Les MOTS font des MATHS

Brève Incursion dans la Combinatoire des Mots

KAFEMATH

26-09-2019

Présentation de la *Combinatoire des Mots*

1	Un peu de Vocabulaire sur les Mots
2	Quelques Mots, Finis ou Infinis
3	Problèmes de Mots, Problèmes de Maths
4	Jeux de Mots, Jeux de Maths

PRÉSENTATION de la COMBINATOIRE des MOTS

Quelques caractéristiques de la *Combinatoire des Mots*

Le domaine mathématique qui étudie les « mots » et les « langages » formels,

la ***Combinatoire des Mots***,

bien qu'assez ancien, a pris beaucoup d'ampleur depuis les années 50 ...

Ah ! Les mots, qui tous dans nos cerveaux turbinent,

De nos pensées sont le moteur et l'essence,

Et par leurs lettres, en matheux, se combinent,

Gagnant l'infini avec effervescence !

L'objet de base en est le ***mot***, c'est-à-dire une suite, *finie* ou *infinie*, d'éléments d'un ensemble *fini*, appelés ***caractères*** ou ***lettres***.

La combinatoire des mots fait partie des ***mathématiques discrètes non commutatives***.
Beaucoup de ses problèmes ont un aspect ***algorithmique***, d'où le lien étroit avec l'***informatique*** et, en particulier, avec la théorie des ***automates***.

<u>Les domaines mathématiques liés à la Combinatoire des Mots</u> (*) :

Combinatoire des Mots

Théorie des Probabilités

Théorie des Nombres

Géométrie Discrète

Systèmes Dynamiques Discrets
Topologie,
Physique Théorique.

Informatique Théorique
Algorithmique,
Théorie des Automates,
Calculabilité,
Théorie des Codes.

Biologie
Séquençage de l'ADN.

Algèbre
Groupes Libres,
Semi-Groupes,
Matrices,
Représentations,
Problème de Burnside.

Logique
Algèbre de Boole

(*) D'après Amy Glen, ''Palindromic properties of infinite words with applications to Number Theory''

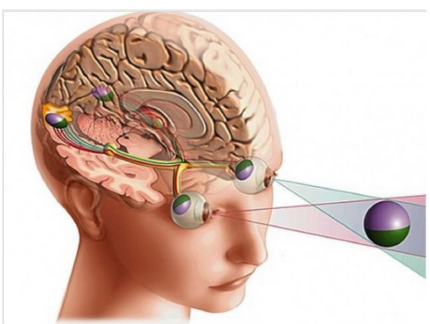
Pourquoi la combinatoire des mots est-elle attrayante ?

Pour ses problèmes, bien sûr, qui remuent les méninges.

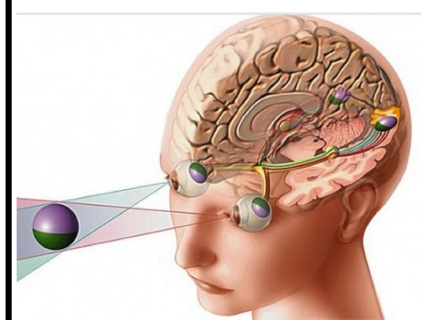
Mais aussi …

... parce que les questions qu’elle pose traduisent bien l’esprit dans lequel Axel THUE avait réalisé son travail de pionnier :

la ***recherche***, la ***compréhension*** et le ***savoir*** pour le ***plaisir***.



Cette présentation donne un petit aperçu des attraits de la combinatoire des mots, propre à occuper vos longues soirées d’hiver…



1 Un peu de Vocabulaire sur les Mots

1-1) Qu’est-ce qu’un Mot ? Opérations sur les Mots

► Un **alphabet** **A** est un ensemble (en général *fini*) dont les éléments sont des **lettres** : A={0,1}, A={a,b,c, …, z}, le code ASCII, etc, sont des alphabets.

► L’ensemble **A⁺** est l’ensemble des **mots non vides** qu’on peut former partir des lettres d’un alphabet **A**.

A	1000001	N	1001110
B	1000010	O	1001111
C	1000011	P	1010000
D	1000100	Q	1010001
E	1000101	R	1010010
F	1000110	S	1010011
G	1000111	T	1010100
H	1001000	U	1010101
I	1001001	V	1010110
J	1001010	W	1010111
K	1001011	X	1011000
L	1001100	Y	1011001
M	1001101	Z	1011010

Un ensemble de mots parmi d’autres, le Code ASCII [(1)] (ici, binaire)

(1) **A**merican **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange

► Longueur d'un Mot

La **longueur** d'un mot **m** est le nombre **|m|** de caractères *juxtaposés* de l'alphabet **A** qu'il contient.

Exemple :

Mots de longueur |**m**|=1, 2 ou 3 sur l'alphabet **A** = {a,b,c} de **n**=3 lettres :

|m| = 1 : **a**, **b**, **c** (n^m = **3**^{1} = 3 mots)

|m| = 2 : **aa**, **ab**, **ac**, **ba**, **bb**, **bc**, **ca**, **cb**, **cc** (n^m = **3**^{2} = 9 mots),

|m| = 3 : **aaa**, **aab**, **aac**, **aba**, **abb**, **abc**, **aca**, **acb**, **acc**,

baa, **bab**, **bac**, **bba**, **bbb**, **bbc**, **bca**, **bcb**, **bcc**,

caa, **cab**, **cac**, **cba**, **cbb**, **cbc**, **cca**, **ccb**, **ccc** (n^m = **3**^{3} = 27 mots).

Remarque :

Le nombre de mots **m** de longueur **|m|** sur un alphabet de **n** lettres correspond au nombre **n^m** d'applications d'un ensemble E à **m** éléments dans un ensemble F à **n** éléments.

La liste des mots de longueur

|m|>0

sur un alphabet de **n** éléments

se représente par un

arbre exponentiel

à **n^m** branches.

Exemple :

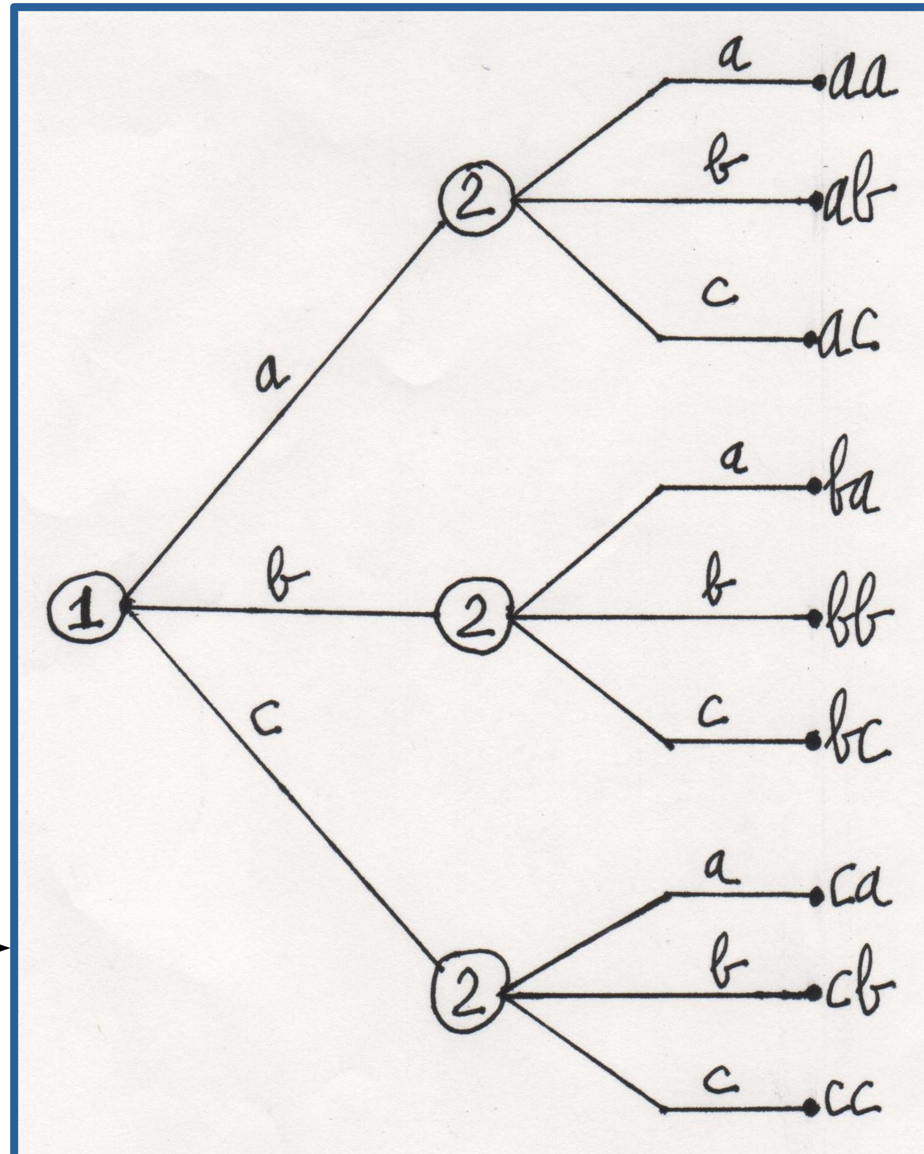
Arbre exponentiel des

n^m = 3^2 = 9

mots de longueur **|m|**=2

sur un alphabet de

n=3 lettres



► Le Mot Vide

- Il existe dans **A^+** un *unique* **mot vide**, noté **e_A**, ou **e**, qui joue le rôle d'*élément neutre* dans la *composition* des mots par concaténation :

$$\boxed{\mathbf{me = em = m}}$$

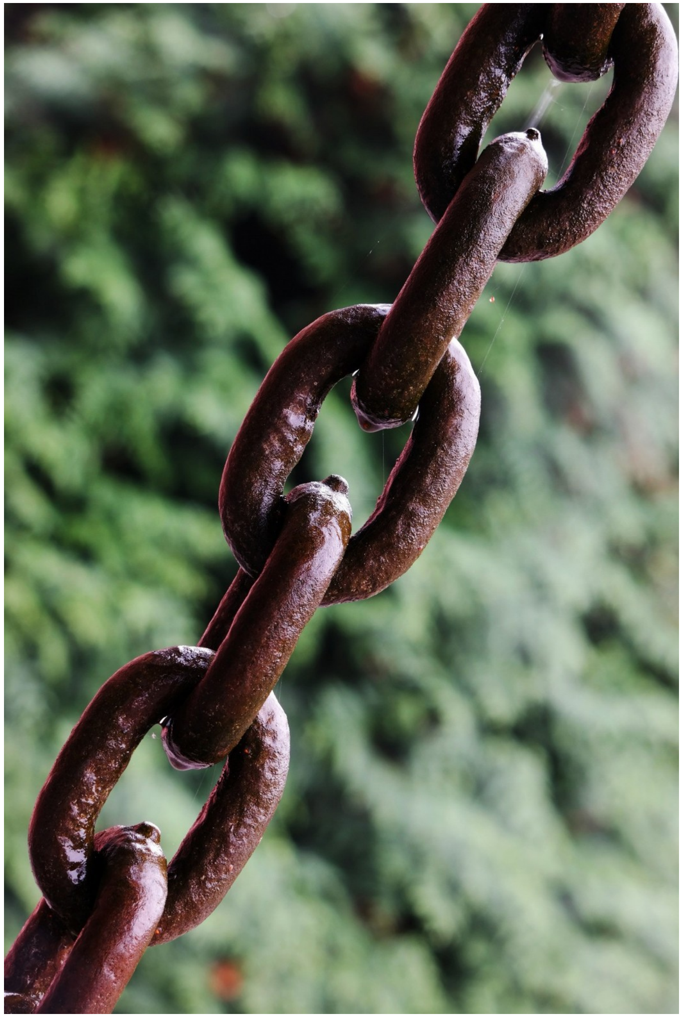
La longueur du mot vide est : $|e| = \mathbf{0}$

- l'ensemble des **mots** *non vides* « augmenté » du mot vide :

$$A^+ \cup \{e\}$$

est noté **A^*** (A *étoile*).

▸ Loi de Composition interne sur l'ensemble des Mots



La principale opération sur les mots de **A$^+$**

est la **concaténation**.

Si **m** est un *mot* de **A$^+$** et **a** une *lettre* de l'alphabet **A**, alors :

ma et **am**

sont les ***produits*** de la **concaténation**
de **m** et de **a**,
obtenus par la *juxtaposition*
des lettres du mot **m** et de la lettre **a**.

Quelques exemples de *concaténation* ...

Exemples de mots obtenus par concaténation :

i) L'ensemble des mots composés de **p** occurrences de la lettre **a**, quand **p** est un nombre *premier* :

{aa, aaa, aaaaa, aaaaaaa, aaaaaaaaaaa, aaaaaaaaaaaaa, ...}

ii) L'ensemble des mots de longueur |**m**|≤**2** sur l'alphabet A*={a,b,c}* :

{**e**, **a**, **b**, **c**, **aa**, **ab**, **ac**, **ba**, **bb**, **bc**, **ca**, **cb**, **cc**}

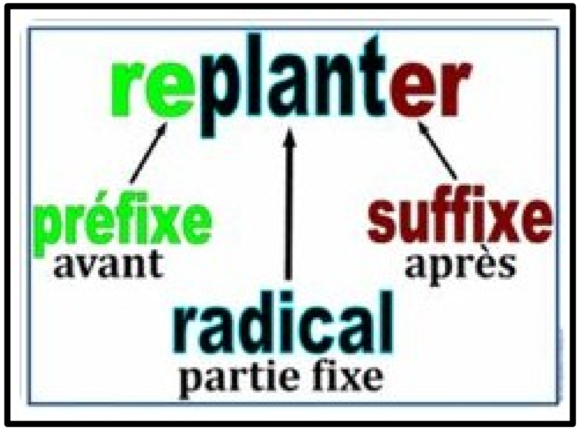
iii) L'ensemble des mots commençant par *n* lettres **a**, suivies de *n* lettres **b**, sous-ensemble de A*={a,b}* :

{**e**, **ab**, **aabb**, **aaabbb**, **aaaabbbb**, **aaaaabbbbb**, …}

Remarque :

L'ensemble des mots A*, formés par concaténation des lettres de l'alphabet fini A, est **dénombrable**.

▶ # Facteurs : Préfixe, Suffixe et Sous-Mot



Un **facteur** d'un mot **m** est un « constituant » de **m** pour la concaténation ...

