Le tournoi de tennis

Au premier tour d'un tournoi de tennis, on groupe les 50 concurrents par paires. Après le premier tour, on groupe les gagnants par paires pour le second tour. On continue ainsi jusqu'au dernier tour qui désignera le vainqueur. Lorsqu'on tombe sur un nombre impair de joueurs, l'un d'eux se retire pour attendre le tour suivant. L'organisateur doit fournir une boîte de balles neuves pour chaque partie de deux joueurs.

Question : Combien doit-il prévoir de boîtes de balles ?

Source :
Gamow et Stern - Jeux mathématiques

http://www.kafemath.fr

Les concombres

On suppose, pour les besoins de ce problème, que les concombres sont composés de 99% d'eau. On laisse reposer 500 kg de concombres pendant une nuit, et le lendemain, les concombres ne contiennent plus que 98% d'eau.

Question : Quel est le poids de concombres restant ?

Source : Halmos - Problèmes
pour mathématiciens, petits et grands

http://www.kafemath.fr

Le vol du bourdon

Deux trains partent simultanément de deux villes A et B distantes de 160 km en se dirigeant l'un vers l'autre à la vitesse de 80 km/h. Un bourdon part au même moment de A et se dirige vers B à la vitesse de 100 km/h. Quand il rencontre le train venant de B, il fait demi-tour et repart vers A. Il vole ainsi d'un train à l'autre jusqu'à ce que ces trains se croisent et tombe alors mort de peur.

Question : Quelle est la distance totale parcourue par le bourdon ?

Source :
Gamow et Stern - Jeux mathématiques

http://www.kafemath.fr

Peinture fraiche

Trois peintres doivent repeindre un salon. Le premier mettrait 2 heures s'il était seul, le deuxième 3 et le troisième 5.

Question : Combien de temps mettent-ils à trois ?

Source : Deslandes et Deslandes
Enigmes mathématiques corrigées

http://www.kafemath.fr

Tour de cartes d'Abdul Alafrez

Préparation

Le magicien utilise un petit paquet de cartes contenant un même nombre de cartes rouges et de cartes noires (par exemple 12 ou 16 cartes en tout). Il range ces cartes en alternant 1 rouge / 1 noire.

Il montre le contenu du paquet puis le présente faces cachées.

Mélanges

Le magicien mélange les cartes en utilisant plusieurs fois l'une et l'autre des deux méthodes suivantes

(a) Couper

(b) Retourner 2 cartes qui se suivent : Le magicien prend en main 2 cartes successives et retourne cette paire en la laissant à son emplacement dans le paquet.

Séparation des rouges et des noires

Le magicien met ses mains derrière son dos et retourne 1 carte sur 2

Il présente le paquet aux spectateurs : Toutes les cartes rouges sont dans un sens (faces visibles par exemple) et toutes les cartes noires dans l'autre (faces cachées par exemple)

Explication

Contrairement aux apparences, les cartes ne sont pas vraiment mélangées. Après chaque mélange, le paquet conserve les propriétés qui permettront la séparation finale des rouges et des noires.

Critères caractéristiques de chaque carte :

Couleur : Rouge (R) ou Noire (N)

Position : Impaire (i) ou Paire (p)

Face : Cachée (c) ou Visible (v)

Rangement de départ :

Alternance des rouges (R) et des noires (N). Toutes les cartes sont face cachée (c)

Mélange (a) : Couper

Pour fixer les idées, décidons d'affecter aux cartes rouges un rang impair et aux cartes noires un rang pair. Autrement dit, on considère que les cartes sont disposées sur un cercle et on choisit comme 1ère carte une carte rouge. Après la coupe, les cartes (R) restent en position impaire et les cartes (N) en position paire : le rangement de départ est conservé.

1 2 3 | 4 5 6 7 8		4 5 6 7 8 | 1 2 3
R N R | N R N R N	=>	N R N R N | R N R

Mélange (b) : Retourner 2 cartes successives

Pour chacune des 2 cartes retournées, la couleur n'est pas changée mais les critères position et face sont modifiés en même temps. Il y a 4 possibilités de modification :

ic => pv, iv => pc, pc => iv, pv => ic

On peut remarquer la réversibilité de ces modifications et noter les équivalences :

ic <=> pv et iv <=> pc

Séparation des rouges et des noires

Dans le rangement de départ, les critères de chaque carte sont les suivants :

Ric Npc Ric Npc Ric Npc Ric Npc ...

