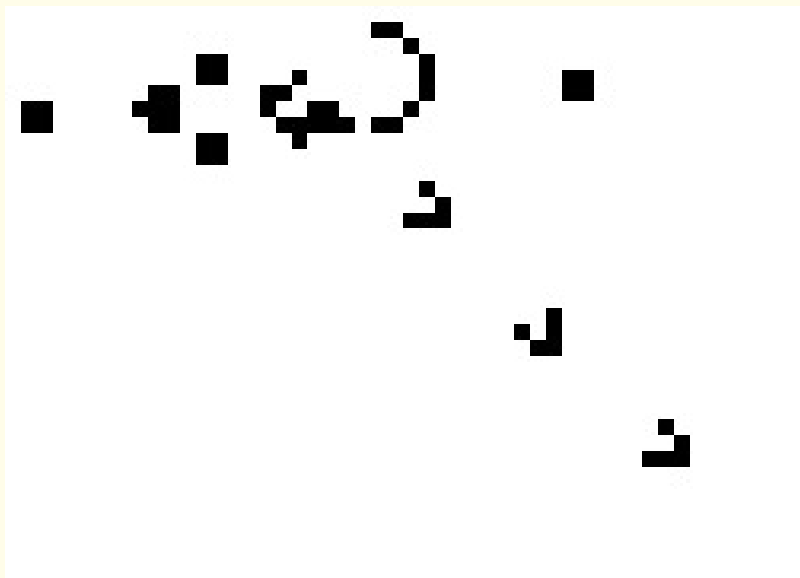
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



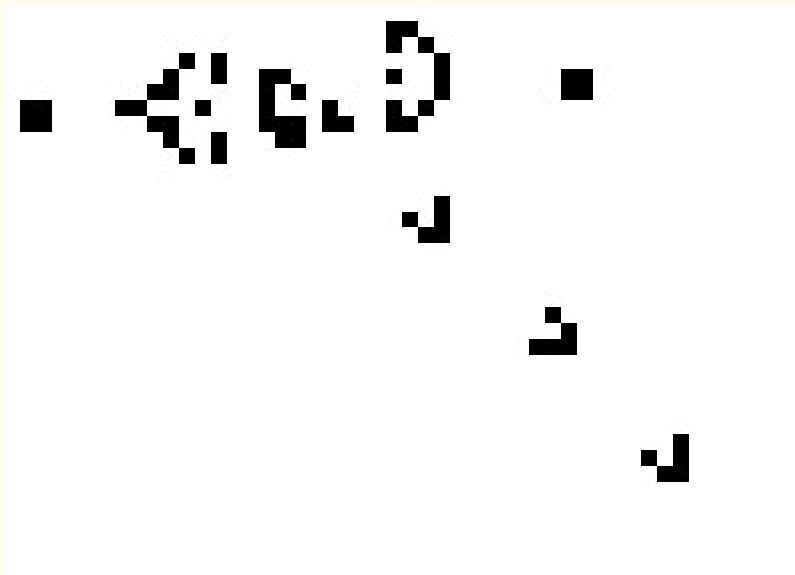
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



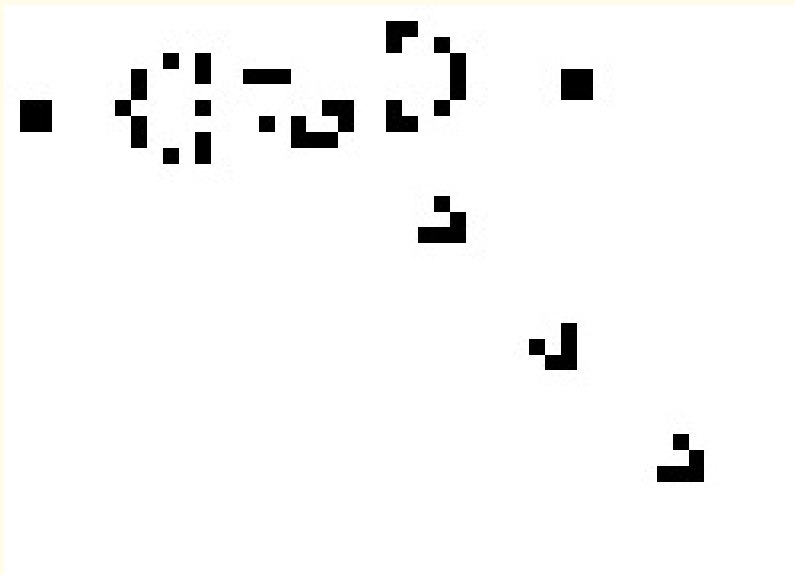
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



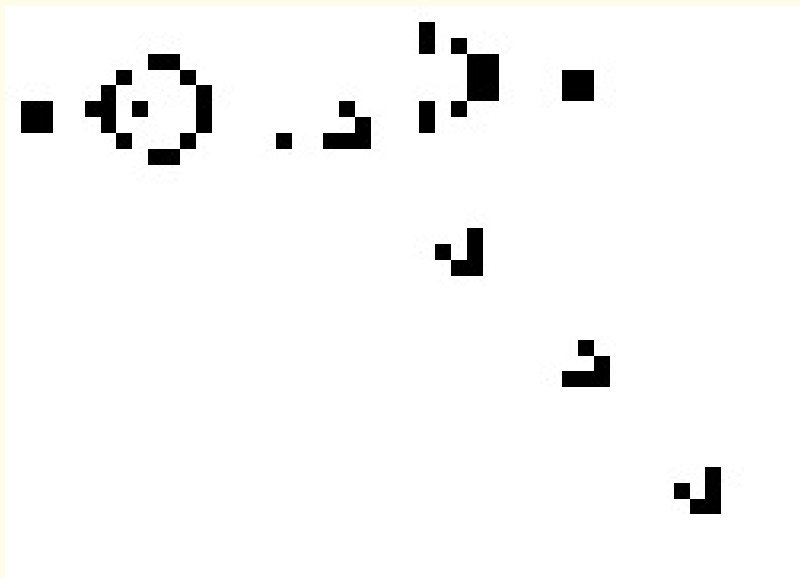
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



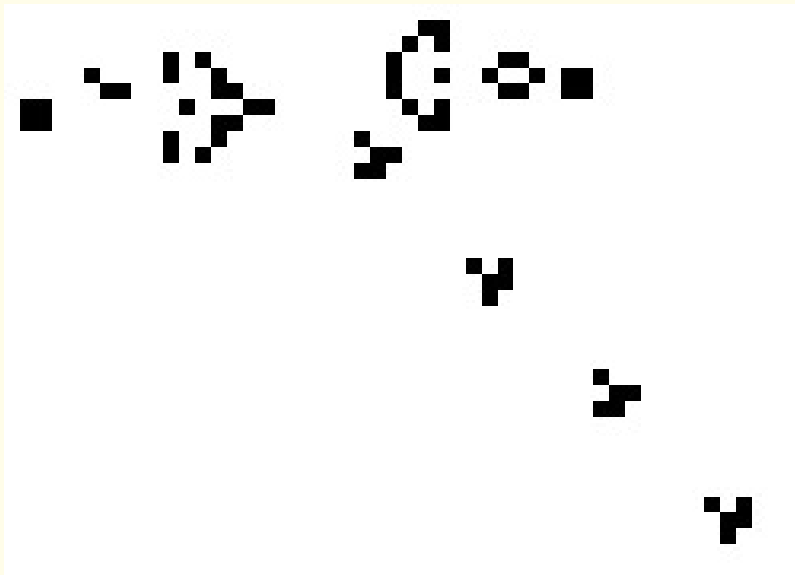
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



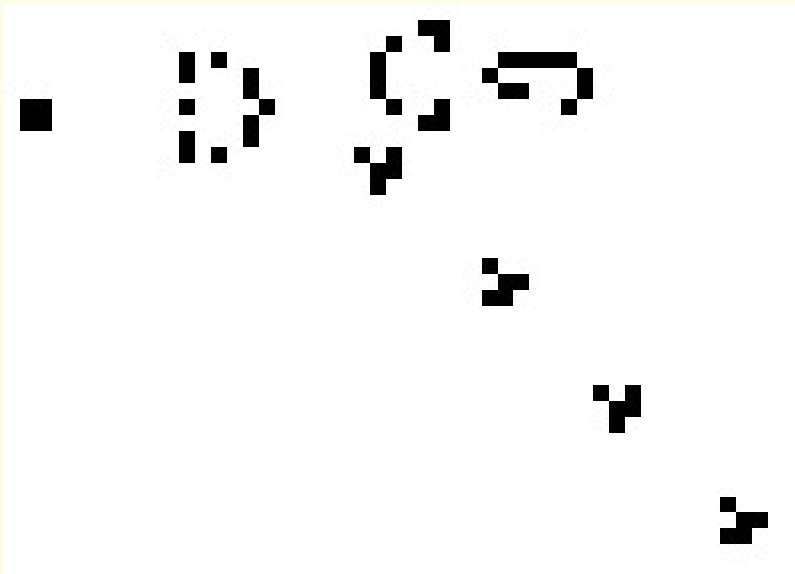
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