Exemples :

a) Prenons trois mots $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ et **u** de A*.
Alors, dans le mot :

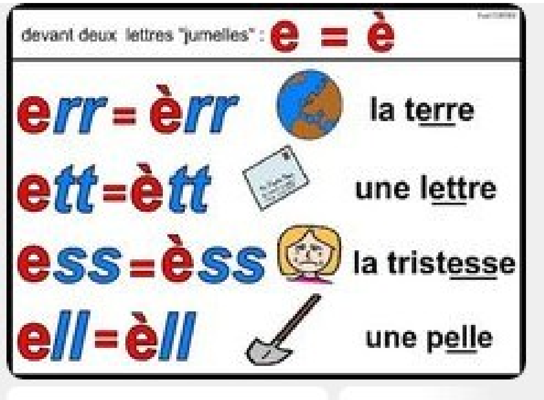
$$\mathbf{m} = \mathbf{v_1 u v_2}$$

$\mathbf{v_1}$ est le **facteur *gauche*** ou **préfixe** de **m** et de $\mathbf{v_1 u}$,

et

$\mathbf{v_2}$ est le **facteur *droit*** ou **suffixe** de **m** et de $\mathbf{u v_2}$.

Les mots $\mathbf{v_1}$, **u**, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_1 u}$, $\mathbf{u v_2}$ sont des **facteurs** du mot **m**.



b) Dans le mot

$$\mathbf{m} = u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots u_n v_n u_{n+1},$$

les mots $\mathbf{u_i}$, $\mathbf{v_i}$ et $\mathbf{u_i v_i}$ (i=1,…,n+1) sont des **facteurs** du mot **m**.

Les notions « combinatoires » de **préfixe** et de **suffixe** englobent celles des linguistes.

Exemple 1 : Tout le monde s'accorde à dire que **a** est un

préfixe de **amonceler**.

Mais en combinatoire des mots, comme en informatique, il en va de même pour **amon** et **amoncel**.

De même, pour un linguiste, **ule** est un suffixe de **groupuscule**.

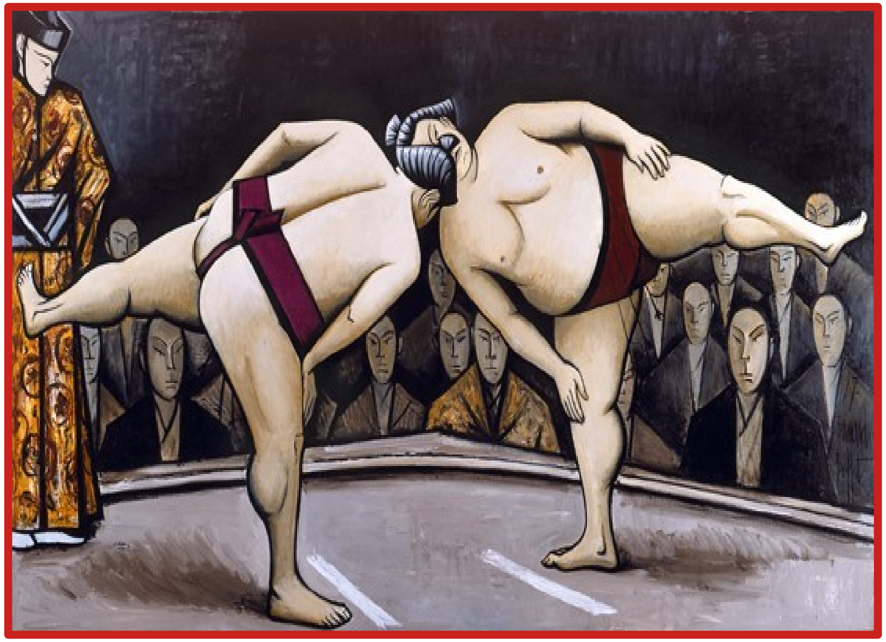
Mais un informaticien considère que **puscule** en est un aussi.

Exemple 2 : Un ensemble des mots formés par concaténation de divers *préfixes* avec le mot « **poser** » :

{***ap***poser, ***com***poser, ***dé***poser, ***dis***poser, ***im***poser, ***inter***poser, ***juxta***poser, **op**poser, **poser**, ***pré***poser, ***pro***poser, ***re***poser, ***super***poser, ***trans***poser, …}

On obtient un ensemble des mêmes *préfixes*, avec les mêmes verbes, mais au *participe passé* ...

*Ce **pré**posé* est un autre genre de facteur !



Bernard Buffet, Les Sumos

iii) Parmi les facteurs d'un mot **m**, il y a les

sous-mots,

constitués de *fragments* du mot **m**, non nécessairement contigus, mais dans lesquels l'ordre d'apparition des symboles du mot **m** est respecté.

Exemples :

i) Si **m** se factorise en

$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{u}_n\mathbf{v}_n\mathbf{u}_{n+1},$$

où tous les $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{v}_i$ sont des mots, alors

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_n$$

est un *sous-mot* de **m**.

Ainsi le mot **sumos** est un sous-mot du mot **m** = **S**o**U**s-**MO**t**S**

ii) Un sous-mot **u** est une séquence d'éléments d'un alphabet **A** qui peut apparaître *une seule fois* ou *plusieurs fois* comme *sous-mot* d'un mot **m**… Ainsi, la séquence

u = aba

apparaît *1 seule fois* comme sous-mot du mot $\mathbf{m_1}$ = bacbcab,

mais apparaît *8 fois* comme sous-mot du mot $\mathbf{m_2}$ = **aabbaa** :

Rechercher tous les sous-mots d'un texte, c'est beaucoup mieux que compter les moutons !

Sous-mots →	aabbaa, aabbaa, aabbaa, aabbaa,
Positions de a et de b →	123456, 123456, 123456, 123456,
Sous-mots →	aabbaa, aabbaa, aabbaa, aabbaa
Positions de a et de b →	123456, 123456, 123456, 123456.

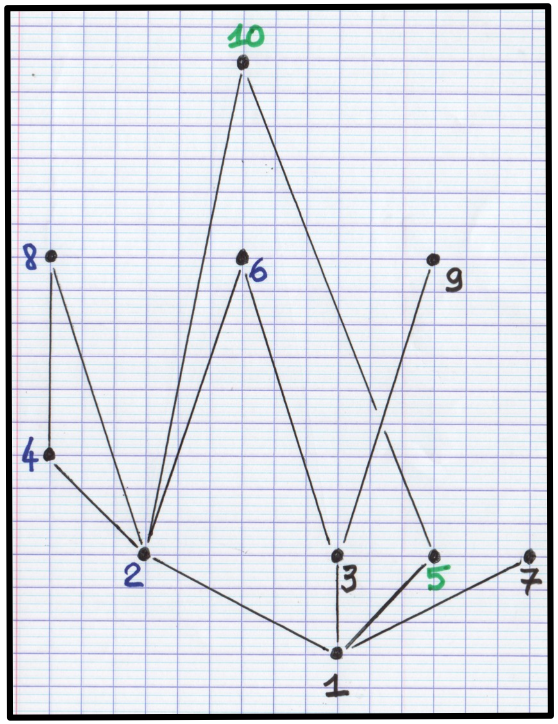
► Sous-Mots et Division des Mots

A partir de la notion de sous-mot, on peut définir la **division** des mots.

Si un mot **d** est un sous-mot du mot **m**, on dit que :

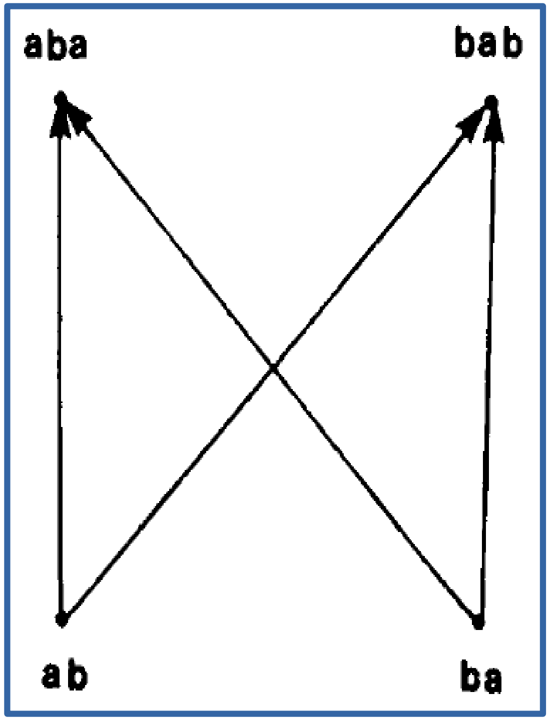
d divise m : **d|m**

Cette relation permet la **comparaison** des mots.



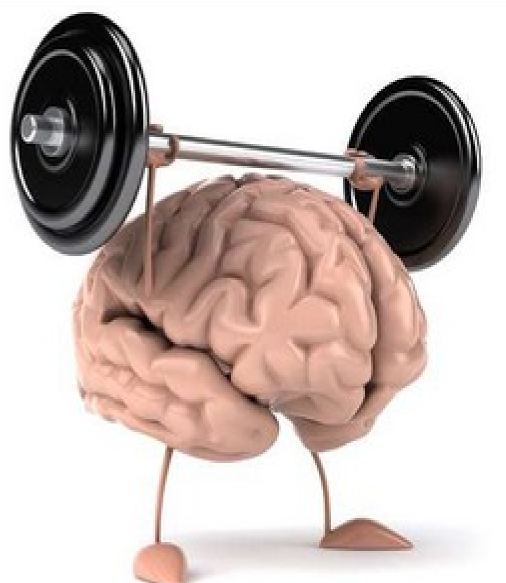
La relation de **divisibilité** entre **entiers** est un **ordre partiel**.

Comme dans le cas des entiers, la relation de divisibilité **d|m** entre les mots est une relation d'**ordre partiel** (relation réflexive, transitive et antisymétrique) compatible avec la concaténation.



La relation de **divisibilité** entre **mots** est un **ordre partiel**.

▶ Puissance d'un Mot



Essayez d'en faire autant !

La **puissance** $\mathbf{p}^{\text{ième}}$ d'un mot **u** est le mot :

$$\mathbf{u}^p = \underbrace{uu \ldots uu}_{p \text{ fois}}$$

Autrement dit, $\mathbf{u}^p$ est la concaténation **p** fois répétée du mot **u**.

Exemple :

Le mot

$$\mathbf{m} = \mathbf{bellebellebellebellebellebelle}$$

est le mot **u** = **belle** à la puissance p=6 : (*)

$$\mathbf{u}^6 = (\text{belle})^6 = \mathbf{m}$$

(*) Remarque : Avec des mots, porter la beauté à la puissance 6 est possible. Dans le monde réel, c'est une illusion !

► Mot Primitif

Un mot u de A^* est **primitif** si :

$$u = m^n \Rightarrow n = 1$$

Autrement dit, u est **primitif** si l'équation $u = m^i$ n'admet pas de solution pour $i > 1$

Autrement dit encore, u n'est pas puissance d'un *autre* mot que lui-même :

il n'existe pas de mot m "plus court" que u tel que $u = m^n$.

Exemples :

i) Le mot

$$\mathbf{u} = \mathbf{abb}$$

est **primitif**,

car on ne peut trouver de mot **m** formé avec les lettres ***a*** et ***b***

dont une puissance vaut **u**.

ii) Les mots

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{abbabb} = \mathbf{(abb)^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{u_2} = \mathbf{nanana} = \mathbf{(na)^3}$$

ne sont pas primitifs ;

ce sont des puissances (carré et cube) des mots primitifs

$$\mathbf{m_1} = \text{abb} \quad \text{et} \quad \mathbf{m_2} = \text{na.}$$

► <u>Code</u>

Code Barre

Avec des mots primitifs, on peut *engendrer* une **partie** de l'ensemble A* des mots sur l'alphabet **A**.

Le *plus petit* ensemble de mots primitifs permettant d'engendrer une partie **P** de l'ensemble A* s'appelle un **code**.

Un code joue le rôle d'une **base** de l'ensemble **P**.

<u>Exemples</u> : Avec l'alphabet **A**={a,b}, on vérifie que

(i) La partie **X={aa,ba,baa,bb,bba}** est bien un code permettant d'engendrer la partie X* de A* (aucun des éléments de X ne peut être obtenu à partir des autres).

(ii) La partie **Y={a,b,ab}** n'est pas la plus petite *partie génératrice* de Y* (**ab** est de trop), donc pas un code.

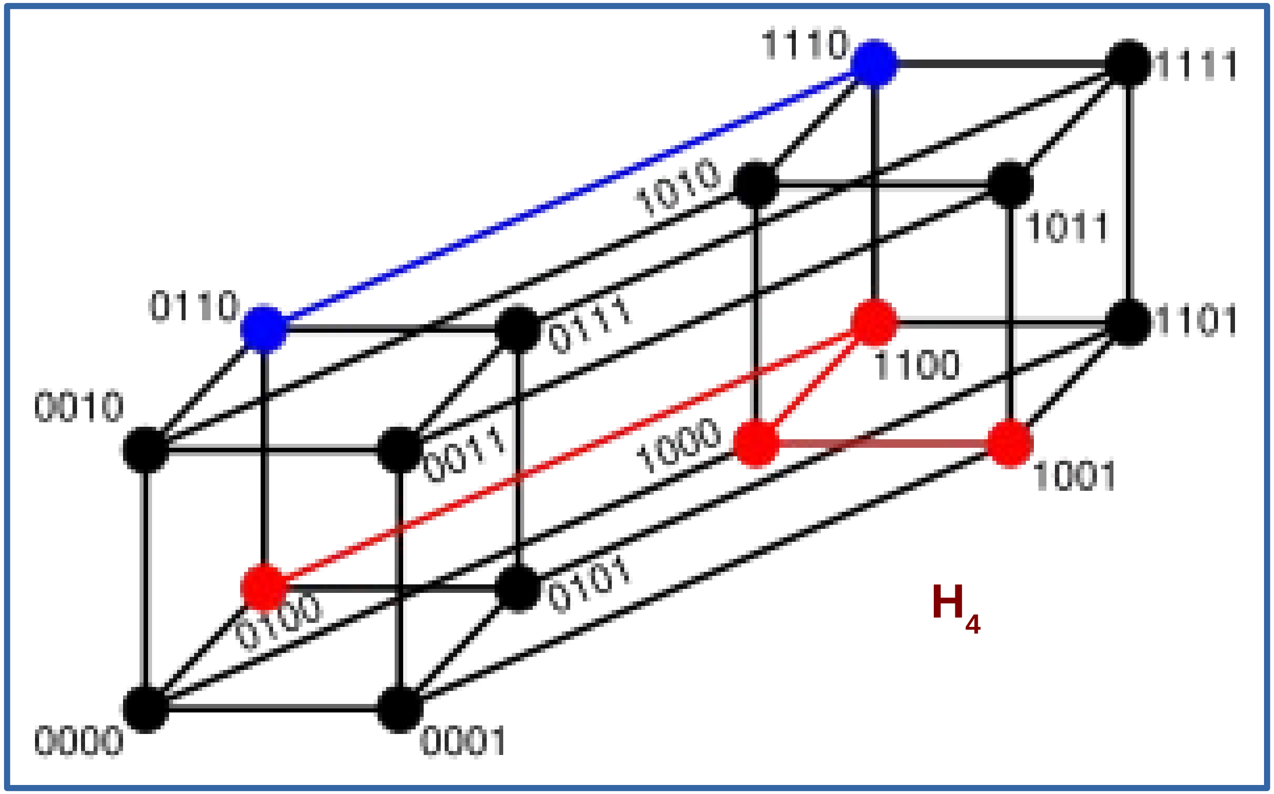
QR-Code

► <u>Une façon de Comparer : la Distance entre les Mots</u>

<u>Exemple 1</u> : **Distance de Hamming**

L'une des façons de définir la « distance » entre deux « objets » a été proposée par **Richard Hamming** (1915-1998), dans le cadre de la théorie des codes :

Pour deux objets d'un même ensemble, la **distance de Hamming** est le nombre d'éléments par lesquels les deux objets *diffèrent*.