Il y a seulement 2 types de cartes : Ric et Npc

Nous avons vu que les mélanges (a) ne modifient pas les critères des cartes. Après les mélanges (b), 2 autres types de cartes peuvent apparaître :

Rpv et Niv

Compte tenu des équivalences ci-dessus, il ne peut exister que 4 types de cartes après les mélanges

Ric, Npc, Rpv, Niv

Si on retourne 1 carte sur 2 en commençant par exemple par une carte impaire,

	1	2	3	4		7	8
les 4 types de cartes	Ric	Npc	Niv	Rpv	……	Ric	Rpv
sont ainsi transformés :	Riv	Npc	Nic	Rpv	…...	Riv	Rpv

Toutes les cartes d'une couleur (ici rouge) sont face visible et toutes les cartes de l'autre couleur (ici noire) sont face cachée.

Références

François Dubois - http://www.kafemath.fr/2015-2016/1509-11sept/dubois-alafrez-11sept2015.pdf

Le bonneteau

Présentation

Le magicien dispose sur la table devant le spectateur une feuille de papier sur laquelle sont inscrits les numéros 1, 2 et 3. Derrière ces numéros sont posés trois gobelets et un petit objet qui sera caché sous un de ces gobelets.

Les gobelets peuvent être différents mais il vaut mieux qu'ils soient d'apparence identique, l'un d'eux ayant une différence (discrète) qui permettra de le distinguer des deux autres, afin de servir de repère au magicien.

Echange des gobelets

Le magicien dit qu'il va tourner le dos et demander au spectateur d'échanger les positions des gobelets en suivant ses instructions. Il regarde la position du gobelet repère et se retourne en mémorisant cette position sur les doigts d'une main. Il demande alors au spectateur

- de cacher l'objet sous un gobelet

- d'échanger les positions des 2 gobelets vides

- de choisir 2 autres gobelets, d'échanger leurs positions et d'annoncer quelles positions sont échangées. Cette action est répétée plusieurs fois.

A chaque échange, si l'un des numéros annoncés est celui mémorisé, le magicien remplace sur ses doigts le numéro mémorisé par le numéro annoncé.

Révélation de l'objet caché

Le magicien se retourne et regarde la position du gobelet repère. Cette position correspond-elle au numéro mémorisé ?

- Oui : L'objet caché se trouve sous le gobelet repère

- Non : On élimine le gobelet repère et le gobelet dont la position correspond au numéro mémorisé. L'objet caché se trouve sous le gobelet restant

Explication

L'échange initial (sans indication de numéros) permettra de connaître, à la fin des manipulations, le gobelet dont on a suivi le mouvement sur les doigts. Deux cas sont possibles après l'échange initial :

- Si l'objet est caché sous le gobelet repère R, R n'a pas changé de position. Cela signifie qu'on va suivre le mouvement de R.

- Si l'objet est caché sous un autre gobelet, par exemple X, X a pris la place de R. Cela signifie qu'on va suivre le mouvement de X.

A la fin des manipulations, le numéro mémorisé indique la position du gobelet dont a suivi le mouvement :

- Dans le 1er cas, on a suivi R, l'objet est caché sous R.

- Dans le 2ème cas, on a suivi X, l'objet n'est caché ni sous R ni sous X mais sous le 3ème gobelet Y.

Source : Fabien Olicard - https://www.youtube.com/watch?time_continue=135&v=UqVK6lX9VCA

Cartes binaires

Déroulement du tour

Le magicien demande à un spectateur de choisir un nombre entre 1 et 100 et de le noter secrètement (vérification éventuelle après le tour).

Il montre les cartes 1 à 1 et demande au spectateur si la carte présentée contient ou non le nombre qu'il a choisi. Quand toutes les cartes ont été présentées, le magicien révèle le nombre choisi.

Explication

Le tour est basé sur la numération binaire :

Tout entier naturel peut s'écrire de manière unique comme une somme de puissances de 2.