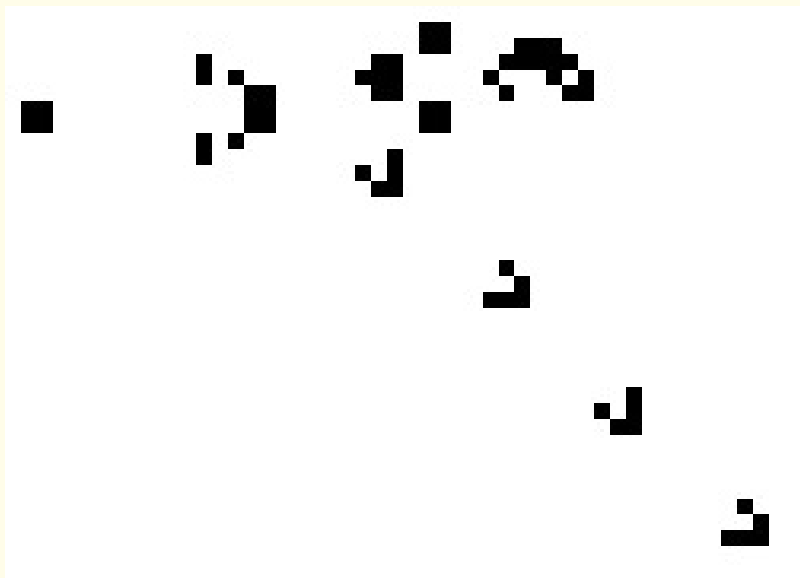
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



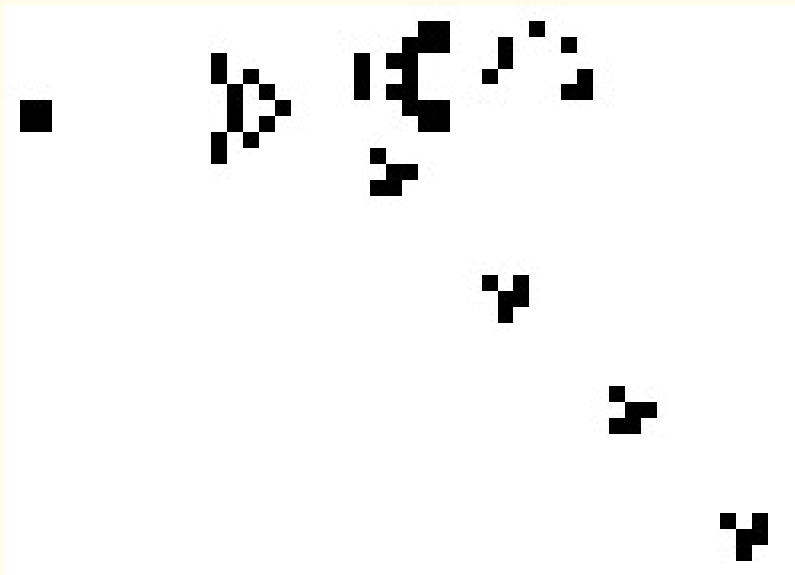
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



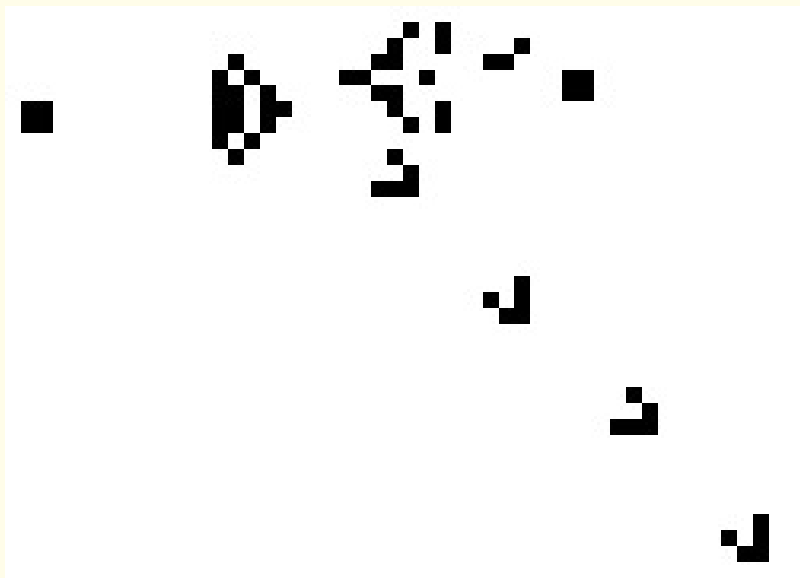
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



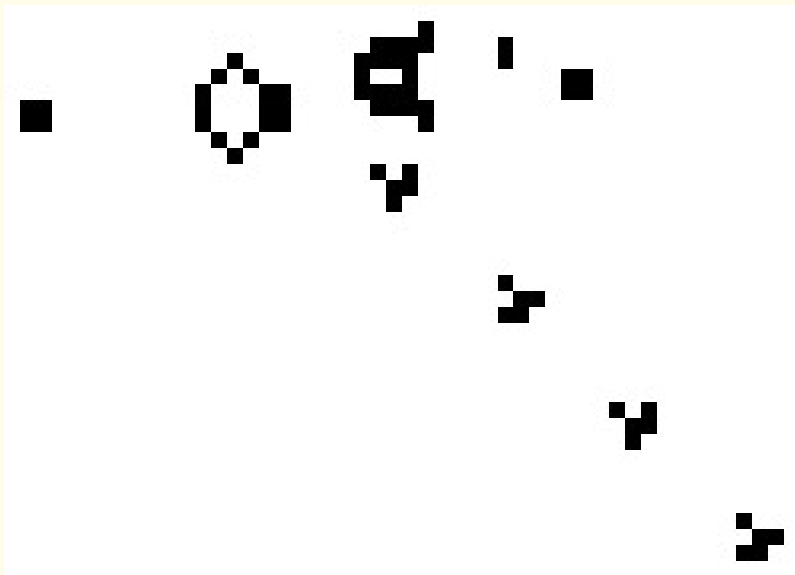
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



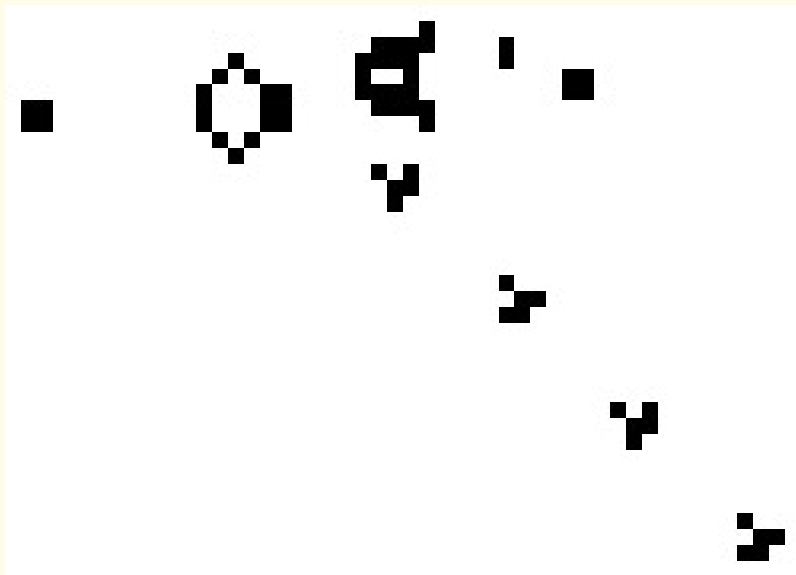
Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un motif peut-il se développer indéfiniment ?