Wikipedia, Distance de Hamming

<u>Exemple</u> :

La distance de Hamming entre deux *mots binaires* de n=4 bits est le nombre de bits différents entre ces deux mots, *i.e.* le nombre d'arêtes séparant ces mots dans l'*hypercube* $\mathbf{H_4}$.

La *distance* entre **0110** et **1110** est égale à **1**, alors que la distance entre **0100** et **1001** est égale à **3**.

Exemple 2 : **Distance d'Edition** ou de **(Damerau-)Levenshtein**

C'est la distance **d** entre deux chaînes de caractères :

d = nombre minimum d'*opérations* nécessaires pour transformer une chaîne de caractères en une autre.

Les 3 principales opérations possibles sur *un* caractère d'un mot de A^+ sont :

- l'*insertion*,
- la *suppression*,
- la *substitution*,

A quoi s'ajoute une 4ème opération :

- la *transposition* de deux caractères adjacents du mot. (*)

(*) D'après YVON François, ''Théorie des langages''

Exemples d'application des Opérations

- d'*insertion*,
- de *suppression*,
- de *substitution*,
- de *transposition* de deux caractères adjacents :

	Mot résultant	Opération
1	**chien**	Supprimer i
2	chen	Insérer a
3	chaen	Insérer m
4	chamen	Supprimer n
5	chame	Insérer a
6	chamea	Insérer u
	chameau	**d** = 6

	Mot résultant	Opération
1	**amours**	Transposer ur
2	amorus	Supprimer a
3	morus	Insérer e
4	emorus	Supprimer r
5	emous	Insérer r
	remous	**d** = 5

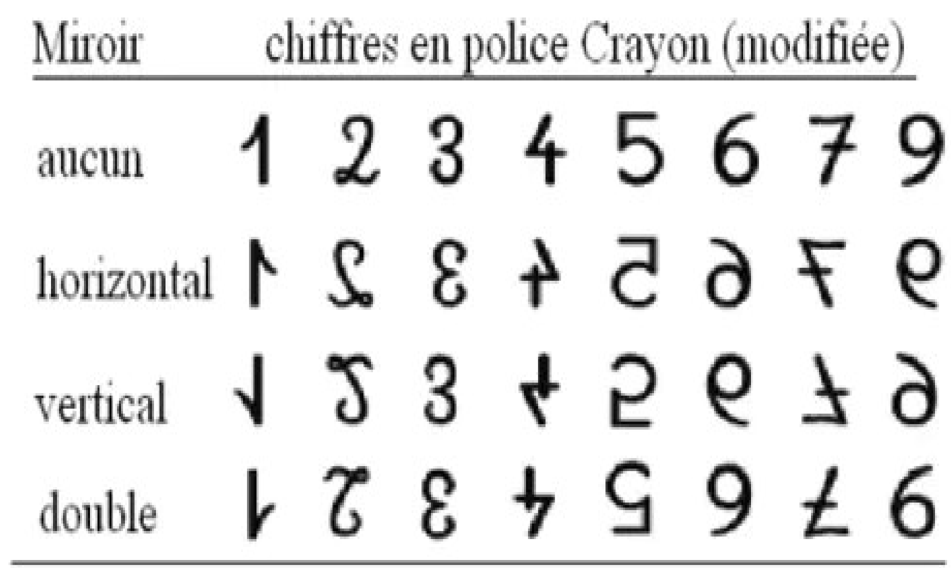
Exemple à méditer !!

► Symétrique d'un Mot et Palindrome

Le **symétrique** ou **mot-miroir**(*) d'un mot $\mathbf{m=a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n}$ est le mot **~m** formé du même ensemble de lettres « lu » dans l'ordre *inverse* des lettres : $\mathbf{\sim m=a_na_{n-1} \ldots a_2a_1}$.

Un mot $\mathbf{m}=\mathbf{a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n}$ est un **palindrome** s'il est égal au « mot-miroir » correspondant

$\mathbf{\sim m}=\mathbf{a_na_{n-1} \ldots a_2a_1}$.



(*) On trouve aussi les termes : **inversé**, **renversé**, **retourné** ou **transposé**.

Les palindromes formés avec des chiffres figurent parmi les *curiosités* numériques (car un nombre est un mot) :

<u>Exemples</u> (*) :

i) les nombres suivants formés avec les chiffres **0** et **1** sont des *palindromes* :

1**0**1, 1**00**1, 1**000**1, 10**11**01,

ii) les 4 premières puissances de **11** sont des *palindromes* :

11^1	=	11
11^2	=	1**2**1
11^3	=	1**33**1
11^4	=	1**464**1

(*) D'après BERNA Henri, « Palindromes, monotypes et autres bizarreries numériques »

- les *carrés* des nombres suivants (n=11, n=111, n=1111, …, appelés **repunités**, formés par concaténation répétée du chiffre **1**), sont des *palindromes* (jusqu'à **n=9** seulement) :

$(11...)^2$		Palindrome
11^2	=	1**2**1
111^2	=	12**3**21
1111^2	=	123**4**321
11111^2	=	1234**5**4321
111111^2	=	12345**6**54321
1111111^2	=	123456**7**654321
11111111^2	=	1234567**8**7654321
111111111^2	=	12345678**9**87654321

► Autres mots bizarres et curieux (*)

Parmi les mots qu'on peut former avec les éléments d'un alphabet, il existe certaines *curiosités*, qui présentent un intérêt, sinon mathématique, du moins ludique.

L'Exemple des Monotypes :

Un **monotype** est un mot $\mathbf{m=a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n}$ formé du même caractère (chiffre, lettre, etc) répété *n* fois.

- les multiples à deux chiffres du nombre premier 11 :

11 - 22 - 33 - 44 - 55 - 66 - 77 - 88 - 99

- certaines ''heures'' affichées par une montre digitale :

0101 - 0202 - … - 1010 - 1111 - … - 1212 - … - 1818 - 2222 - 2323

(*) D'après BERNA Henri, « Palindromes, monotypes et autres bizarreries numériques »

1-2)

Caractéristiques de l'Ensemble A^* des Mots sur un Alphabet fini A

1-2-1) Les lettres de l'alphabet A sont des mots *indécomposables*

Cela veut dire que :

si a est une lettre de A, *il n'existe pas* de mots b,c de A^+ tel que :

$a = bc$.

1-2-2) Il n'existe pas de notion d'*inverse* dans A^*

Cela veut dire que :

une lettre n'a pas d'inverse, un mot non plus.

Conséquence :

si u est un mot de A^*, *il n'existe pas* de mot v tel que : $vu=uv=e$.

1-2-3) **Propriétés de la Concaténation**

La concaténation est **<u>associative</u>**

Si **u**, **v**, **w** sont des mots de A^+, alors on a :

$$(uv)w = u(vw)$$

<u>Exemple</u> :

i) **m** = **bellemarquisevosbeauxyeuxmefontmourirdamour**

Dans le mot **m**, on peut placer des **parenthèses** où l'on veut entre les mots constituants ...

La marquise, toujours aussi belle, avec ou sans parenthèses !!

<u>Remarque</u> :

Dans les *langues naturelles*, au contraire, le placement des **parenthèses** change parfois le « sens » des mots :

ii$_a$) **m_a = they(are(flyingplanes))** **m_b = they((areflying)planes)**	ii$_b$) **m_c = ((lapeur)(del'ennemi))** **m_d = (la(peurdel'ennemi))**

En *linguistique*, on se préoccupe de *sémantique*, mais pas en combinatoire des mots !!

La Concaténation est **non-commutative**

Si **u**, **v** sont des mots de **A**$^+$, **uv** et **vu**

sont aussi dans **A**$^+$, mais :

uv $\neq$ **vu** (sauf si u=v)

Exemple :

Au dire du précepteur de M. Jourdain, les mots

m_1 = **bellemarquisevosbeauxyeuxmefontmourirdamour**

et

m_2 = **mourirvosbeauxyeuxbellemarquisedamourmefont**

seraient les mêmes, mais ce n'est pas vrai en combinatoire des mots, qui ne se soucie ni de sémantique, ni de stylistique, ... et encore moins du sort de la marquise !

1-3) Deux Mots sur les Langages

1-3-1) Qu'est-ce qu'un langage ?

Un **langage** (**formel**) est un ensemble de *chaînes*, c'est-à-dire un ensemble *ordonné* de lettres répondant à des *règles* de formation.

Exemples simples de Langages :

i) L'ensemble des mots commençant par n lettres a, suivies de n lettre b, suivies de n lettres c, sur l'alphabet A={a,b,c, ...} :

A={a,b} : {**e**, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, aaaaabbbbb, …}

A={a,b,c} : {**e**, abc, aabbcc, aaabbbccc, aaaabbbbcccc, …}

Un tel langage est noté $\{a^nb^n\}$, $\{a^nb^nc^n\}$, etc, pour $n \geq 0$

Ça veut dire quoi ?

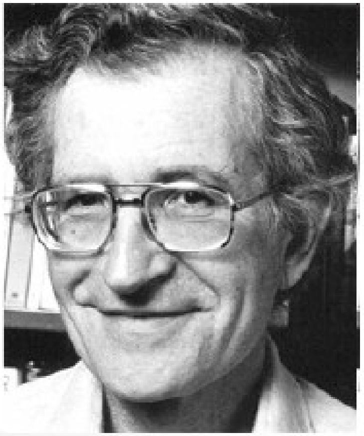
ii) Les **langages (formels)**, ensembles de mots sur un alphabet fini :

- l'ensemble des mots de la forme $\mathbf{a^n}$, où n est un *nombre premier*

$\{a^2,a^3,a^5,a^7,a^{11},a^{13},a^{17}, ...\}$,

- l'ensemble des programmes *syntaxiquement corrects* dans un **langage de programmation** donné,
- l'ensemble des 500 mots les plus fréquents d'une langue parlée.

1-3-2) **La Hiérarchie des Langages**



Noam CHOMSKY, maître de la classification des Langages et de la Linguistique Formelle

Chomsky a établi un classement des langages formels, appelé

hiérarchie de Chomsky,

qui s'étudie bien en relation avec la théorie des *automates*.

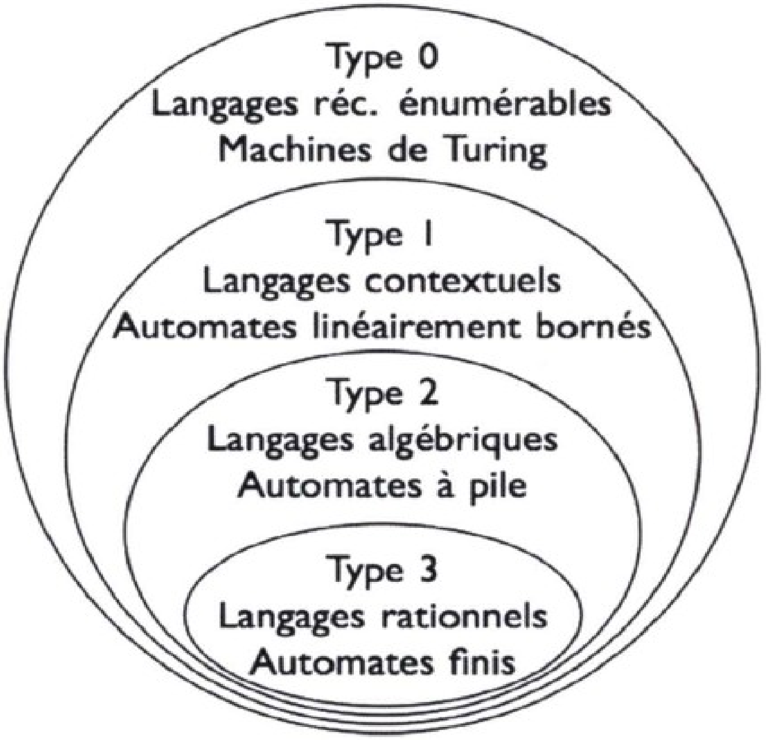
(mais ceci est une autre histoire ...)

Remarque :

L'ensemble des langages dans A*

(*i.e.* des ensembles de mots formés par concaténation des lettres de l'alphabet A)

n'est pas dénombrable.



Hiérarchie de Chomsky (Tangente-HS-052-p-053)

2 Quelques Mots, Finis ou Infinis

On rencontre les mots les plus divers… Certains sont *finis*, d'autres *infinis*.

En voici quelques exemples.

2-1) Les Connecteurs Logiques sont des Mots

2-2) Mots Finis de Longueur *n* - Mots Infinis

2-3) Le Binôme se «décline» avec des Mots

2-4) Système de Réécriture

2-5) Mot de Fibonacci

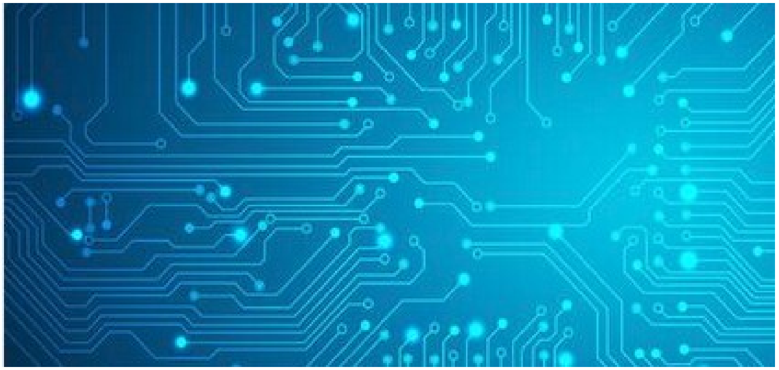
2-6) Mot de Thue-Morse

2-1) Les Connecteurs Logiques sont des Mots

En *logique des propositions*, il existe $2^{2^2} = 16$

connecteurs logiques distincts ; chacun d'eux peut être vu comme un **mot** fini de longueur l=4 sur l'alphabet

A={1,0} = {V,F} = {Vrai, Faux} :



Ce qui est logique peut être imprimé, mais, hélas, ce qui est imprimé peut n'être pas logique !

p	q	$p \circ q$															
		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
			OU			$\Rightarrow$		$\Leftrightarrow$	ET								

Les TABLES de VÉRITÉ en LOGIQUE des PROPOSITIONS

Chaque *colonne* du tableau est un mot sur A={1,0} et représente la **table de vérité** d'un des 16 connecteurs logiques ...