Le tableau de la page suivante montre comment sont construites les cartes du jeu. Sur chaque carte est inscrite en haut à gauche une puissance de 2 puis sont inscrits les nombres dont la décomposition contient cette puissance de 2.

Les cartes désignées indiquent les puissances de 2 intervenant dans la décomposition du nombre choisi. Il suffit au magicien de faire la somme de ces puissances pour trouver le nombre.

Remarque – On peut noter discrètement au verso des cartes les exposants 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et montrer celles-ci dans un ordre quelconque.

Cartes de Fibonacci

Une variante du jeu classique utilise la représentation de Zeckendorf : chaque carte du jeu regroupe les nombres dont la décomposition contient le nombre de Fibonacci inscrit en haut à gauche.

Théorème de Zeckendorf

> **Tout entier naturel non nul peut s'écrire de manière unique comme une somme de nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs.**

Suite de Fibonacci

$$\mathbf{F_n = F_{n-2} + F_{n-1}} \text{ avec } \mathbf{F_0 = 0, \; F_1 = 1, \; F_2 = 1}$$

Nombres de Fibonacci

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 . . .

Références

Dominique Souder - http://www.kafemath.fr/2017-2018/1802-08fevrier/Souder-08fevrier2018.pdf (Tour n° 13)

Gérard Willemin - http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Numerati/BINAIRE/Magie.htm

Jean-Paul Davalan - http://jm.davalan.org/jeux/cartes/add/index.html

Numération décimale

10^1	10^0
	0
	1
	2
	3
	4
	5
	6
	7
	8
	9
1	0
1	1
1	2
1	3
1	4
1	5
1	6
1	7
1	8
1	9
2	0
2	1
2	2
2	3
2	4
2	5

Numération binaire

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
				0
				1
			1	0
			1	1
		1	0	0
		1	0	1
		1	1	0
		1	1	1
	1	0	0	0
	1	0	0	1
	1	0	1	0
	1	0	1	1
	1	1	0	0
	1	1	0	1
	1	1	1	0
	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	0	1

Cartes binaires

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
				1
			2	
			3	3
		4		
		5		5
		6	6	
		7	7	7
	8			
	9			9
	10		10	
	11		11	11
	12	12		
	13	13		13
	14	14	14	
	15	15	15	15
16				
17				17
18			18	
19			19	19
20		20		
21		21		21
22		22	22	
23		23	23	23
24	24			
25	25			25

13 en décimal

$\mathbf{1 \times 10^1 + 3 \times 10^0}$

1 x 10 + 3 x 1

1101 en binaire

$\mathbf{1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0}$

1 x 8 + 1 x 4 + 1 x 1

On inscrit sur chaque carte une puissance de 2 (en haut à gauche) puis tous les nombres dont la décomposition utilise cette puissance de 2.

La flèche versatile

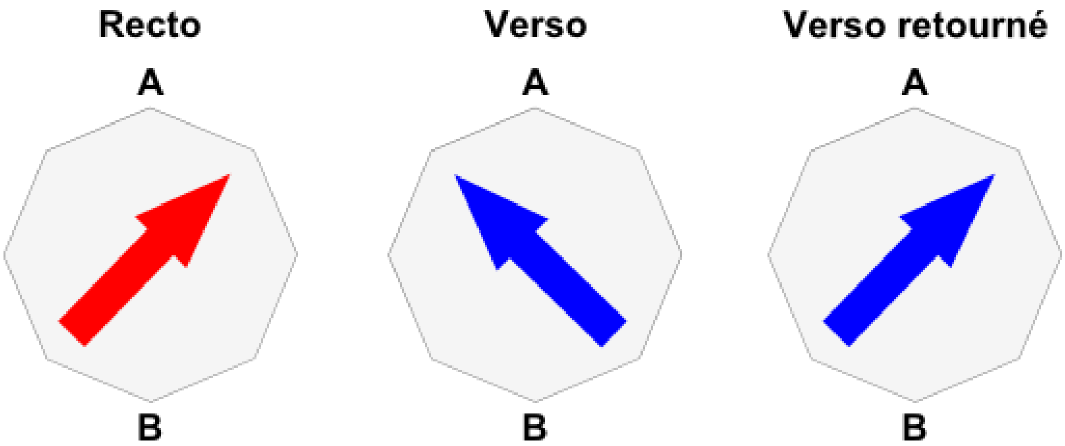
On utilise un octogone portant sur chaque face une flèche qui pointe vers un sommet. Les 2 sommets ont été choisis afin que les 2 flèches soient perpendiculaires.