Un prix de 50 dollars proposé par John Conway (1970) 45



et gagné par Bill Gosper

00

wikipedia.org

Canon à gliders de Bill Gosper (1970)

46



wikipedia



wikipedia

Bill Gosper (né en 1943) auteur d'un calcul record
de **17 millions de décimales de π en 1985**
grâce à une formule de Ramanujan (1910)

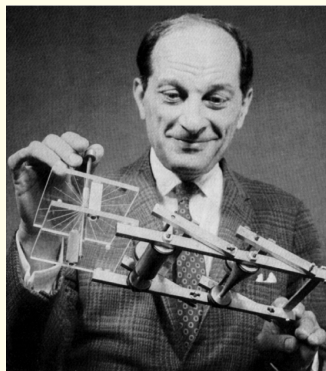
$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103+26390n}{(4 \times 99)^{4n}} \quad \text{démontrée seulement en... 1987 !}$$

Vie artificielle ?



wikipedia

John von Neumann
(1903 - 1957)



wikipedia

Stanislaw Ulam
(1909 - 1984)

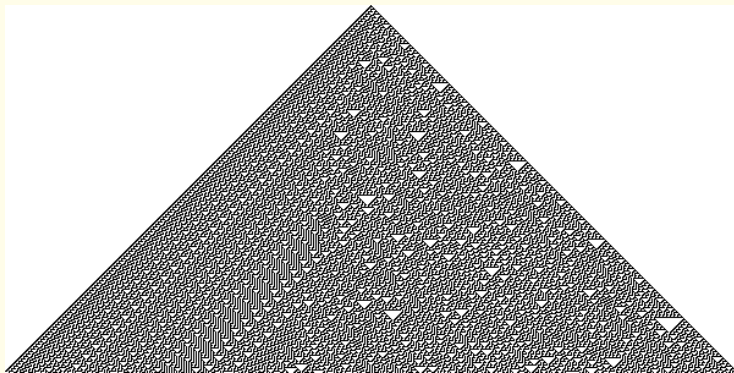
recherche d'une **machine** qui pourrait s'**auto-reproduire** (1940-1950)

John von Neumann *Theory of Self-Reproducing Automata*
Arthur Burks Editeur, University of Illinois Press, 1966

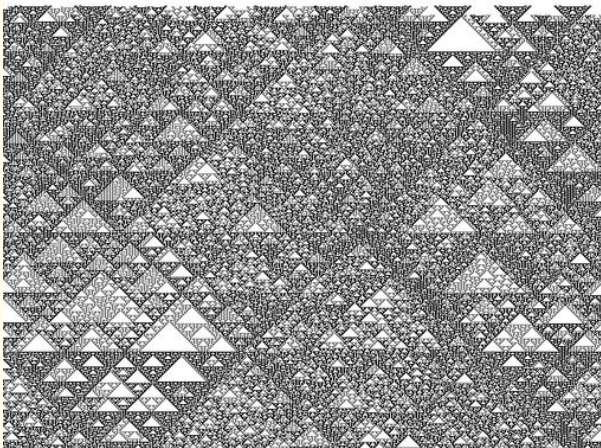
Automates cellulaires



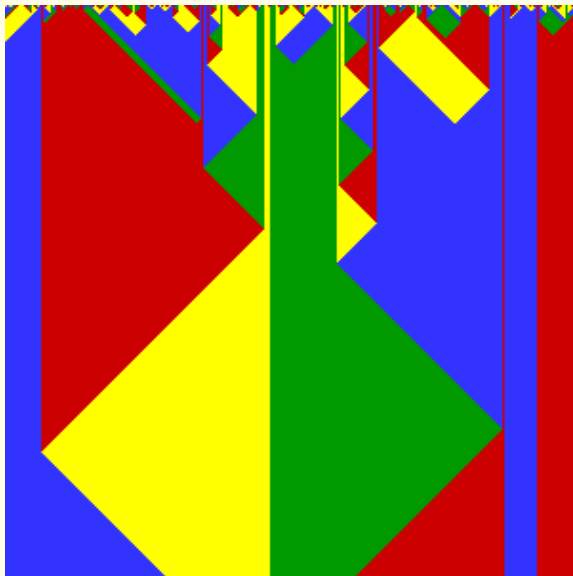
Automates cellulaires



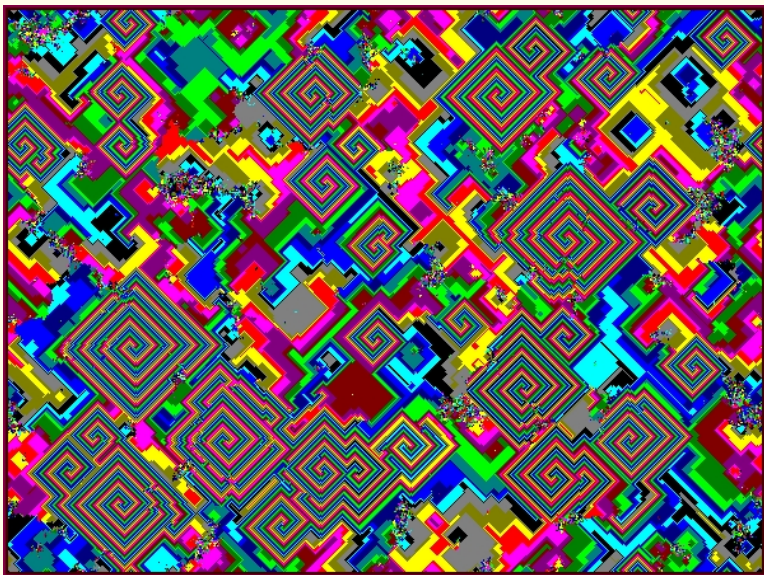
Automates cellulaires



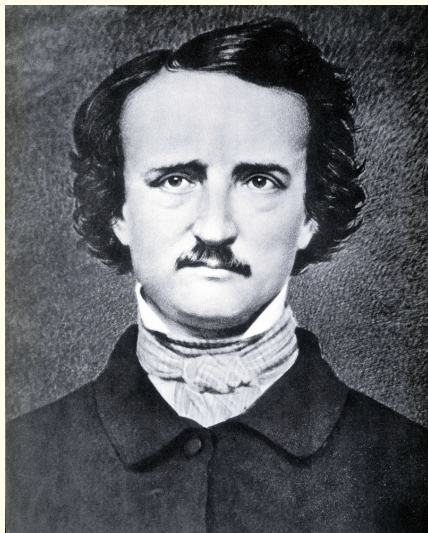
Automates cellulaires



Automates cellulaires

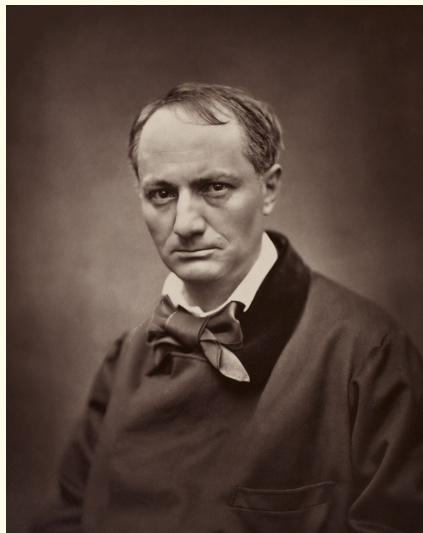


Automates ?



Edgar Poe
(1809 - 1849)

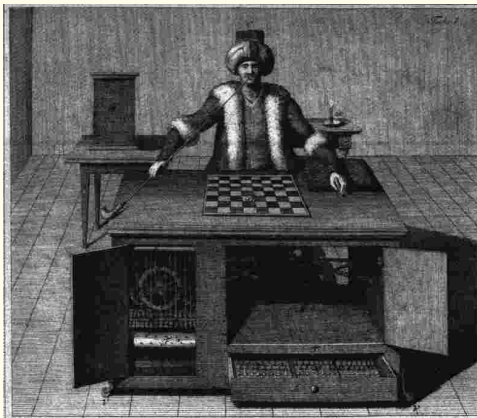
wikipedia



Charles Baudelaire
(1821 - 1867)

wikipedia

Automates ?



mjae.com

“Turc” [joueur d'échecs](#) de von Kempelen (1770)

Edgar Poe (1836) [et Charles Baudelaire, 1865]

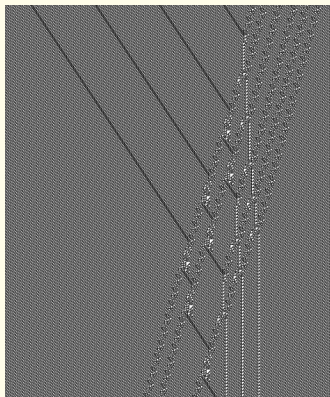
“Le joueur d'échecs de Maelzel”, *Histoires grotesques et sérieuses*

Automates !



nsc.uzh.ch

Matthew Cook (né en 1970)



Complex Systems, 2004

un **automate cellulaire** qui satisfait à la “règle 110”,
c’est à dire un cousin germain du jeu de la vie de Conway,
est une **machine de Turing** universelle

Matthew Cook (1998)

De la physique avec des bits !