2-2) Mots Finis de Longueur *n* – Mots Infinis

◆ Un **mot fini de longueur *n*** formé avec l'alphabet A = $\{l_1, l_2, \ldots, l_k\}$ est une suite obtenue par *concaténation* de $p_1, p_2, \ldots, p_k$ occurrences des lettres de A.

Exemple 1 :

« **aabbababaaabbababbbaab** » est un mot formé sur A={**a**,**b**} de p=10 occurrences de la lettre '**a**' et de q=10 occurrences de la lettre '**b**'.

Exemple 2 :

Quand on joue à pile ou face (**P** ou **F**), on réalise *n* jets d'une pièce de monnaie. Chaque jet peut avoir pour issue P ou F. On peut représenter le résultat obtenu par un mot de la forme :

$$\boxed{M = \underbrace{PFFPPF\ldots PFPPFF\ldots}_{n \text{ symboles}}}$$

Exemple 3 : suites d'entiers

a) la **suite caractéristique *P* des nombres premiers** :

Nombre ENTIER n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre PREMIER p			**2**	**3**		**5**		**7**		
Suite infinie ***P***	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
Nombre ENTIER n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Nombre PREMIER p		**11**		**13**				**17**		**19**
Suite infinie ***P***	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
Nombre ENTIER n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Nombre PREMIER p				**23**						**29**
Suite infinie ***P***	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

La suite caractéristique des nombres premiers est le mot *infini* :

***P* =** 001101010001010001010001000001010000010001010001000001...

b) à l'**ensemble des nombres premiers** correspond aussi la **suite**

S = 002301030003010010300030000001030000010001030003000001…,

mot infini sur l'alphabet {0,1,2,3}, défini par :

$$p_i = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{si } \boldsymbol{i} \text{ n'est pas premier,} \\ \boldsymbol{i} \bmod 4, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nombre ENTIER i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre PREMIER p_i			**2**	**3**		**5**		**7**		
Suite infinie ***S***	**0**	**0**	**2**	**3**	**0**	**1**	**0**	**3**	**0**	**0**
Nombre ENTIER i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Nombre PREMIER p_i		**11**		**13**				**17**		**19**
Suite infinie ***S***	**0**	**3**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**3**
Nombre ENTIER i	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Nombre PREMIER p_i				**23**						**29**
Suite infinie ***S***	**0**	**0**	**0**	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

c) le mot de **Champernowne** ou mot de **Barbier** $\mathbf{C_b}$ s'obtient par concaténation des entiers écrits en base b.

- pour b=10 : $\mathbf{C_{10}}$ = **1234567891011121314151617181920** …,
- pour b=2 : $\mathbf{C_2}$ = **11011100101110111100010011010** …,

ENTIER n_{10} | v					Suite C_2					
1	**1**									
2	1	**10**								
3	1	10	**11**							
4	1	10	11	**100**						
5	1	10	11	100	**101**					
6	1	10	11	100	101	**110**				
7	1	10	11	100	101	110	**111**			
8	1	10	11	100	101	110	111	**1000**		
9	1	10	11	100	101	110	111	**1000**	**1001**	
10	1	10	11	100	101	110	111	**1000**	**1001**	**1010**

2-3) Le Binôme se « décline » avec des Mots

- Les lycéens connaissent bien le **développement du binôme** … $(a+b)^n$.

  Par exemple, pour n=3, on a :

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

Ecrivons ce binôme sous la forme :

$$(a+b)^3 = (a_1 + b)(a_2 + b)(a_3 + b)$$

Autrement dit, faisons *comme si* les trois *occurrences* du nombre **a** étaient trois **lettres** distinctes, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ et $\mathbf{a_3}$.

Le développement du binôme $(a+b)^3$ ainsi écrit peut alors se représenter comme une somme des produits des lettres $\mathbf{a_i}$ et **b** : le ''produit'' est ici le résultat de la **concaténation**.

$$(a+b)^3 = \left\{ \begin{array}{lccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ + & & & \\ & a_1 & a_2 & b \\ + & & & \\ & a_1 & a_3 & b \\ + & & & \\ & a_2 & a_3 & b \\ + & & & \\ & a_1 & b & b \\ + & & & \\ & a_2 & b & b \\ + & & & \\ & a_3 & b & b \\ + & & & \\ & b & b & b \end{array} \right\}$$

$$(a+b)^3 = \left\{ \begin{array}{cccc} & a & a & a \\ + & & & \\ & a & a & b \\ + & & & \\ & a & a & b \\ + & & & \\ & a & a & b \\ + & & & \\ & a & b & b \\ + & & & \\ & a & b & b \\ + & & & \\ & a & b & b \\ + & & & \\ & b & b & b \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} & (1 \times a^3) \\ + & \\ & (1 \times a^2 b^1) \\ + & \\ & (1 \times a^2 b^1) \\ + & \\ & (1 \times a^2 b^1) \\ + & \\ & (1 \times a^1 b^2) \\ + & \\ & (1 \times a^1 b^2) \\ + & \\ & (1 \times a^1 b^2) \\ + & \\ & (1 \times b^3) \end{array} \right\}$$

On peut encore simplifier la représentation du développement du binôme en remplaçant les lettres a_i par la seule lettre **a**

Le **développement du binôme** (a+b)^n peut alors effectivement se représenter comme un ensemble de mots.

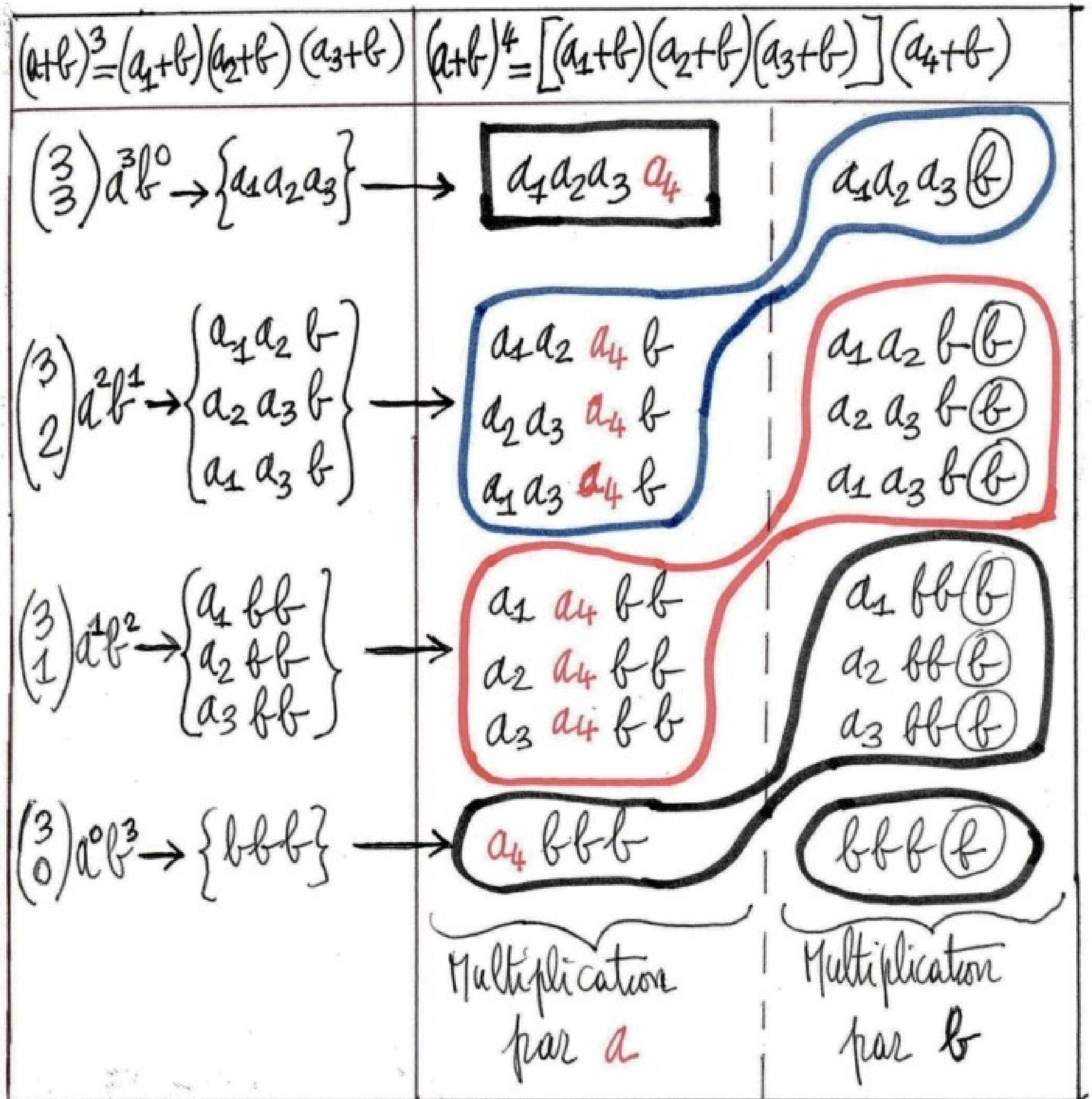
Par exemple, toujours pour **n=3**, le développement de **(a+b)^3** correspond à :

$$\begin{array}{l}
aaa\ \} \longrightarrow \binom{n}{m} = \binom{n}{n} = \binom{3}{3} = \boxed{1} \text{ produit égal à } a^3b^0 = a^3 \\
\quad + \\
\left.\begin{array}{l} aab \\ aab \\ aab \end{array}\right\} \longrightarrow \binom{n}{m} = \binom{3}{2} = \boxed{3} \text{ produits égaux à } a^2b^1 = a^2b \\
\quad + \\
\left.\begin{array}{l} abb \\ abb \\ abb \end{array}\right\} \longrightarrow \binom{n}{m} = \binom{3}{1} = \boxed{3} \text{ produits égaux à } a^1b^2 = ab^2 \\
\quad + \\
bbb\ \} \longrightarrow \binom{n}{m} = \binom{n}{0} = \binom{3}{0} = \boxed{1} \text{ produit égal à } a^0b^3 = b^3
\end{array}$$

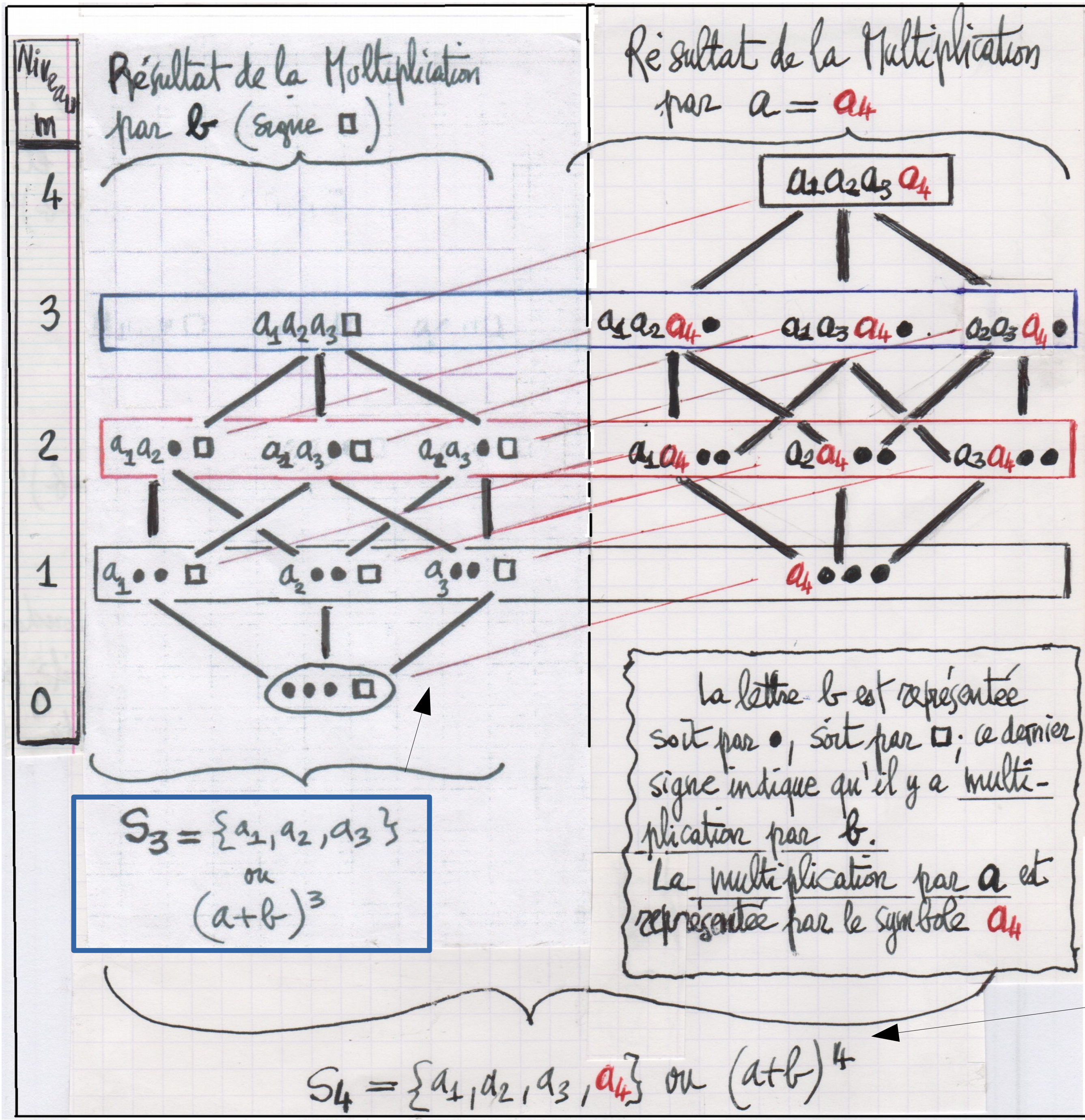
Autre illustration du traitement du binôme comme un *mot* :

le passage de
$(a+b)^3$
à
$(a+b)^4$

La *multiplication* par **a** ou **b**
(la *concaténation* sur l'alphabet $A=\{a,b\}$)
donne
le binôme
$(a+b)^4$
à partir du binôme
$(a+b)^3$.



Passage de $(a+b)^3$ à $(a+b)^4$



Un **diagramme en treillis** montre comment se fait le passage du développement du binôme $(a+b)^3$ à celui du binôme $(a+b)^4$.

Ce treillis illustre la **loi de dédoublement des parties** d'un ensemble fini.