On peut faire tourner l'octogone selon deux axes particuliers pour donner l'illusion que la flèche du verso pointe dans la même direction que la flèche du recto ou au contraire dans la direction opposée.

Les deux mouvements possibles sont décrits dans les figures ci-dessous. Pour la démonstration devant le public, les flèches sont bien sûr de la même couleur rouge.

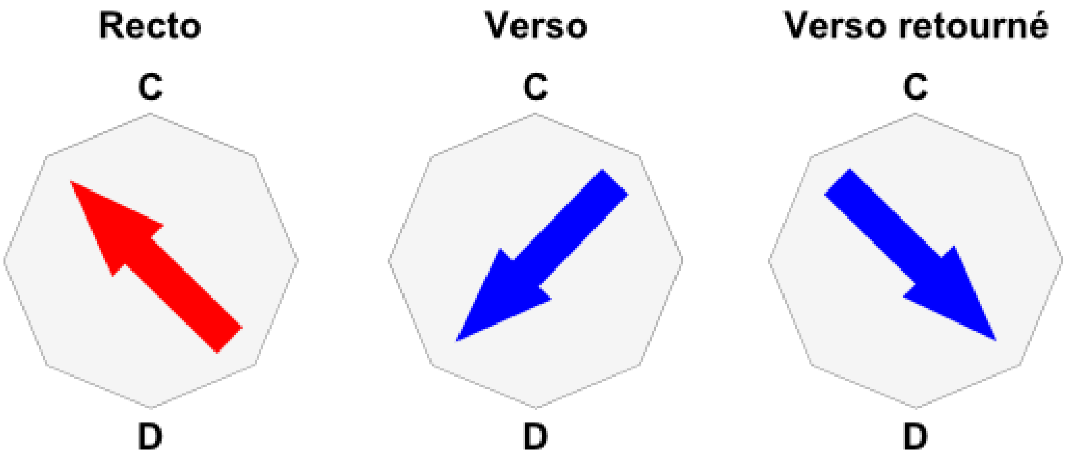
Rotation autour de l'axe AB

Les deux flèches pointent dans la même direction.



Rotation autour de l'axe CD

Les deux flèches pointent dans des directions opposées.



Source

Mickaël Launay - 2 vidéos sur Youtube accessibles à partir du site http://micmaths.com

Problèmes sur flyers

1 - Le tournoi de tennis

Au premier tour d'un tournoi de tennis, on groupe les 50 concurrents par paires. Après le premier tour, on groupe les gagnants par paires pour le second tour. On continue ainsi jusqu'au dernier tour qui désignera le vainqueur. Lorsqu'on tombe sur un nombre impair de joueurs, l'un d'eux se retire pour attendre le tour suivant. L'organisateur doit fournir une boîte de balles neuves pour chaque partie de deux joueurs.

Question : Combien doit-il prévoir de boîtes de balles ?

Réponse : Chaque partie élimine un joueur. Comme le tournoi doit se terminer avec le seul gagnant, il faut éliminer 50-1 joueurs. Il y a donc 49 parties et il faut 49 boîtes de balles.

Source : G. Gamow et M. Stern – Jeux mathématiques

2 - Le vol du bourdon

Deux trains partent simultanément de deux villes A et B distantes de 160 km en se dirigeant l'un vers l'autre à la vitesse de 80 km/h. Un bourdon part au même moment de A et se dirige vers B à la vitesse de 100 km/h. Quand il rencontre le train venant de B, il fait demi-tour et repart vers A. Il vole ainsi d'un train à l'autre jusqu'à ce que ces trains se croisent et tombe alors mort de peur.

Question : Quelle est la distance totale parcourue par le bourdon ?

Réponse : Les trains se croisent au bout d'une heure. Le bourdon a donc parcouru 100 km.

Précision : Quand on posa le problème à John von Neumann, il donna la réponse immédiatement. Son interlocuteur lui dit : Vous avez pris la solution simple, je croyais que vous auriez fait la somme de la série infinie. Mais, j'ai fait la somme de la série infinie, répondit von Neumann.