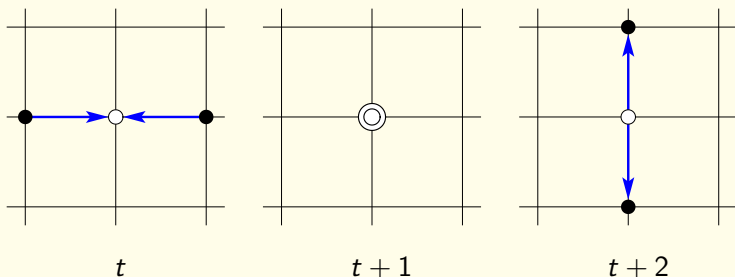
gaz sur réseau

donner une **vitesse** aux particules du jeu de la vie ?

première idée (Jean Hardy, Yves Pomeau, Olivier de Pazzis, 1973)

réseau carré à deux dimensions d'espace

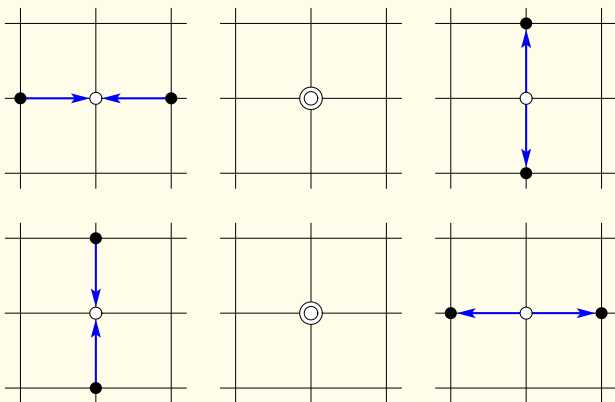
évolution du réseau : suivre le champ de vitesses !



dynamique d'une collision frontale

Jean Hardy, Yves Pomeau, Olivier de Pazzis (1973)

57



modèle **qualitativement correct** :

conservation de la masse et de l'impulsion

modèle **quantitativement inexact** :

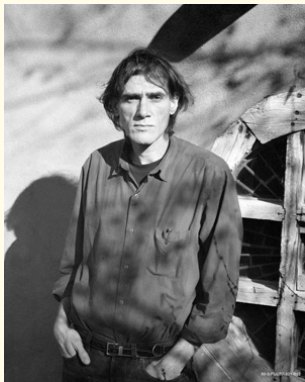
le "tenseur des pressions" n'est pas isotrope !

Uriel Frisch, Brosl Hasslacher, Yves Pomeau (1986)



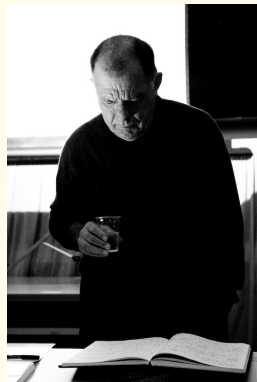
Uriel Frisch
(né en 1940)

www.flickr.com



Brosl Hasslacher
(1941 - 2005)

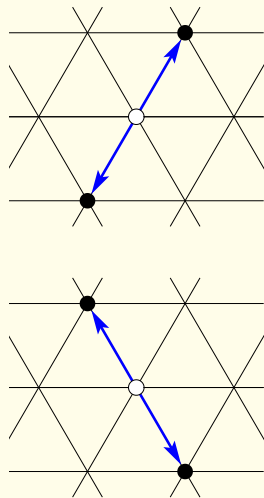
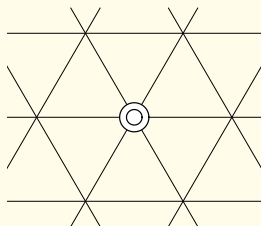
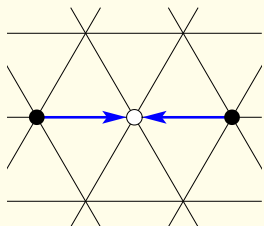
cnls.lanl.gov



Yves Pomeau
(né en 1942)

marc.monticelli.fr

Uriel Frisch, Brosl Hasslacher, Yves Pomeau (1986)



l'état final est tiré au hasard parmi les deux états possibles

Simulation numérique avec un gaz sur réseau

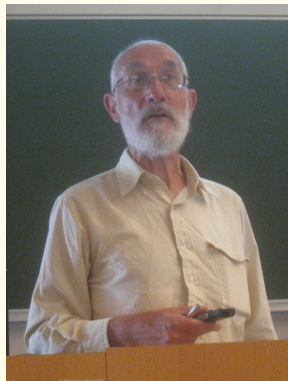
cas de deux dimensions d'espace (1985)



Dominique d'Humières
(né en 1949)



Yves Pomeau
(né en 1942)



Pierre Lallemand
(né en 1940)

Simulation numérique avec un gaz sur réseau

61

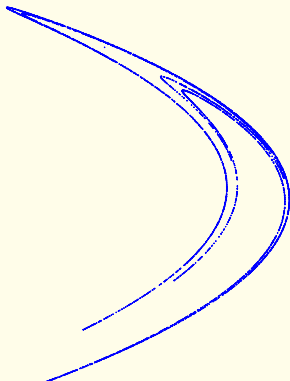
cas de **trois dimensions** d'espace (1986-1988)

conception du schéma : D. d'Humières, P. Lallemand, U. Frisch

simulation : J.-P. Rivet, M. Hénon, U. Frisch, D. d'Humières



Jean-Pierre Rivet
(né en 1964)
1.bp.blogspot.com



attracteur de Hénon (1976)

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= 1 + y_k - a x_k^2 \\y_{k+1} &= b x_k \\a &= 1,4; \quad b = 0,3 \\x_0 &= 1; \quad y_0 = 0\end{aligned}$$



Michel Hénon
(1931-2013)
espace-turing.fr

Simulation numérique à trois dimensions (1986-1988)

62

calcul des collisions particulièrement délicat
utilisation de l'ordinateur le plus puissant de l'époque



ordinateur **Cray 2** (1987-1993)

craysupercomputers.com

Simulation numérique avec un gaz sur réseau (1985)

1392

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 301, Série II, n° 20, 1985

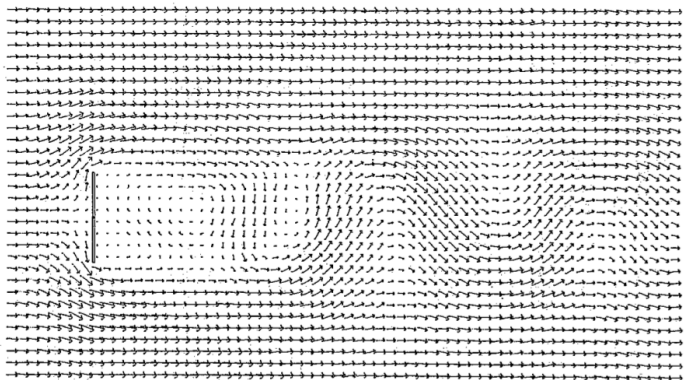
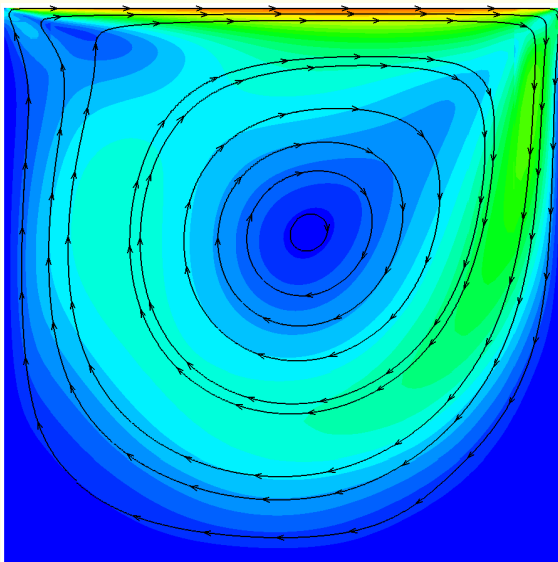


Fig. 1. — Écoulement autour d'une plaque mince pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 70, après 5000 pas de temps. Les flèches représentent la direction et le module du flux aux nœuds d'un maillage 64×32 .