S_4 $=\{a_1,a_2,a_3,b\}$ représente $(a+b)^4$

Encore une illustration du traitement du binôme comme un *mot* :

les probabilités d'un **tirage binomial**

Si, dans une *population P*, la probabilité d'un objet *défectueux* (**D**) est égale à **p**, et celle d'un objet *bon* (**B**) égale à **q**, alors les probabilités d'avoir 0, 1, . . . , m (m ≤ n) objets défectueux dans un échantillon **A** de **n** objets sont données par les termes successifs du développement du binôme **(p+q)**^{n}, par exemple, pour **n=3** :

L'ensemble des probabilités, pour un échantillon **A** de la population *P*, peut se représenter …

… par un ensemble de mots formés avec l'alphabet {B,D}

$$(p+q)^n = (p+q)^3 = \underset{\mathrm{DDD}}{\underset{\downarrow}{\boxed{1}\,p^3}} + \underset{\mathrm{3BDD}}{\underset{\downarrow}{\boxed{3}\,p^2q}} + \underset{\mathrm{3BBD}}{\underset{\downarrow}{\boxed{3}\,pq^2}} + \underset{\mathrm{BBB}}{\underset{\downarrow}{\boxed{1}\,q^3}}$$

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$	Résultats	Probabilité de l'échantillon	Probabilité du Résultat
DDD	3 défectueux	ppp	p^3
DDB DBD BDD	2 défectueux et 1 bon	ppq pqp qpp	$3p^2q$
DBB BDB BBD	1 défectueux et 2 bons	pqq qpq qqp	$3pq^2$
BBB	3 bons	qqq	q^3

Pour un échantillon **A** de **n=3** éléments, si les probabilités de **D** et de **B** sont **p**=0,1 et **q**=0,9, …… alors on a :

DDD

DDB, DBD, BDD

DBB, BDB, DBB

BBB

$$
\begin{array}{rrl}
 & p^3 = 0,001 & \text{pour 3 défectueux} \\
+ & 3p^2q = 0,027 & \text{pour 2 défectueux et 1 bon} \\
+ & 3pq^2 = 0,243 & \text{pour 1 défectueux et 2 bons} \\
+ & q^3 = 0,729 & \text{pour 3 bons} \\
\hline
 & (p+q)^3 = & 1
\end{array}
$$

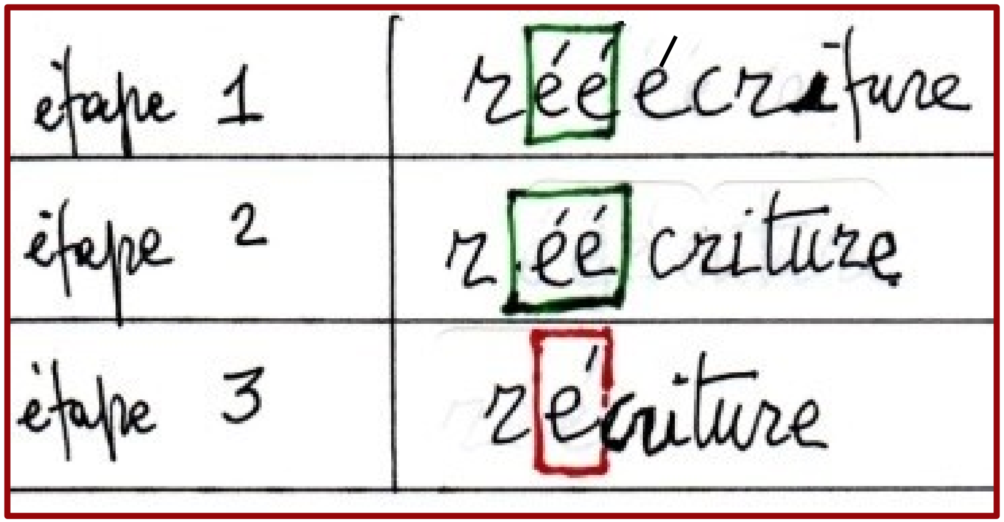
2-4) Système de Réécriture (*)

Certaines procédures produisent des *mots infinis*, car elles ne [se] ''*terminent*'' jamais.

C'est le cas parfois des procédures de **réécriture**.

Exemple 1 : On veut corriger le mot «r**ééé**criture» qui contient un «é» de trop ; pour cela on applique la règle de réécriture :

R$_1$: éé → é



La procédure consiste ici à répéter la règle jusqu'au résultat cherché ou tant que c'est possible. La procédure ''termine'' en 3 étapes … mais le résultat n'est pas correct, car il manque un «é».

On adopte alors la règle de réécriture : **R**$_2$: é → éé

… que l'on applique au mot « r**é**criture » obtenu par la procédure **R**$_1$:

(*) D'après La RECHERCHE-mars 2017, p 35 : Roger Mansuy, ''Rééécriture''

Cela donne une procédure qui ne ''*termine*'' jamais :

étape 1	récriture
étape 2	réécriture
étape 3	rééécriture
étape 4	réééécriture
⋮	⋮

… à chaque étape, un «**é**» est remplacé par une chaîne «**éé**», qui contient comme 1er caractère un «**é**», qui sera remplacé par «**éé**» à l'étape suivante, … etc.

Il s'agit ici d'une ''instance'' du **problème de l'arrêt**, étudié par **Alan Turing**, problème *indécidable*.

<u>Exemple 2</u> : A la 1ère étape, on applique au mot «**101101**» la règle :

R_3 : 01 → 10

Cette procédure ''termine'' en un total de 5 étapes :

étape 2	110101
étape 3	111001
étape 4	111010
étape 5	111100

En revanche la procédure obéissant à la règle

R_4 : 10 → 0011

ne ‘‘*termine*’’ jamais quand on part du mot «**110**» :

		Nbre de chiffres
Étape 1	110	3
Étape 2	10011	5
Étape 3	0011011	7
Étape 4	001001111	9
Étape 5	00001101111	11
Étape 6	0000100111111	13
Étape 7	000000110111111	15

etc.

… la chaîne **0011** se trouve, à chaque étape, soit *avant* un **0**, soit *après* un **1** ; on a donc toujours une sous-chaîne ‘‘**10**’’ à chaque étape … et le mot d’origine devient donc de plus en plus long.

2-5)

Mot de Fibonacci

- La très célèbre **suite de Fibonacci** se définit par :

$$\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$$

(on peut aussi la définir par : $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$)

Les premiers termes de cette suite *infinie* sont :

$\mathcal{F}_0$	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\mathcal{F}_8$	$\mathcal{F}_9$	$\mathcal{F}_{10}$	$\mathcal{F}_{11}$	$\mathcal{F}_{12}$	$\mathcal{F}_{13}$	$\mathcal{F}_{14}$	$\mathcal{F}_{15}$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

- A partir de l'alphabet A={0,1}, un **mot de Fibonacci** se définit par :

$$f_0 = e \text{ , } f_1 = 1 \text{ , } f_2 = 0$$

$$f_n = f_{n-1} \,{}_\Delta\, f_{n-2}$$ (où $_\Delta$ est la concaténation)

Les *mots* de Fibonacci forment alors aussi une <u>suite *infinie*</u> :

f_0 = **e**
f_1 = **1**
f_2 = **0**
f_3 = **01**
f_4 = **010**
f_5 = **01001**
f_6 = **01001010**
f_7 = **0100101001001**
f_8 = **010010100100101001010**
f_9 = **0100101001001010010100100101001001**
… etc

- On définit le **mot vide de Fibonacci** f_0 = **e** , de longueur $|f_0|$ = |**e**| **=** 0.

Il y a alors une relation entre les **nombres** et les **mots** de Fibonacci :

La suite des **LONGUEURS** des **MOTS** de Fibonacci est exactement la suite des **NOMBRES** de Fibonacci :

n	f_n	$\|f_n\| = F_n$
0	f_0 = **e**	**0**
1	f_1 = **1**	**1**
2	f_2 = **0**	**1**
3	f_3 = **01**	**2**
4	f_4 = **010**	**3**
5	f_5 = **01001**	**5**
6	f_6 = **01001010**	**8**
7	f_7 = **0100101001001**	**13**
8	f_8 = **010010100100101001010**	**21**
9	f_9 = **0100101001001010010100100101001001**	**34**

… etc

2-6) Mot de Thue-Morse

En 1912, Axel Thue présenta ce qu'on appelle de nos jours le **mot de Thue-Morse**.
C'est un mot *infini* formé sur l'alphabet A={**0,1**}, une *suite binaire automatique*, obtenue en itérant la transformation **μ**, appelée **morphisme de Thue-Morse** :

Axel Thue
(19 fév. 1863-7 mars 1922)

$$0 \longrightarrow \mu(0) = 01$$
$$1 \longrightarrow \mu(1) = 10$$

a) Les premiers termes de la suite, à partir de **0** :

n	$\mu^n(0)$ = $n_{ième}$ itération à partir de 0
1	$\mu^1(0)$ = 01
2	$\mu^2(0)$ = 01 10
3	$\mu^3(0)$ = 01 10 10 01
4	$\mu^4(0)$ = 01 10 10 01 10 01 01 10
5	$\mu^5(0)$ = 01 10 10 01 10 01 01 10 10 01 01 10 01 10 10 01
	… etc

La suite commence à $\mu^1(0)$ = **01**, et les puissances suivantes de $\mu^n(0)$ s'obtiennent en remplaçant, dans le terme *précédent* de la suite, **0** par **01** et **1** par **10**.

b) Les premiers termes de la suite, à partir de **1** :

n	$\mu^n(1)$ = $n_{ième}$ itération à partir de 1
1	$\mu^1(1)$ = 10
2	$\mu^2(1)$ = 10 01
3	$\mu^3(1)$ = 10 01 01 10
4	$\mu^4(1)$ = 10 01 01 10 01 10 10 01
5	$\mu^5(1)$ = 10 01 01 10 01 10 10 01 01 10 10 01 10 01 01 10
	… etc

La suite commence cette fois à $\mu^1(1)$ = 10, et les puissances suivantes de $\mu^n(1)$ s'obtiennent de la même façon en remplaçant, dans le terme *précédent* de la suite, **0** par **01** et **1** par **10**.

Quand n tend vers l'infini, on obtient deux *mots infinis*

$\mu^n(0)$ et $\mu^n(1)$

L'un s'obtient de l'autre en remplaçant, pour toute valeur de n,

0 par **1** (et **1** par **0**).

Par exemple, pour **n=5**, on a :

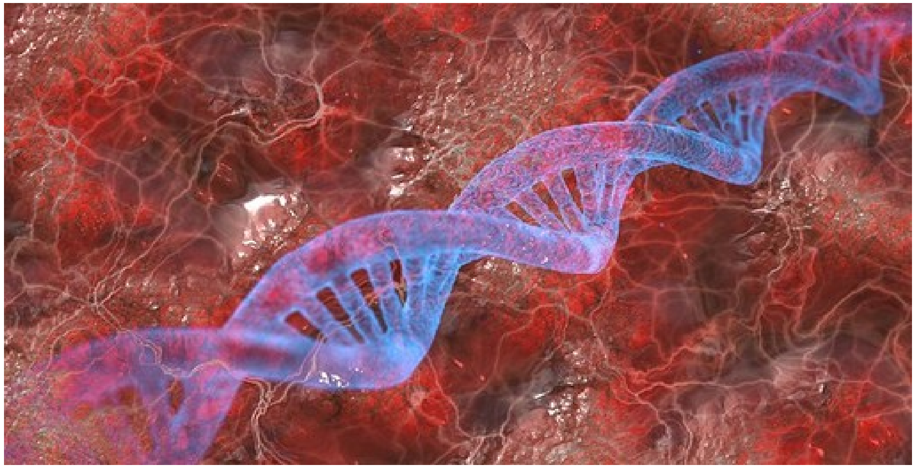
$\mu^5(0)$ = 01 10 10 01 10 01 01 10 10 01 01 10 01 10 10 01
$\mu^5(1)$ = 10 01 01 10 01 10 10 01 01 10 10 01 10 01 01 10

La suite de **Thue-Morse** a fait l’objet de nombreuses études.

On la retrouve dans certains domaines d’applications comme ...

Marston Morse
(1892-1977)

- l’algorithmique du texte : recherche d’un mot dans un texte,compression de données.



- la bio-informatique : séquençage génétique, ...

3 Problèmes de Mots, Problèmes de Maths

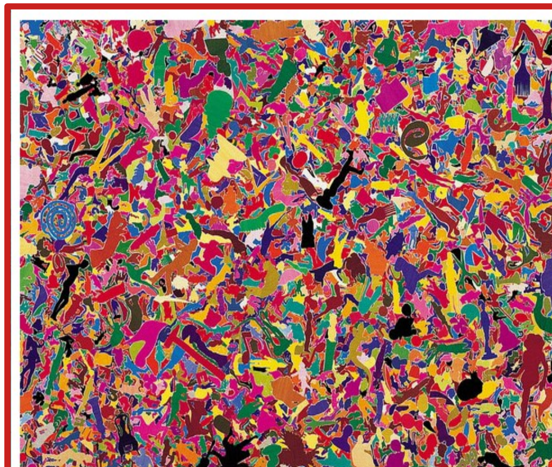
Mathématiciens, informaticiens et linguistes s'interrogent sur les mots et les langages.

Autrement dit, les mots posent des *problèmes* …

1 - PALINDROMES : **Palindromes** par retournement et addition. Nombres de **Lychrel** et **Conjecture 196**

2 - REGULARITES : Carrés, Cubes, Cadences : Y-a-t-il des **mots sans carré**, des mots **sans cube** ? Les **cadences** et le théorème de van der WAERDEN.

3 - Des MOTS et des NOMBRES : Palindromes, Numération et Nombres Premiers. WARING et LAGRANGE au Pays des mots.



4 – Des Maths et des MOTS à l'OULIPO : Des **Graphes** et des Mots. **Suites** de Mots. Un dernier **Jeu**.

3-1)

Palindromes par Retournement-Addition, Nombres de Lychrel et Conjecture 196

En plus d'attiser la *curiosité*, les palindromes ont un certain intérêt mathématique.

3-1-1) Retournement-Addition d'un Palindrome

Etant donné un entier **$x \geqslant 2$** (c'est un mot), on lui applique la procédure suivante :

1) on prend le *symétrique (mot-miroir)* de x, **sym(x)**

Exemple : sym(47) = 74, sym(6654) = 4566,

2) on fait la somme : **f(x) = x+sym(x)** (retournement-addition)

Exemple : f(x) = f(47) = 47 + sym(47) = 47 + 74 = **121**,

la procédure s'arrête si la somme f(x) est un **palindrome**

3) sinon, on applique les étapes 1) et 2) à la somme f(x) obtenue

Exemple : f(6654) = 6654 + sym(6654) = 6654 + 4566 = *11220*
… comme 11220 n'est pas un palindrome, on réitère …
f(11220) = 11220 + sym(11220) = 11220 + 02211 = **13431**.