Source : G. Gamow et M. Stern – Jeux mathématiques

3 - Les concombres

On suppose, pour les besoins de ce problème, que les concombres sont composés de 99% d'eau. On laisse reposer 500 kg de concombres pendant une nuit, et le lendemain, les concombres ne contiennent plus que 98% d'eau.

Question : Quel est le poids de concombres restant ?

Réponse : Avant la nuit, les concombres étaient composés de 5 kg de matière solide et, pour le reste, d'eau. Le lendemain, la matière solide constitue 2% du poids restant. Il reste donc 5 x 100 / 2 = 250 kg de concombres.

Source : P. Halmos - Problèmes pour mathématiciens, petits et grands

4 - Peinture fraiche

Trois peintres doivent repeindre un salon. Le 1er mettrait 2 heures s'il était seul, le 2ème 3 et le 3ème 5.

Question : Combien de temps mettent-ils à trois ?

Réponse : On calcule combien de salons pourraient peindre ensemble les trois peintres en 2 x 3 x 5 = 30 heures. Le 1er pourrait en peindre 30/2 = 15, le 2ème 30/3 = 10 et le 3ème 30/5 = 6. Soit en tout 31 salons en 30 heures. Il leur faut donc 30/31 heures pour peindre un salon, soit 58 minutes.

Source : G. et C. Deslandes - Enigmes mathématiques corrigées

Trouver la carte à tous les coups !

Phase 1 : Placer la carte choisie dans le jeu

Le magicien présente un jeu de 52 cartes et le fait mélanger et couper à volonté. Il dit qu'il va prélever au hasard "quelques" cartes à l'intérieur du jeu. En fait il en prélève exactement 9. Puis il étale le petit paquet prélevé, face cachée, et demande au spectateur de tirer une carte.

Il pose sur la table le petit paquet et le gros paquet, face cachée, demande au spectateur de regarder la carte tirée et de la poser, face cachée, sur le petit paquet. Il pose alors le gros paquet des cartes restantes, face cachée, sur le petit paquet.

Phase 2 : Retirer 1 à 1 les cartes du paquet

Le magicien décrit la procédure qu'il va utiliser et commence à l'exécuter, en insistant sur le fait qu'il s'agit de faire intervenir le hasard puisque le jeu est parfaitement mélangé.

> "Je distribue les cartes face visible, dans 4 colonnes. Pour chaque colonne, je compte les cartes de 10 à 1 et je m'arrête dès que la valeur de la carte déposée correspond au numéro annoncé. Les figures (Roi, Dame, Valet) ont une valeur nulle. S'il n'y a pas de correspondance, je pose la carte suivante sur la colonne, face cachée."

Phase 3 : Retrouver la carte choisie

Le magicien additionne les valeurs des cartes découvertes sur les colonnes et dit que le nombre obtenu indique le rang de la carte choisie dans le paquet des cartes restantes.

Il découvre 1 à 1 les cartes du paquet en comptant jusqu'à arriver à la carte choisie.

Explication

Le magicien sait que le gros paquet contient 52 - 9 = 43 cartes, qu'il dépose sur le petit paquet : la carte choisie est la 44ème.Toute l'astuce est de faire croire que le hasard va permettre d'éliminer les cartes du gros paquet pour arriver à la carte choisie.

Quand on entasse les cartes dans une colonne, il y a 2 possibilités :

> - s'il n'y a aucune correspondance entre valeur et numéro, 11 cartes ont été retirées (10 face visible et 1 face cachée) ;
>
> - s'il y a correspondance pour le numéro n, 10 - (n-1) = 11 - n cartes ont été retirées et le numéro n est visible sur la colonne. C'est-à-dire qu'il y aura encore n cartes à retirer pour arriver au total de 11 pour la colonne.

Quand toutes les colonnes sont remplies, il reste encore à retirer la somme des numéros visibles pour arriver à la carte choisie.

Attention : Dans le cas particulier où il n'y a aucune correspondance entre valeur et numéro sur aucune des colonnes, la carte choisie est celle qu'on aurait dû placer face cachée sur la dernière colonne.

Source : MagieExpliquée - https://www.youtube.com/watch?v=L2oTnr1tNvU