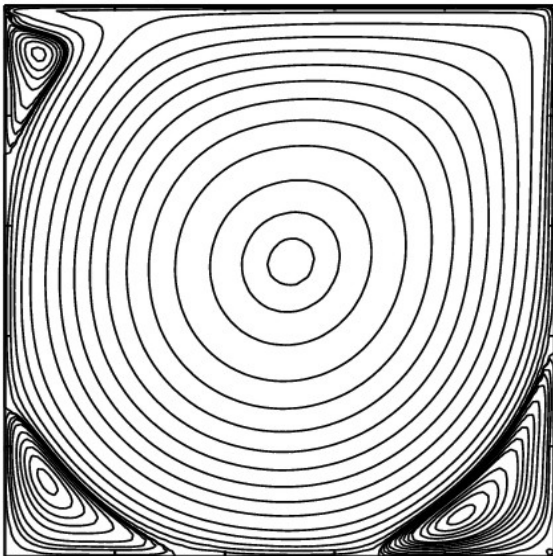
Simulation numérique d'une allée bidimensionnelle de
tourbillons de Kármán à l'aide d'un [gaz sur réseau](#)

Tourbillon numérique confiné



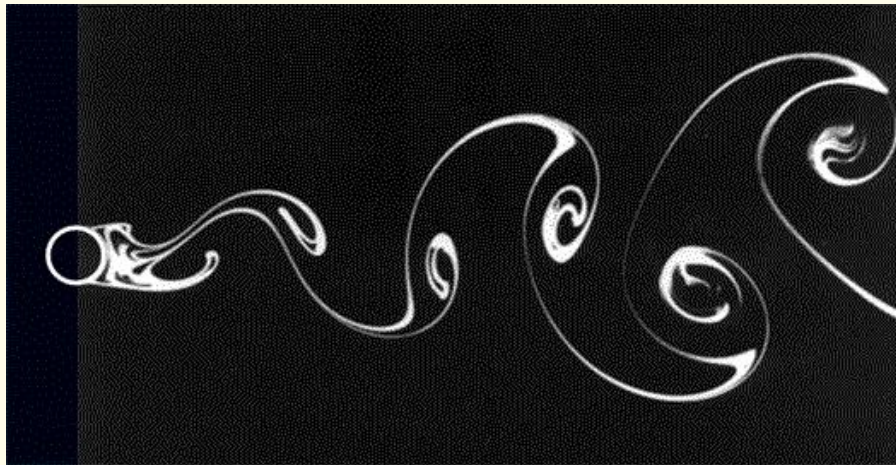
champ de vitesse et lignes de courant, $Re = 400$

Tourbillon numérique confiné



lignes de courant, $Re = 5\ 000$

Allée de tourbillons de Kármán derrière un cylindre



Milton Van Dyke (1922-2010)

An album of fluid motion, 1982

Tourbillons de bout d'aile d'un Boeing 777

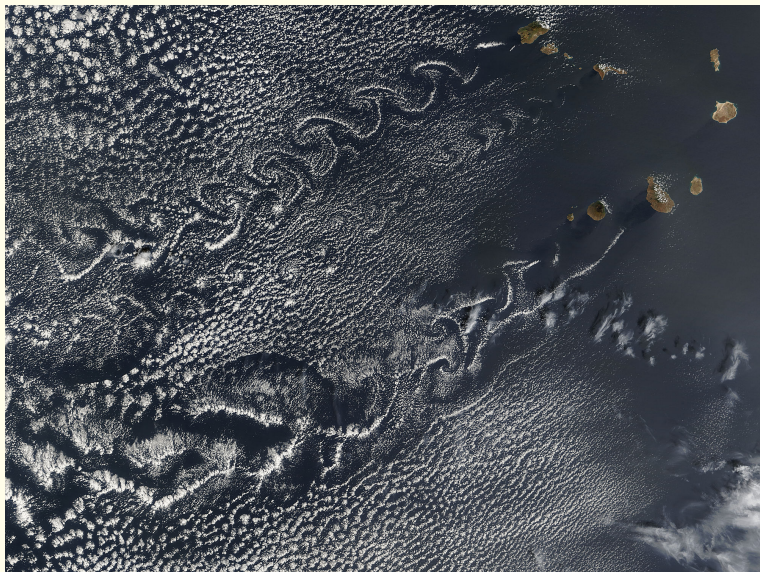
67



Boeing 777

eltamiz.com

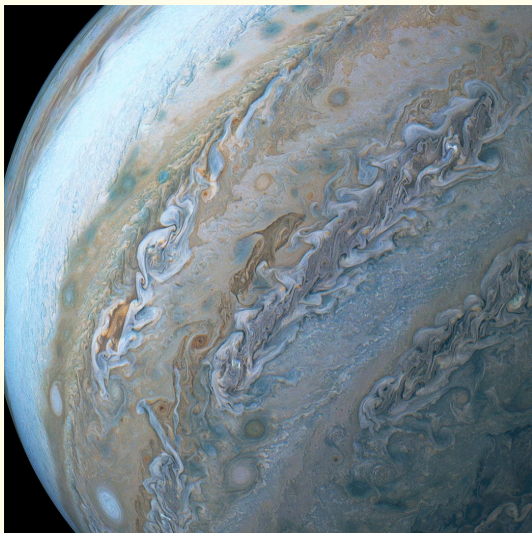
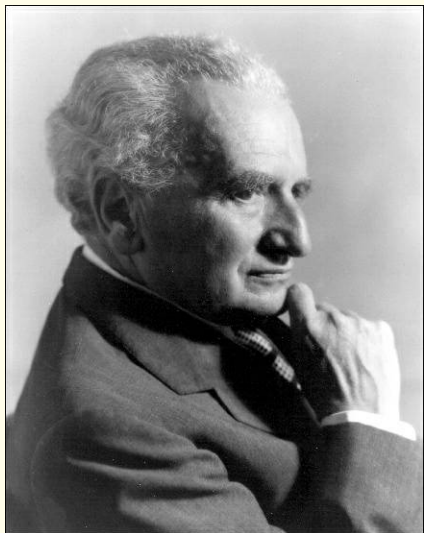
Tourbillons de Kármán induits par les Iles du Cap Vert 68



janvier 2005

visibleearth.nasa.gov

Allées de tourbillons de Kármán très perturbées



Théodore von Kármán (1881 - 1963)
allanellenberger.com

Jupiter, sonde Juno, novembre 2018
nasa.gov

Gaz sur réseau

70

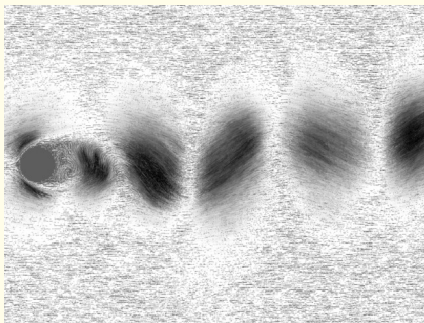
réseau **hexagonal** régulier pour deux dimensions d'espace

dynamique des collisions plus complexe

tirage au hasard

bruit intrinsèque !

limite **hydrodynamique** physiquement **correcte**



Anatoly Malevanets et Raymond Kapral, *Europhysics Letters*, 1998

Équation de Boltzmann (1872)

fin XIX^{ième} siècle : **théorie cinétique des gaz**

de Maxwell et Boltzmann

au point x à dx près et pour une vitesse v à dv près,

la masse dm de gaz présente au temps t :

$$dm = f(t, x, v) dx dv$$

$f(t, x, v)$: distribution de vitesse

évolution dynamique : équation de Boltzmann (1872)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0$$

moyenne en vitesse pour calculer les grandeurs fluides

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} f(v) dv, \quad \rho u = \int_{\mathbb{R}^3} v f(v) dv, \quad \rho E = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |v|^2 f(v) dv$$