ALGORITHME 196

Question : A quelle étape **k⩾0** la procédure s'arrête-t-elle ?

k=0 :

- les nombres à 1 chiffre (0,1, …,9), les nombres à 2 chiffres identiques (11, 22, 33, …),
- les nombres à 3 chiffres dont les 1^{er} et $3^{ème}$ chiffres sont identiques (**1**0**1**, **2**1**2**, **4**5**4**, ...).

k=1 :

- les nombres à *p* chiffres finissant par *p-1* zéros :

p=2 : 10, 20, 30, … *p=3* : 100, 200, … , 500, 600, … ,900, etc,

- les nombres à 3 chiffres finissant par 0 ou à 3 chiffres distincts,

pour lesquels la somme f(x)=x+sym(x) ne comporte pas de *retenue* :

11**0** → 110 + 011 = 121 105 → 105 + 501 = 606

52**0** → 520 + 025 = 545 108 → 108 + 801 = 909,

etc,

k=3 :

349 + 943	1925 + 5291
1292 + 2921	7216 + 6127
4213 + 3124	13343 + 34331
7337	47674

…

k=4 :

87 + 78	5259 + 9525
165 + 561	14784 + 48741
726 + 627	63525 + 52536
1353 + 3531	116061 + 160611
4884	**276672**

La procédure s’arrête rapidement pour **k=3** et **k=4**.

Deux <u>entiers distincts</u> peuvent produire le <u>même palindrome</u>.

Mais le nombre **k** d'étapes est différent.

k=7 :

188
+
881

1069
+
9601

10670
+
07601

18271
+
17281

35552
+
25553

61105
+
50116

111221
+
122111

233332

k=8 :

193
+
391

584
+
485

1069
+
9601

10670
+
07601

18271
+
17281

...

...

35552
+
25553

61105
+
50116

111221
+
122111

233332

Des entiers, qui produisent un palindrome en **k** étapes, quand ils sont écrits en base b=10, produisent aussi un palindrome dans une autre base, mais en moins d'étapes.

Exemple : **n=87**$_{10}$ (base *dix*) : palindrome en **k=4** étapes

n=106$_9$ (base *neuf*) : palindrome en **k=1** étape

base *dix* :

k	n_{10}	$sym(n_{10})$	$n_{10}+sym(n_{10})$
1	87	78	165
2	165	561	726
3	726	627	1353
4	1353	3231	**4884**

base *neuf* :

k	n_9	$sym(n_9)$	$n_9+sym(n_9)$
1	106	601	**707**

… **n=87**$_{10}$**=1010111**$_2$ (base *deux*) : palindrome en **k=2** étapes

k	n_2	$sym(n_2)$	$n_2+sym(n_2)$
1	1010111	1110101	1010111 + 1110101 = 11001100
2	11001100	00110011	11001100 + 00110011 = **11111111**

Quelques caractéristiques :

Si l'opération *retournement-addition* produit un palindrome en **k** étapes, on constate que :

- le nombre d'étapes **k** de l'opération *retournement-addition* n'est pas lié au nombre de chiffres représentant un entier donné.

- le nombre **k** varie avec la base de numération.

- aucune régularité n'apparaît parmi les entiers correspondant à un palindrome **P** en **k** étapes.

n	k	P
10	1	11
11	0	11
12	1	33
13	1	44
14	1	55
15	1	66
16	1	77
17	1	88
18	1	99
19	2	121
20	1	22
…	…	…

n	k	P
80	1	88
81	1	99
82	2	121
83	1	121
84	2	363
85	2	444
86	3	2332
87	4	4884
88	0	88
89	24	8813200023188
90	1	99
…	…	…

Aucune régularité parmi les entiers dans la suite des entiers produisant un palindrome

3-1-2) Nombres de **LYCHREL et Conjecture 196**

Un **nombre de Lychrel**(*) est un entier à partir duquel il est *impossible* de produire un palindrome en lui appliquant **l'algorithme 196**.

En fait, à ce jour, personne n'a prouvé qu'un entier, en base 10 ou autre, produit une suite infinie d'entiers non palindromiques !

(*) Lychrel serait le *quasi-anagramme* du prénom Cheryl

Si vous essayez d'obtenir un palindrome par « retournement-addition » à partir de l'entier **196**, bon courage !

Des millions de termes de la « **suite 196** » ont été calculés par ordinateur, sans jamais produire de palindrome !

D'où la conjecture appelée **Conjecture 196** :

196 est **le plus petit entier** qui ne produit ***jamais*** de palindrome par retournement-addition.

3-2)

Régularités dans les Mots
Carrés, Cubes et Cadences

3-2-1) **Complexité** d'une Suite de Mots - **Régularités** dans les Mots

Une suite de mots est d'autant plus "*compliquée"* qu'elle a "beaucoup" de facteurs différents, en particulier des *sous-mots*.

Mais on a pu montrer que :

Sur un alphabet *fini*, un mot quelconque possède des *régularités*, pourvu qu'il soit suffisamment *long*.

Un des thèmes de recherche en combinatoire de mots est de montrer l'existence de certaines ***régularités*** comme, entre autres :

- les **carrés** et les **cubes**, qui font partie des **répétitions**,
- les **chevauchements**,
- les progressions arithmétiques ou **cadences**,

et de déterminer dans quelles conditions elles sont *évitables* ou *inévitables*.

3-2-2) Carrés et Cubes – (1) Le cas du mot de THUE-MORSE

On peut voir facilement que :

Pour un alphabet A={a,b} de n=2 lettres, les seuls mots SANS CARRÉ sont : a, b, ab, ba, aba, bab.

Donc :

Le mot de THUE-MORSE contient des CARRÉS.

On a, entre autres carrés :

$\mu^1(0) = 01$

$\mu^2(0) = 0\,1\,1\,0$

$\mu^3(0) = 01\ 10\ 10\ 01$

$\mu^4(0) = 01\ 10\ 10\ 01\ 10\ 01\ 01\ 10$

En revanche, A. Thue a montré que :

Le mot de THUE-MORSE ne contient pas de CUBE.

1	2	3	4
a	aa	aaa	aaaa
			aaab
		aab	aaba
			aabb
	ab	aba	abaa
			abab
		abb	abba
			abbb
b	bb	bbb	bbbb
			bbba
		bba	bbaa
			bbab
	ba	baa	baaa
			baab
		bab	baba
			babb

Mieux vaut chercher une aiguille dans une botte de foin qu'un cube dans un Thue-Morse !!

3-2-3) Carrés et Cubes – (2) Autres Suites de Mots

Axel Thue, qui s'était donné pour but de classer toutes les suites sans carré, a aussi construit d'autres *mots infinis sans carré* :

i) On définit un mot *ternaire* (sur 3 lettres) par la transformation suivante :

a	→	**abac**	
b	→	**babc**	
c	→	**bcac**	, si la lettre avant **c** est **a**
c	→	**acbc**	, si la lettre avant **c** est **b**

En partant de la 1ère lettre a, on obtient : **abac**

La 2ème lettre est b, on *ajoute* **babc** : **abacbabc**

La 3ème lettre est a, on *ajoute* **abac** : **abacbabcabac**

La 4ème lettre est c précédée d'un a ; on *ajoute* **bcac** : **abacbabcabacbcac**

On obtient un **mot infini sans carré** débutant par : **abac|babc|abac|bcac|...**

ii) Sur l'alphabet A={a,b,c,d} et à partir du mot **abacbc**, on définit les <u>4 transformations</u> obtenues en insérant la lettre **d** à <u>4 emplacements</u> différents. A partir des <u>4 mots</u> ainsi obtenus, on définit la transformation suivante :

a	→	**adbacbc**
b	→	**abdacbc**
c	→	**abadcbc**
d	→	**abacdbc**

Quand la **k**$_{\textbf{ième}}$ lettre du mot m_{k-1} déjà formé est l'une des lettres **a**, **b**, **c** ou **d**, on ajoute au mot m_{k-1} l'*image* de la lettre rencontrée au rang **k** …

K=1 : on *part* de l'image de **a** ; on obtient : m_1=**adbacbc**,

K=2 : on ajoute à m_1 l'image de **d** et on obtient : m_2=**adbacbc|abacdbc**

K=3 : on ajoute à m_2 l'image de **b** et on obtient :

m_3=**adbacbc|abacdbc|abdacbc**

K=4 : on ajoute à m_3 l'image de **a** et on obtient :

m_4=**adbacbc|abacdbc|abdacbc|adbacbc**

Et ainsi de suite … On a par exemple, au rang K=7 :

m_7=**adbacbc|abacdbc|abdacbc|adbacbc|abadcbc|abdacbc|abadcbc|...**

K=1 K=2 K=3 K=4 K=5 K=6 K=7

Le mot m_k est un mot infini sans carré (lorsque k tend vers l'infini).

3-2-4) Mots et Cadences – La Conjecture de BAUDET et le Théorème de van der WAERDEN

En 1927, B. van der WAERDEN démontrait le théorème suivant : [a]

B. L. v. d. WAERDEN
(1903-1996)

Etant donnée une partition *finie*
$E = \{X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n\}$,
il existe au moins un élément X_k de E qui contient une progression arithmétique de longueur arbitraire.

Quelle relation entre ce résultat et la combinatoire des mots ?

Ce théorème est une reformulation de la

CONJECTURE de BAUDET [b]

Il existe un nombre N(L,K), tel que, pour un *alphabet* de L lettres, tout texte formé de *plus de N* lettres contient *au moins une* cadence d'ordre K.

(a) Il existe plusieurs formulations de ce théorème

(b) Baudet, mathématicien hollandais, mort au début du XXè siècle. On n'en sait guère plus sur lui et sa conjecture.

Exemples de Partitions

i) L'ensemble $\mathbf{X_1 = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}}$ des *nombres pairs* et l'ensemble $\mathbf{X_2 = \{1, 3, 5, \ldots, 2n{+}1, \ldots\}}$ des *nombres impairs* forment une partition de l'ensemble des entiers.

ii) L'ensemble $\mathbf{P_1 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}}$ des *nombres premiers* et l'ensemble $\mathbf{P_2 = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots\}}$ des *nombres non premiers* forment une partition de l'ensemble des entiers naturels.

Qu'est-ce qu'une CADENCE ?

Une succession d'*objets distincts* (évènements, résultats d'un jeu, montants économiques, etc.) peut être représentée par une *suite* correspondante de *symboles distincts* eux aussi. Ainsi la suite formée de **+**, **=** et **–** montre deux ***régularités*** :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
+	+	=	+	=	=	-	+	+	=	=	+	=	-	-	+	+	=	=	+	=	-	-	+	-	+	=	+
			+				+				+				+				+				+				+
		=								=								=								=	

S$_+$, progression arithmétique du symbole **+**, situé aux rangs 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 ;
S$_=$, progression arithmétique du symbole **=**, situé aux rangs 3, 11, 19, 27. La raison de **S**$_+$ est $\mathbf{r_1}$=4 et celle de **S**$_=$ est $\mathbf{r_2}$=8 (le *sens* des symboles **+**, **=** et **–** n'importe pas ici).

On appelle **cadence** une suite arithmétique, construite sur un alphabet de longueur donnée **L** et caractérisée par :

- son **ordre** , c'est-à-dire le nombre **K** de ses termes,
- sa **raison**.

L'alphabet est ici **A**={**+**, **=**, **–** } de **L**=3 termes.

La suite $\mathbf{S_+}$ est de raison $\mathbf{r_1}$=**4** et d'ordre $\mathbf{K_1}$=**7** ; il existe en effet **7** éléments dans cette progression arithmétique. On parle de **cadence** d'ordre **7** et de raison **4**.

La suite $\mathbf{S_=}$ est de raison $\mathbf{r_2}$=**8** et d'ordre $\mathbf{K_2}$=**3** ; il existe en effet **3** éléments dans cette progression arithmétique. On parle de **cadence** d'ordre **3** et de raison **8**.

Exemple de construction de Textes à partir d'un Alphabet A={a,b} (*)

Avec un alphabet A={**a**, **b**} de **L**=2 lettres, on construit des *textes* représentés, soit par un tableau, soit par un arbre. **Si l'on prolonge d'une lettre (a ou b) chaque ligne du tableau (chaque branche de l'arbre), on fait apparaître au moins une cadence d'ordre K=3 !**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	a	a	b	a	a	b	b	a	
2	a	a	b	a	b	b	a		
3	a	a	b	b	a	a	b	b	a b
4	a	a	b	b	a	b	a	a	
5	a	a	b	b	a	b	b	a	
6	a	b	a	a	b	a	a	b	
7	a	b	a	a	b	b	a		
8	a	b	a	b	b	a	a	b	
9	a	b	a	b	b	a	b	a	a
10	a	b	b	a	a	b	b	a	b
11	a	b	b	a	b	a	a		
12	a	b	b	a	b	b	a		

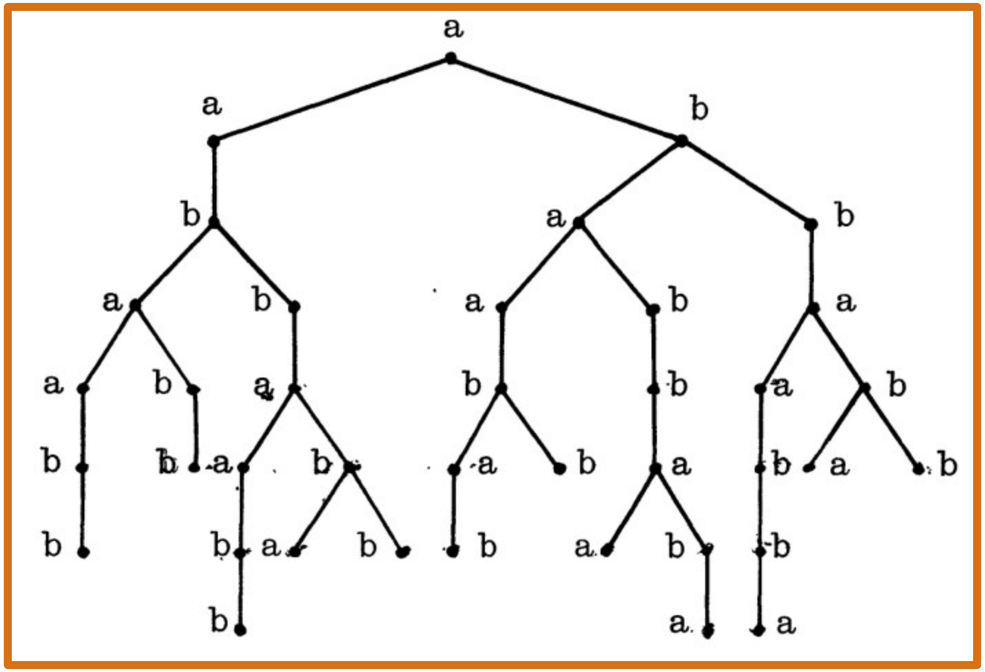
Tableau des Textes formés sur l'alphabet A={a,b}

TABLEAU ou ARBRE

Le a ou le b est la lettre ajoutée et les a ou b sont les autres lettres de la suite arithmétique de la ligne du tableau ou de la branche de l'arbre.