Équation de Boltzmann : transport et collision

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f)$$

transport libre à la vitesse v terme de gauche $\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f$
 collisions au sein du gaz terme de droite $Q(f)$

gaz dilué : collisions binaires

$Q(f)$ fonction quadratique de la distribution f

analyse microscopique des collisions moléculaires

conservation de la **masse**, de l'**impulsion** et de l'**énergie**

conséquence macroscopique : $\int_{\mathbb{R}^3} Q(f)(1, v, \frac{1}{2} |v|^2)^t dv = 0$

injecter cette propriété dans l'équation de Boltzmann :

les grandeurs conservées $W = (\rho, \rho u_\alpha, \rho E)^t$

satisfont à des lois de conservation

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (F_k^\alpha(W)) = 0$$

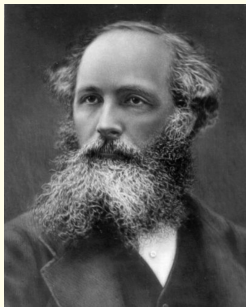
Équilibre thermodynamique de Maxwell - Boltzmann

distribution de vitesse à l'équilibre

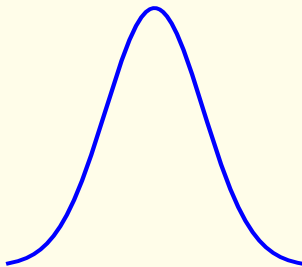
$$Q(f^{\text{eq}}) = 0$$

$$f^{\text{eq}}(v) = \rho \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{\beta}{2} |v - u|^2 \right), \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

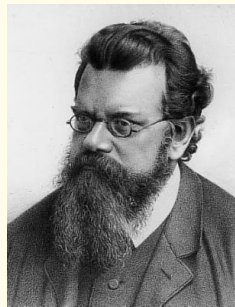
la température T apparaît comme paramètre
pour décrire la variance de la distribution de vitesse



James Clerk Maxwell
(1831 - 1879)



Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)



Ludwig Boltzmann
(1844 - 1906)

Développement de Chapman - Enskog (1915)

$$f(v) = f^{\text{eq}}(v) + \varepsilon f^1(v) + \dots$$



Sydney Chapman
(1888 - 1970)

www.npg.org.uk

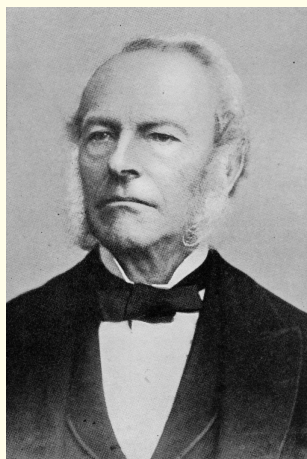


David Enskog
(1884 - 1947)

www.mech.kth.se

Équations de Navier - Stokes (1830)

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} [F_k^{\alpha}(W) + G_k^{\alpha}(W, \nabla W)] = 0$$



wikipedia

Claude Henri Navier
(1785 - 1836)

wikipedia

George Stokes
(1819 - 1903)

Approximation “BGK” (1954)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = -\frac{1}{\tau} (f - f^{\text{eq}})$$



Prabhu Lal Bhatnagar
(1912 - 1976)

math.iisc.ernet.in



Eugene Gross
(1926 - 1991)

alchetron.com



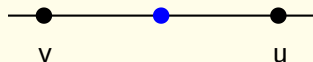
Max Krook
(1913 - 1985)

[wikipedia](https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Krook)

Approximation par discrétisation des vitesses (1957)

77

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = v^2 - u^2, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = u^2 - v^2$$



Torsten Carleman (1892-1949)

ro.wikipedia.org

Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz

Institut Mittag-Leffler, Stockholm, 1957

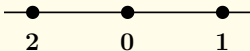
Vitesses discrètes (1964, 1969)

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \cdot \nabla_x f_i = Q_i(f_0, f_1, \dots, f_{q-1}), \quad 0 \leq i < q$$

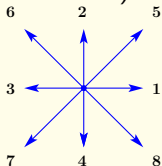


James Broadwell
(1921-2018)

www.nae.edu



Renée Gatignol
(née en 1939)



Henri Cabannes
(1923 - 2016)

ljll.math.upmc.fr

Mathématiques françaises pour Boltzmann (1985)

79

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0$$



François Golse
(né en 1962)



Benoît Perthame
(né en 1959)



Rémi Sentis
(née en 1949)

cmls.polytechnique.fr

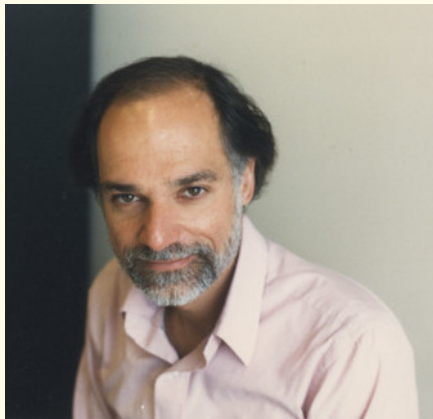
ljll.math.upmc.fr

questions.aleteia.org

Mathématiques de l'équation de Boltzmann (1989)

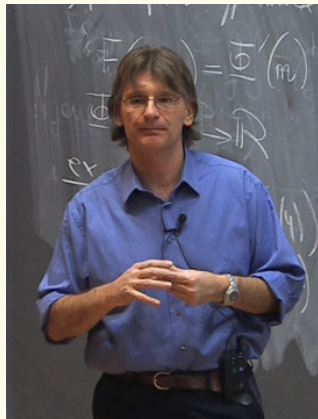
80

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0$$



Ronald Diperna
(1947 - 1989)

wikipedia, photo Georges Bergman



Pierre-Louis Lions
(né en 1956)

college-de-france.fr

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0$$



Cédric Villani
(né en 1973)

wikipedia



Isabelle Gallagher
(née en 1973)

wikipedia



Laure Saint-Raymond
(née en 1975)

lejournal.cnrs.fr

équation de Boltzmann discrète



Francisco Higuera
(né en 1957)



Sauro Succi
(né en 1954)



Roberto Benzi
(né en 1952)

Schémas de Boltzmann sur réseau

vitesses discrètes contraintes par la géométrie du réseau discret
 pour tout site x du réseau, pour toute vitesse v_i
 cohérence entre positions, vitesses et pas de temps Δt
 $x + v_i \Delta t$ est encore un site du réseau

population au temps t : $f_i(x, t)$, $1 \leq i < q$
 sur un site x du réseau, pour la vitesse v_i

distribution d'équilibre $f_i^{\text{eq}}(x, t)$

opérateur de collision discret

$$Q_i(f)(x, t) = \sum_{j=0}^{q-1} S_{ij} (f_j - f_j^{\text{eq}})(x, t)$$

équation de Boltzmann discrète

entre les instants t et $t + \Delta t$

$$f_i(x + v_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) + Q_i(f)(x, t)$$

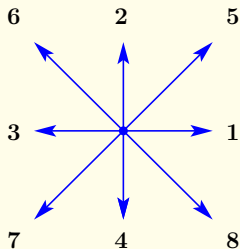


Schéma de Boltzmann sur réseau D1Q3

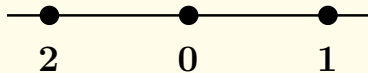


Schéma de Boltzmann sur réseau D2Q9

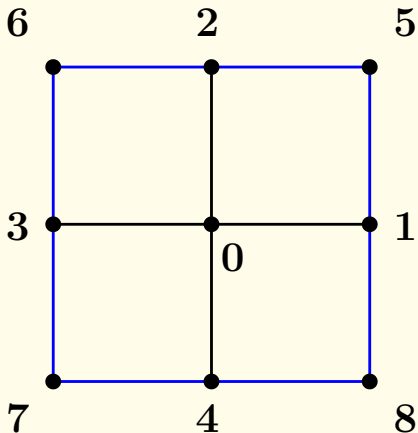


Schéma de Boltzmann sur réseau D3Q19

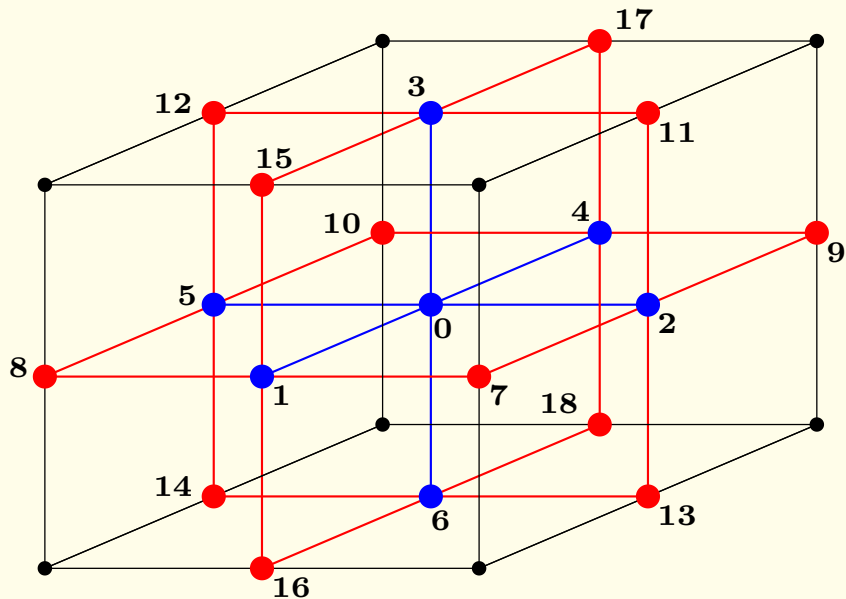
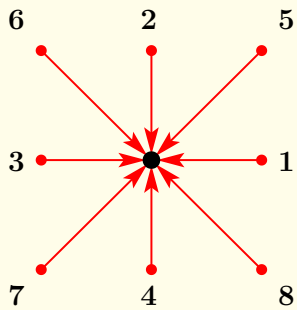


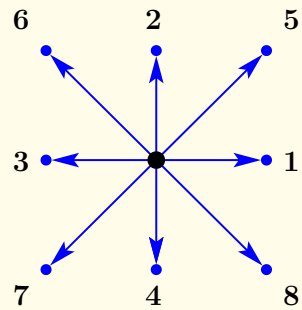
Schéma de Boltzmann sur réseau



advection



collision



advection

Schéma de Boltzmann sur réseau

$$f_i(x + v_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) + Q_i(f)(x, t), 0 \leq i < q$$

méthode de calcul numérique

pour approcher des équations macroscopiques
avec une formule algébrique **explicite**

- ;-) précise : **advection parfaite** pour les vitesses du réseau
simple, temps réduit pour le maillage
très performante avec les processeurs graphiques

processeur Nvidia



- ;-) difficulté pour satisfaire la conservation de l'énergie
quelle convergence mathématique
si l'échelle de discrétisation Δt tend vers zéro ?
stabilité souvent réglée de façon **empirique**

Stabilité, ou... le diable se loge dans les détails !

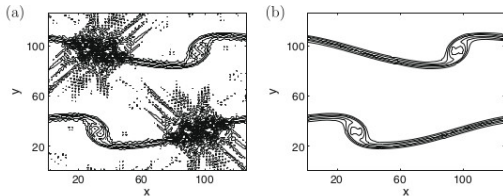
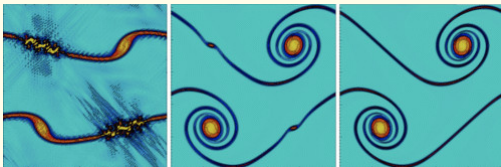


Fig. 10. $[\Omega]$ isocountours from 0.002 to 0.02 by step of 0.003 at timestep $t = 3300$. (a) Standard LBE-BGK model; (b) LBE-MRT model.

D. Ricot, S. Marié, P. Sagaut, C. Bailly

(*Journal of Computational Physics*, 2009)



S. Hosseini, N. Darabiha, D. Thévenin (*Physical Review E*, 2019)

Macroscopique, mésoscopique, microscopique

90

trois échelles possibles pour représenter la nature



macroscopique

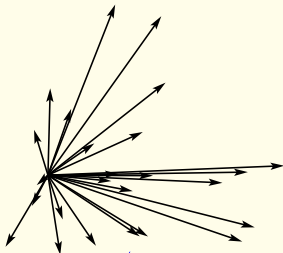
champ de vitesse

équations de Navier-Stokes

différences finies, volumes finis

schéma de Boltzmann sur réseau

gaz sur réseau

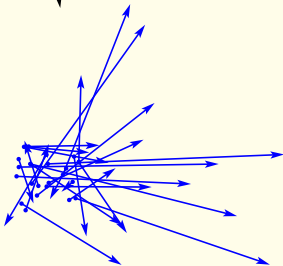


mésoscopique

distribution de vitesses en chaque point

équation de Boltzmann

méthodes particulières

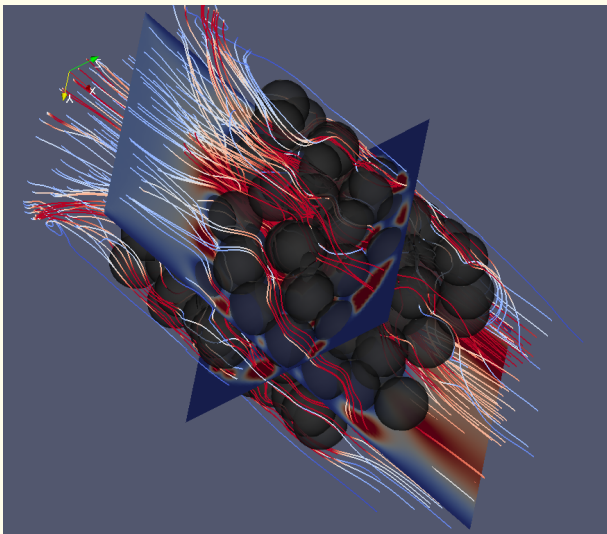


microscopique

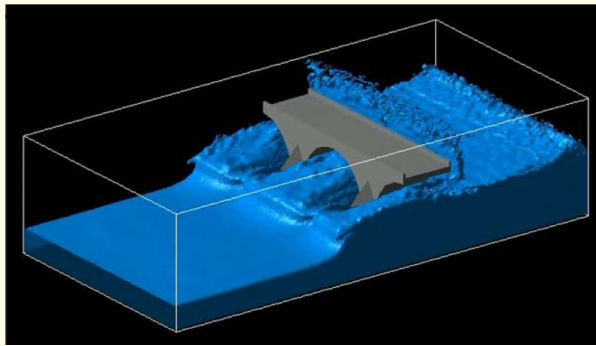
point "éclaté", hypothèse atomique

dynamique moléculaire

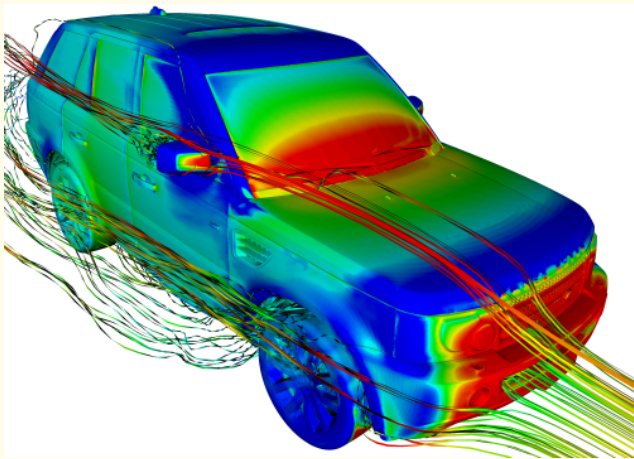
Écoulements dans les milieux poreux



Mécanique des fluides numérique pour le génie civil



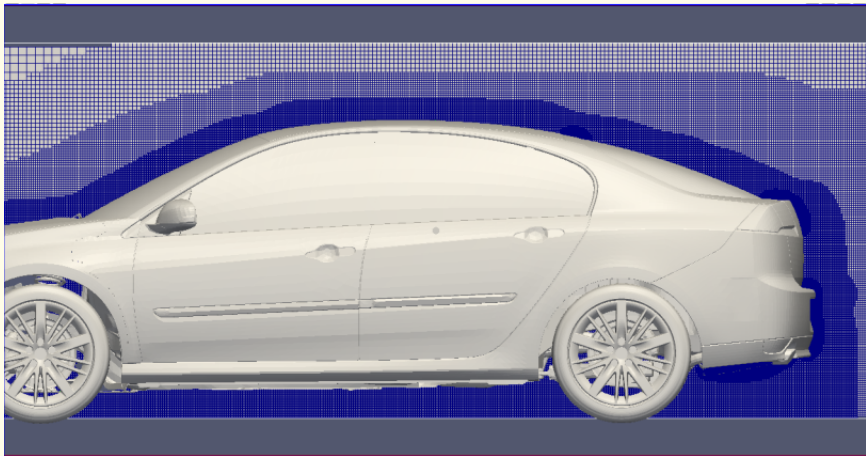
Aérodynamique automobile



www.prweb.com

Logiciel "Powerflow" de la société EXA (Boston, USA)

LaBS-ProLB : aérodynamique (Renault, 2013)