Les textes les plus longs, écrits avec L=2 lettres, qui *ne comportent pas* de cadence d'ordre K=3 [nos 3, 9 et 10] sont donc formés de 8 lettres, autrement dit :

N(L,K) = N(2,3) = 8.



Arbre des Textes formés sur l'alphabet A={a,b}

(*) D'après J. Gardelle, Th. Guilbaud, « Cadences » (« Mathématiques et Sciences Humaines », tome 9, 1964)

3-3) Des MOTS et des NOMBRES

3-3-1) Palindromes dans Différentes Bases de Numération, etc

- Un palindrome reste-t-il un palindrome, avec ou non le même nombre de chiffres, quand on l'écrit dans une autre base de numération ? (*)

Par exemple, l'entier

$$N = (207702)_{10},$$

qui est un palindrome à 6 chiffres (un *6-palindrome*) en base décimale, est encore un 6-palindrome quand on l'écrit en base octale :

$$N = (625526)_8.$$

Aux dernières nouvelles, on aurait le résultat suivant, obtenu par ordinateur :

Il existe exactement k=**203** entiers positifs **N** tels que, pour un entier **d ≥ 2**, **N** est un *d-palindrome*, en base **b=10** aussi bien qu'en une base **b≠10**. Précisément : les nombres **N** parcourent l'intervalle

[22, … , 9986831781362631871386899]

avec

d = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25.

(*) GOINS Edray, Palindromes in different bases

Le recours à l'ordinateur s'impose pour rechercher les palindromes dans différentes bases …

Ici, quelques palindromes en base 10 et en base 2.

0_{10}	0_2
1_{10}	1_2
3_{10}	11_2
5_{10}	101_2
7_{10}	111_2
9_{10}	1001_2
33_{10}	100001_2
99_{10}	1100011_2
313_{10}	100111001_2
585_{10}	1001001001_2
717_{10}	1011001101_2
7447_{10}	1110100010111_2
9009_{10}	10001100110001_2
15351_{10}	11101111110111_2
32223_{10}	111110111011111_2
39993_{10}	1001110000111001_2
53235_{10}	1100111111110011_2
53835_{10}	1101001001001011_2
73737_{10}	10010000000001001_2
585585_{10}	10001110111101110001_2
1758571_{10}	110101101010101101011_2
1934391_{10}	111011000010000110111_2
1979791_{10}	111100011010110001111_2
3129213_{10}	1011111011111101111101_2
5071705_{10}	$10011010110001101011001_2$
5259525_{10}	$10100000100000100000101_2$

Regan Rick, « Finding Numbers That Are Palindromic In Multiple Bases »

- Autre objet de recherche : qu'en est-il des carrés des palindromes ? Existe-t-il des **b-palindromes au carré**, et pour quelle(s) base(s) **b** ?

La réponse est **oui**, comme le montrent les listes ci-dessous, obtenues sur ordinateur, qui présentent des **10-palindromes au carré** et des **10-palindromes au cube** :

<u>Certains palindromes restent des palindromes quand on les élèvent au carré</u> :
$1=1^2$, $4=2^2$, $9=3^3$, …, $22^2=484$, $11^2=121$, $26^2=676$, $111^2=12321$, $202^2=40804$, …

<u>Certains carrés sont des palindromes, mais pas leur racine carrée</u> :
$264^2=69696$, $307^2=294249$, $836^2=698896$, ...

On trouve, par exemple, des résultats comme celui-ci :

Pour toute base b϶{3,5,6,7,8,9}, il existe une infinité de b-palindromes au carré.

```
1, 1
2, 8
7, 343
11, 1331
101, 1030301
111, 1367631
1001, 1003003001
2201, 10662526601
```

```
1, 1
2, 4
3, 9
11, 121
22, 484
26, 676
101, 10201
111, 12321
121, 14641
202, 40804
212, 44944
264, 69696
307, 94249
836, 698896
1001, 1002001
1111, 1234321
2002, 4008004
2285, 5221225
2636, 6948496
```

3-3-2) Palindromes et Nombres Premiers

La recherche sur les palindromes reste très active, notamment en relation avec les nombres premiers …

Exemple :

La recherche des **palindromes** qui sont des nombres **premiers**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	5	7	11	101	131	151	181	191
313	353	373	383	727	757	787	797	919	929
10301	10501	10601	11311	11411	12421	12721	12821	13331	13831
13931	14341	14741	15451	15551	16061	16361	16561	16661	17471
17971	18181	18481	19391	19891	19991	30103	30203	30403	30703
30803	31013	31513	32323	32423	33533	34543	34843	35053	35153
35353	35753	36263	36563	37273	37573	38083	38183	38783	39293
70207	70507	70607	71317	71917	72227	72727	73037	73237	73637
74047	74747	75557	76367	76667	77377	77477	77977	78487	78787
78887	79397	79697	79997	90709	91019	93139	93239	93739	94049
94349	94649	94849	94949	95959	96269	96469	96769	97379	97579
97879	98389	98689	1003001	1008001	1022201	1028201	1035301	1043401	

(Source : Prime-numbers.info)

3-3-3) **Palindromes** au Carré et **Carrés Magiques** (*)

On calcule les **carrés** de chacun des entiers à 3 chiffres situés sur les lignes, colonnes et diagonales d'un carré magique 3x3

Certains *palindromes* offrent des surprises ...

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

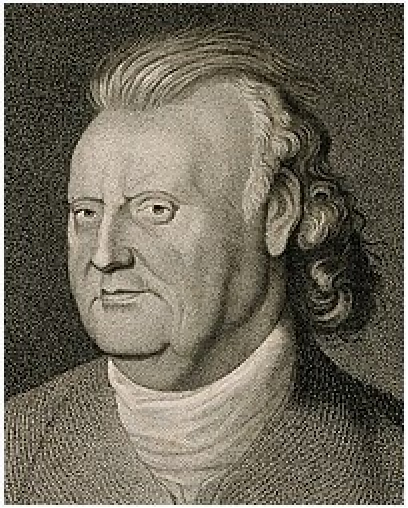
… comme éléments d'un ***carré magique*** !

Puis on calcule les **carrés** des **palindromes** de chacun de ces entiers …

$$\begin{aligned}
618^2 + 753^2 + 294^2 &= 816^2 + 357^2 + 492^2 \\
672^2 + 159^2 + 834^2 &= 276^2 + 951^2 + 438^2 \\
654^2 + 132^2 + 879^2 &= 456^2 + 231^2 + 978^2 \\
639^2 + 174^2 + 852^2 &= 936^2 + 471^2 + 258^2 \\
654^2 + 798^2 + 213^2 &= 456^2 + 897^2 + 312^2 \\
693^2 + 714^2 + 258^2 &= 396^2 + 417^2 + 852^2
\end{aligned}$$

La somme des carrés des entiers est égale à celle des carrés de leurs palindromes, pour tout carré magique 3x3 et toute base numération !

(*) D'après BENJAMIN Arthur, YASUDA Kan, « Magic Squares Indeed ! »



Edward Waring (1736–1798).

3-3-4) WARING et LAGRANGE au Pays des Mots

Le mathématicien anglais Edward WARING a conjecturé que :

> Chaque entier naturel est la somme d'un nombre **g(k)** de *puissances* $\mathbf{k}_{\text{ièmes}}$ d'entiers.

Le théorème de LAGRANGE, qui correspond au cas de

$$\mathbf{g(k) = g(2) = 4}$$

Base de la représentation = Nombre de termes de la somme

Exposant (ici : 2)

nous dit que :

Tout entier naturel est la somme d'au plus 4 carrés

Exemples [cas de **g(2)**=4] :

37	=	$\mathbf{6^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2}$	=	36 + 1 + 0 + 0
57	=	$\mathbf{7^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2}$	=	49 + 4 + 4 + 0
204	=	$\mathbf{14^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2}$	=	196 + 4 + 4 + 0
204	=	$\mathbf{13^2 + 5^2 + 2^2 + 1^2}$	=	169 + 25 + 9 + 1
983	=	$\mathbf{21^2 + 22^2 + 7^2 + 3^2}$	=	441 + 484 + 49 + 9

La combinatoire des mots s'est emparé du problème de Waring.

La notion utilisée à cette fin est celle de **carré binaire** ou bien celle de **cube binaire**. On appelle ainsi un entier qui est un **carré** ou un **cube** en base **b=2**.

Exemples :

Les entiers :

$3_{10} = \mathbf{1001}_2$, $36_{10} = \mathbf{100100}_2$, $45_{10} = \mathbf{101101}_2$, …, $627_{10} = \mathbf{1011100011}_2$, etc.

sont des **carrés binaires**.

Les entiers :

$7_{10} = \mathbf{111}_2$, $42_{10} = \mathbf{101010}_2$, $511_{10} = \mathbf{111111111}_2$, $3549_{10} = \mathbf{110111011101}_2$, etc.

sont des **cubes binaires**.

Les résultats obtenus n'utilisent que très peu la *théorie additive des nombres*.

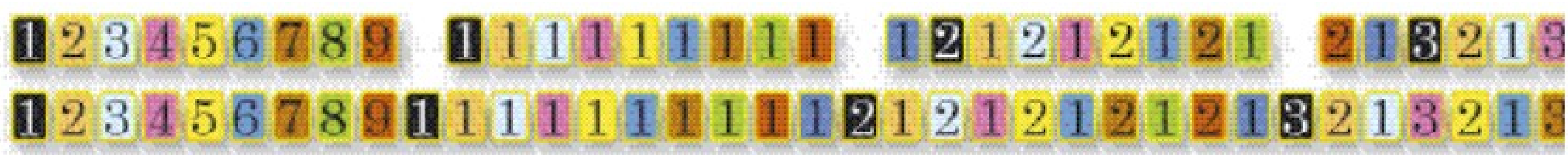
Parmi les résultats récents, on trouve par exemple le suivant :

Les carrés binaires forment une base d'ordre 4 : tout entier naturel N>686 est la somme de 4 carrés binaires.

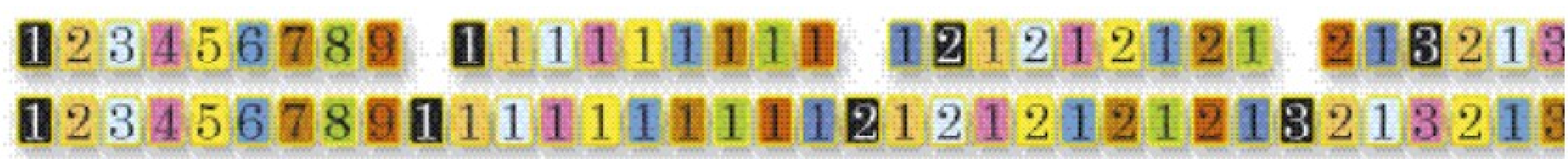
4 JEUX de Maths et JEUX de Mots

1 - L'OULIPO et les MATHS des MOTS :

- Des **Mots** et des **Graphes** … revus par l'OULIPO,
- De la **SUITE** dans les Mots à l'OULIPO.



2 - JOUER avec les MOTS



4-1) L'OULIPO Ouvroir de Littérature Potentielle et les MATHS des MOTS

4-1-1) Des **MOTS** et des **GRAPHES** … revus par l'**OULIPO**

A l'OULIPO, on fait un usage original des *graphes*. Ainsi, Raymond Queneau proposa ''un conte à votre façon'', construit à l'aide d'un graphe : (*)

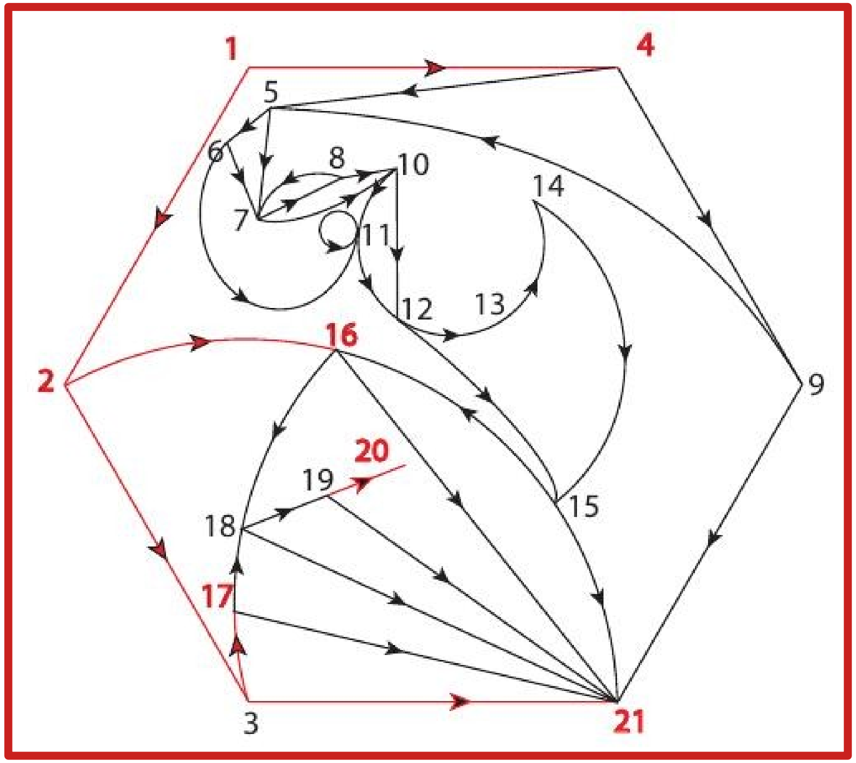
(**1**) Désirez-vous connaître l'histoire des <u>trois alertes petits pois</u> ? Si oui, passez à **4**, si non, passez à **2**,

(**2**) Préférez-vous celle des <u>trois grands maigres échalas</u> ?
Si oui, passez à **16** , si non, passez à **3**.

(**3**) Préférez-vous celle des <u>trois moyens médiocres arbustes</u> ?
Si oui, passez à **17**, si non, passez à **21**.

[…] ici, le texte des étapes [**4**] à [**20**]

(**21**) Ici aussi, le conte est terminé.



L'auteur construit son récit d'après le choix qu'il fait des sommets du graphe !

(*) Michèle AUDIN, « L'OULIPO et les mathématiques-Une description » (Voir Annexe 1)

4-1-2) De la SUITE dans les MOTS à l’OULIPO

A l’OULIPO, on joue bien sûr avec les mots de tous les jours ...

Un jour de canic
sur un véhic
où je circ
, gestic
un funamb
au bulbe minusc
, à la mandib
en virg
et au capit
ridic
. Un somnamb
l'acc
et l'ann
, l'autre artic
: crap
, mais dissim
ses scrup
, rec
,capit

ULE

Raymond Queneau (1903 1976)

… On s'exerce ainsi à produire des **suites de lettres**, dont certaines sont bien connues et d'autres *inhabituelles* :

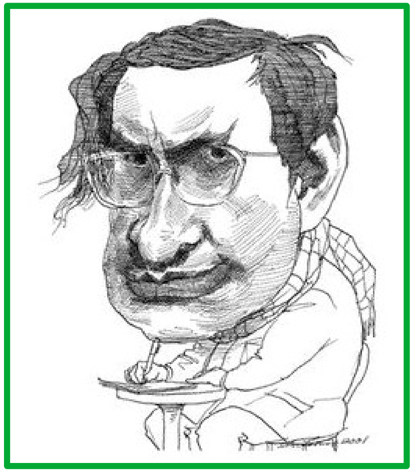
- anagrammes et *ambigrammes*,
- palindromes et *quasi-palindromes*,
- *monovocalismes*, ...