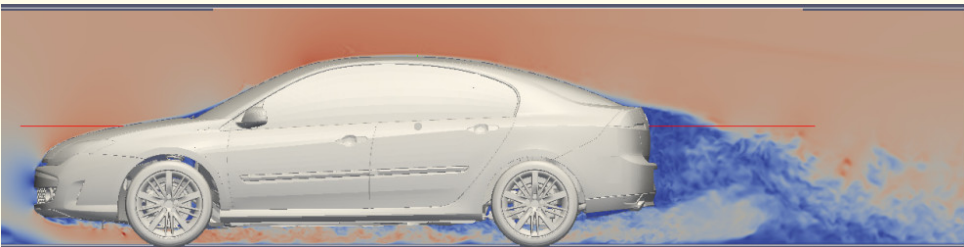
lyoncalcul.univ-lyon1.fr

186 surfaces qui génèrent 2,3 millions de triangles

10 niveaux de maillage, taille de la maille la plus petite : 1,25 mm

88,6 millions de mailles, 300 000 itérations en temps

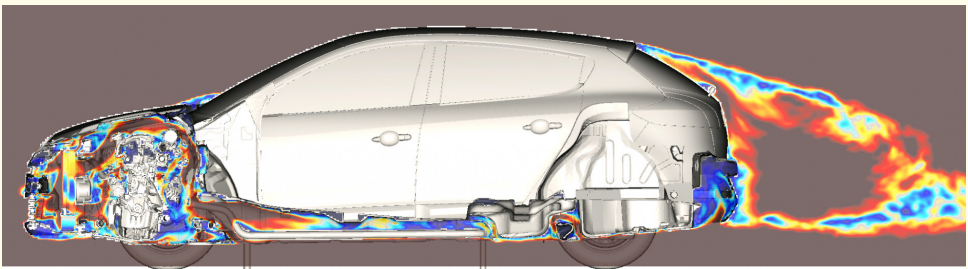
LaBS-ProLB : aérodynamique (Renault, 2013)



vitesse instantanée

m2p2.fr

LaBS-ProLB : aérodynamique (Renault, 2013)



avec l'écoulement dans le moteur

m2p2.fr

Soufflerie aérodynamique ou soufflerie numérique ?

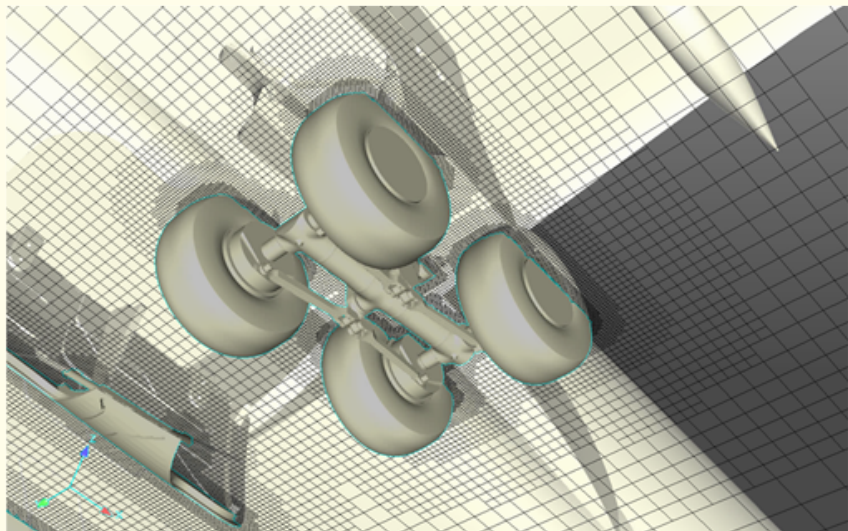


www.soufflerie2a.com



static.techspot.com

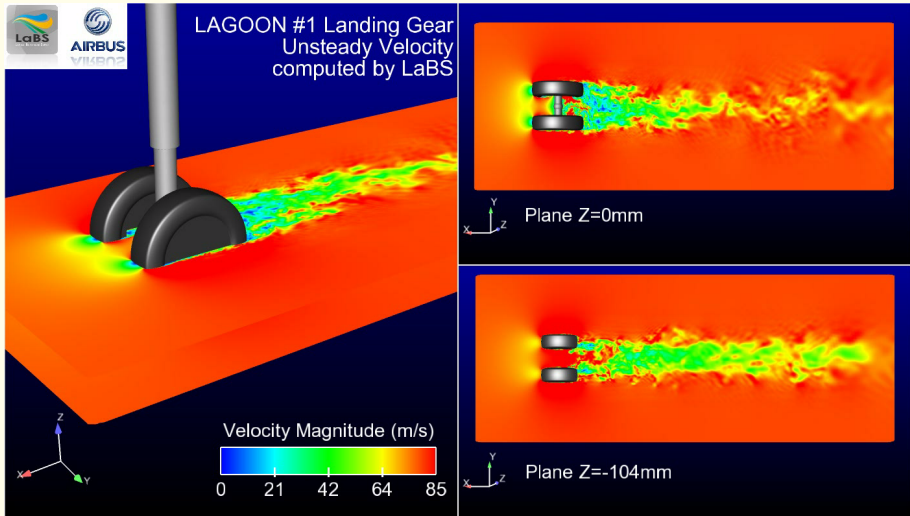
LaBS-ProLB : train d'atterrissage (Airbus, 2013)

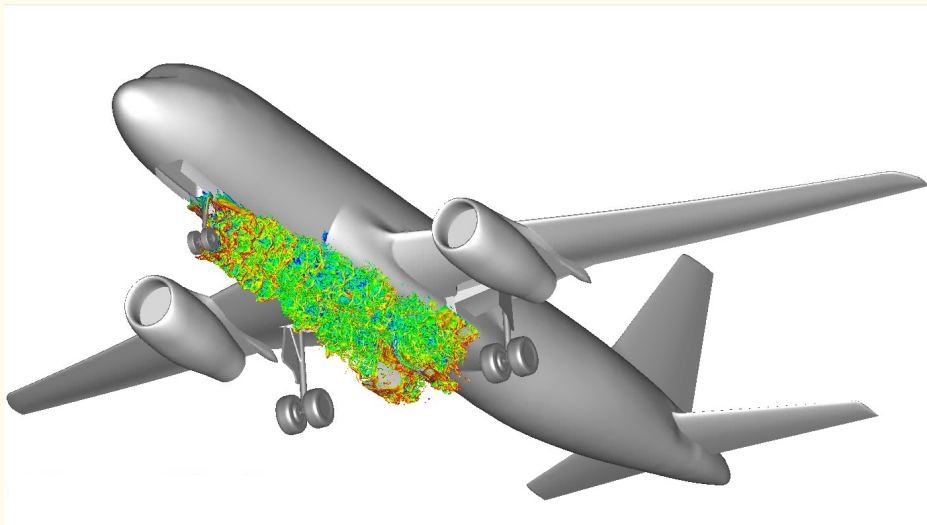


maillage

prolb-cfd.com

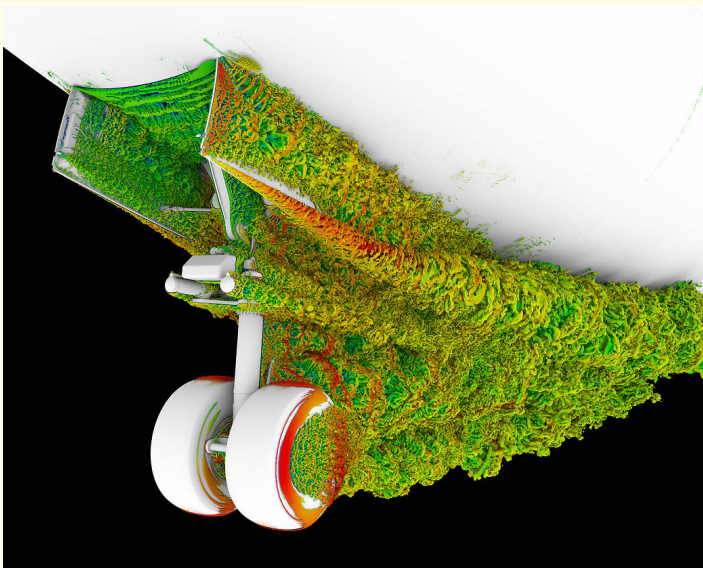
LaBS-ProLB : train d'atterrissage (Airbus, 2013)





train d'atterrissage d'un Airbus

Logiciel Powerflow de la société Exa (2017)



“lichen tourbillonnaire” sous le Boeing 777

Logiciel Powerflow de la société Exa



Hudong Chen (en 2008)

Merci de votre attention !

103



Saint Sulpice, 25 mai 2019