Un burg d'Ulm
Sur un mur nu, dur (du stuc) d'un brun urubu
un club fut vu, plus d'un pull, un tub
(nuls) ; un fût.
Sûr ? Hum hum.
Du brut ? un cru ?
Du fût, mu, chu du mur dur, un rû crût,
un flux sûr, un jus dru, mûr : du rhum.
Nul uru vu, nul Turc, nul Ubu.
Chut !
Sus !
Bubu l'urubu but.
Turlututu !

Mais on y crée aussi des objets mathématiques, comme certaines **suites de nombres** plutôt *insolites* :

- suite **s-additive**, créée par **Raymond QUENEAU** lui-même,
- suite de **décimation**,
- suite des **nombres seconds**.

Voir : Jean-Paul DELAHAYE, « La suite du lézard et autres inventions »



Raymond QUENEAU

La suite des Nombres Seconds

Eric ANGELINI
en 2007

- Comme une généralisation du *Crible d'Eratosthène*, **Eric ANGELINI** a créé la suite des **nombres** (entiers) **seconds** :

A - le *premier* des entiers seconds est le second entier parmi les entiers supérieurs à 1 ; c'est **3** ; on le marque en **bleu**.

On marque ensuite en **rouge** tous ses *multiples* : ils ne pourront pas être des nombres seconds.

B - le *deuxième* nombre second est « le second entier, non divisible par un nombre second déjà trouvé, et plus grand que ceux déjà trouvés » ; c'est **5**.

Ses multiples sont à leur tour marqués en **rouge**.

C - on recommence l'opération **B** aussi longtemps que possible.

On obtient ainsi la liste des <u>nombres seconds</u> en **bleu** :

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48...

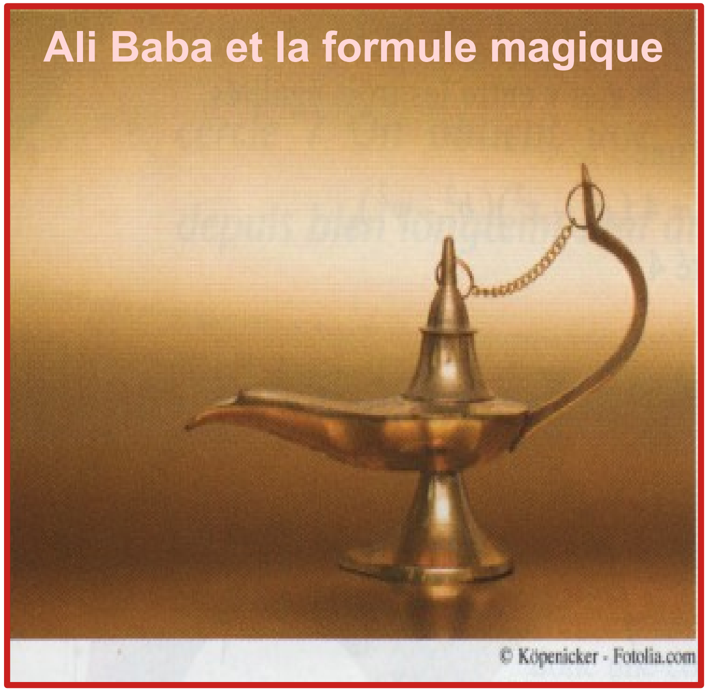
- Diverses questions se posent sur les nombres seconds, par exemple :
- **Comment <u>dénombrer les nombres à la fois *premiers* et seconds</u>** (comme 3, 13, 17, …) ?
- **Tout nombre pair assez grand est-il la somme de deux nombres seconds ?** (version de la <u>conjecture de Goldbach pour les nombres seconds</u>).

4-2)

Et pour FINIR … un PETIT JEU avec des MOTS

De nombreux jeux ont été imaginés pour « triturer » les mots et les phrases des *langues naturelles* … en se remuant les méninges !

En s'inspirant des opérations, plus ou moins modifiées, d'*insertion*, de *suppression*, de *substitution* ou de *transposition* de caractères adjacents, on peut créer de nombreux exercices comme celui-ci :



D'après Tangente, n° 184, p 46
Solution en Annexe 2

Ali Baba doit trouver la *formule magique* pour ouvrir la caverne au trésor des 40 voleurs.
La formule doit commencer par le mot **B** et finir par le mot **BBABB**. Et chaque nouveau mot doit s'obtenir du précédent en remplaçant une ou plusieurs lettres consécutives, en appliquant les règles suivantes :

- **AAB** peut être remplacée par **A**,
- **B** peut être remplacée par **BAA**,
- **AA** peut être remplacée par **BB**.

Combien de mots Ali doit-il prononcer *au minimum*, y compris ceux du début et de la fin ?

En guise de Dernier Mot

Tête ancienne, vide de mots ...

Tête actuelle, pleine de mots ...

C'est à partir des *animaux* que les mots ont fait les *humains*,

Mais hélas aujourd'hui, parfois, un trop plein de mots nuit,

Et abuser des mots souvent veut dire en venir aux mains.

Au contraire, en combinatoire des mots, rien de tel ne se produit,

Car avec force bons mots et jeux de mots laids,

A personne, personne ne déplaît ...

Et ...

A ceux qui ne sont pas matheux,
Reste assurément le plaisir
De fréquenter tout à loisir
Pérec et Queneau parmi ceux
Qui, des mots la combinatoire,
Ont fait un jeu jubilatoire !

Depuis les premiers âges, au fond de sa caverne, l'homme fabrique des mots ...

... jusqu'à l'âge actuel

... de la réunionite aiguë !

ANNEXE 1

Un Conte à votre façon

Etapes 1 à 12

1. Désirez-vous connaître l'histoire des trois alertes petits pois?
   a. si oui, passez à 4
   b. si non, passez à 2
2. Préférez-vous celle des trois minces grands échalas?
   a. si oui, passez à 16
   b. si non, passez à 3
3. Préférez-vous celle des trois moyens médiocres arbustes?
   a. si oui, passez à 17
   b. si non, passez à 21
4. Il y avait une fois trois petits pois vêtus de vert qui dormaient gentiment dans leur cosse. Leur visage bien rond respirait par les trous de leurs narines et l'on entendait leur ronflement doux et harmonieux.
   a. si vous préférez une autre description, passez à 9
   b. si celle-ci vous convient, passez à 5
5. Ils ne rêvaient pas. Ces petits êtres en effet ne rêvent jamais.
   a. si vous préférez qu'ils rêvent, passez à 6
   b. sinon, passez à 7
6. Ils rêvaient. Ces petits êtres en effet rêvent toujours et leurs nuits sécrètent des songes charmants.
   a. si vous désirez connaître ces songes passez à 11
   b. si vous n'y tenez pas, vous passez à 7
7. Leurs pieds mignons trempaient dans de chaudes chaussettes et ils portaient au lit des gants de velours noir.
   a. si vous préférez des gants d'une autre couleur passez à 8
   b. si cette couleur vous convient, passez à 10.
8. Ils portaient au lit des gants de velours bleu.
   a. si vous préférez des gants d'une autre couleur, passez à 7
   b. si cette couleur vous convient, passez à 10
9. Il y avait une fois trois petits pois qui roulaient leur bosse sur les grands chemins. Le soir venu, fatigués et las, ils s'endormirent très rapidement.
   a. si vous désirez connaître la suite, passez à 5
   b. si non, passez à 21
10. Tous les trois faisaient le même rêve, ils s'aimaient en effet tendrement et, en bons fiers trumeaux, songeaient toujours semblablement.
    a. si vous désirez connaître leur rêve, passez à 11
    b. si non, passez à 12
11. Ils rêvaient qu'ils allaient chercher leur soupe à la cantine populaire et qu'en ouvrant leur gamelle ils découvraient que c'était de la soupe d'ers. D'horreur, ils se réveillaient.
    a. si vous voulez savoir pourquoi ils s'éveillent d'horreur, consultez le Larousse au mot «ers» et n'en parlons plus
    b. si vous jugez inutile d'approfondir la question, passez à 12
12. Opopoï! s'écrient-ils en ouvrant les yeux. Opopoï! Quel songe avons-nous enfanté là! Mauvais présage, dit le premier. Oui-da, dit le second, c'est bien vrai, me voilà triste. Ne vous troublez pas ainsi, dit le troisième qui était le plus futé, il ne s'agit pas de s'émouvoir, mais de comprendre, bref je m'en vais vous analyser ça.
    a. si vous désirez connaître tout de suite l'interprétation de ce songe, passez à 15
    b. si vous souhaitez au contraire connaître les réactions des deux autres, passez à 13

Un Conte à votre façon

Etapes 13 à 21

13. Tu nous la bailles belle, dit le premier. Depuis quand sais-tu analyser les songes? Oui, depuis quand sais-tu analyser les songes? Oui, depuis quand? ajouta le second.
    a. si vous désirez aussi savoir depuis quand, passez à 14
    b. si non, passez à 14 tout de même, car vous ne le saurez pas plus
14. Depuis quand? s'écria le troisième. Est-ce que je sais moi! Le fait est que je pratique la chose. Vous allez voir!
    a. si vous voulez vous aussi voir, passez à 15
    b. si non, passez également à 15, car vous ne verrez rien.
15. Eh bien! voyons, dirent ses frères. Votre ironie ne me plaît pas, répliqua l'autre, et vous ne saurez rien. D'ailleurs, au cours de cette conversation d'un ton assez vif, votre sentiment d'horreur ne s'est-il pas estompé? effacé même? Alors quoi bon remuer le bourbier de votre inconscient de papilionacées? Allons plutôt nous laver à la fontaine et saluer ce gai matin dans l'hygiène et la sainte euphorie! Aussitôt dit, aussitôt fait: les voilà qui se glissent hors de leur cosse, se laissent doucement rouler sur le sol et puis au petit trot gagnent joyeusement le théâtre de leurs ablutions.
    a. si vous désirez savoir ce qui se passe sur le théâtre de leurs ablutions, passez à 16
    b. si vous ne le désirez pas, vous passez à 21
16. Trois grands échalas les regardaient faire.
    a. si les trois échalas vous déplaisent, passez à 21
    b. s'ils vous conviennent, passez à 18
17. Trois moyens médiocres arbustes les regardaient faire.
    a. si les trois moyens médiocres arbustes vous déplaisent, passez à 21
    b. s'ils vous conviennent, passez à 18
18. Se voyant ainsi zyeutés, les trois alertes petits pois qui étaient fort pudiques s'ensauvèrent.
    a. si vous désirez savoir ce qu'ils firent ensuite, passez à 19
    b. si vous ne le désirez pas, vous passez à 21
19. Ils coururent bien fort pour regagner leur cosse et, refermant celle-ci derrière eux, s'y endormirent de nouveau.
    a. si vous désirez connaître la suite, passez à 20
    b. si vous ne le désirez pas, vous passez à 21
20. Il n'y a pas de suite le conte est terminé.
21. Dans ce cas, le conte est également terminé.

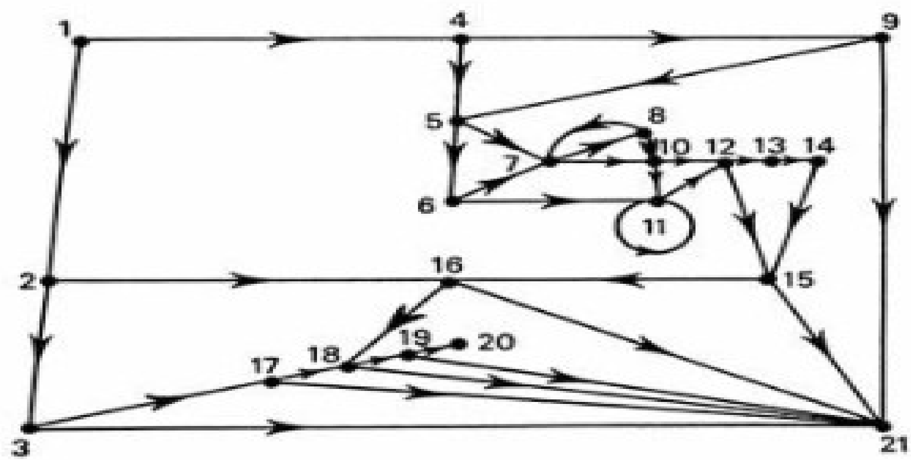


Figure 1 – Graphe du «Conte à votre façon»

A N N E X E 2 – Solution du Jeu « Ali Baba »

Sept mots sont nécessaires pour obtenir la formule magique :

	Départ	Règle appliquée			Résultat
1	B	B	→	BAA	BAA
2	BAA	AA	→	BB	BBB
3	BBB	B	→	BAA	BBAAB
4	BBAAB	AAB	→	A	BBA
5	BBA	B	→	BAA	BBAAA
6	BBAAA	AA	→	BB	BBABB
7	BBABB				

Quelques Références sur la combinatoire des Mots

- **Allouche Jean-Paul**, Théorie des Nombres et Automates
- **Audin Michèle**, L'OULIPO et les mathématiques--Une description
- **Autebert Jean-Michel**, Théorie des langages et des automates
- **Berstel Jean**, Mathématiques et informatique-2-Combinatoire et arithméti-que-Problèmes résolus
- **Berthé Valérie**, Combinatorics, automata and number theory
- **Hopcroft John**, Introduction to automata theory, languages and computation (2007)
- **Lothaire**, Combinatorics on words
- **Lothaire**, Algebraic combinatorics on words
- **Lothaire**, Applied combinatorics on words
- **Rigo Michel**, Formal Languages, automata and numeration systems
- **Yvon François**, Théorie des langages-Notes de cours

A signaler, pour les personnes *très* intéressées, ce *récent* article sur le théorème de van der Waerden :

Blondal Ari, **Jungic Veselin**, Proof of van der Waerden Theorem in Nine Figures (Storry Brook Univ., août *2018*)

<u>Ouvrages instructifs et récréatifs</u> :

- **Bellos Alex**, Alex au pays des chiffres (sur 1089)
- **Berna Henri**, Palindromes, monotypes et autres bizarreries numériques
- **Wells David**, Dictionnaire Penguin des nombres curieux

<u>Sur la toile</u> :

- **Dr Math**, Making Numbers into Palindromic Numbers
- **MathPages**, Digit Reversal Sums Leading to Palindromes
- **PIN Jean-Eric**, Automates finis et applications
- **Villemin Gérard**, Palindromes (http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Formes/PalRetar.htm) [très jolie présentation !]